תורת הפונקציות המרוכבות 1 - תרגיל בית מספר 1
תאריך הגשה: 19.7.2018

השאלות המסומנות בכוכבית (*) הינן שאלות העשרה ואינן להגשה.
חשוב לענות על יתר השאלות – ברובן נשתמש בהמשך הקורס.

(1) בשאלה זו נוכיח גרסה כמותית של משפט ההעתקה הפתוחה.
נסמן $D=\{z:|z|<1\}$. נתונה פונקציה רגולרית $f:D\to\mathbb{C}$, המקיימת $f(0)=0$ וכן $|f(z)|>\alpha$ לכל $|z|=r$, עבור $0<r<1$, $\alpha>0$, מסויימים. הוכיחו כי תמונת f מכילה כדור ברדיוס לפחות $\frac{\alpha}{2}$ סביב 0.

(2) הזכרו בהגדרה $\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. נגדיר קבוצה $A\subset\mathbb{C}$:
$$A=\{m\pm\tfrac{i}{\pi}\log(n+\sqrt{n^2-1}):m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}\}$$
(א) הוכיחו שלכל $a\in A$ מתקיים $\cos(\pi a)=(-1)^m n$.
(ב) הוכיחו שכל $z\in\mathbb{C}$ הינו במרחק קטן מ-1 מאיבר כלשהו של A.
הערה: לתרגיל זה יהיה שימוש מעניין בהמשך הקורס.

(3) הוכיחו שהפונקציה
$$T(z)=\begin{cases}z, & |z|\le 1\\ \frac{1}{\overline{z}}, & |z|\ge 1\end{cases}$$
היא רציפה ומקיימת $|T(z)|\le 1$ לכל $z\in\mathbb{C}$ וכן $|T(z)-T(w)|\le|z-w|$ לכל $z,w\in\mathbb{C}$.

(4) פתרו את המשוואות הבאות:
(א) $z^4=-1+\sqrt{3}i$
(ב) $z^2+\sqrt{32}iz-6i=0$
(ג) $z^2=\overline{z}$

(5) יהא $n>0$, ויהא $f(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$ פולינום עם מקדמים מרוכבים ו-$a_n\neq 0$. נסמן $g(z)=\frac{f(z)}{a_nz^n}$.
הראו כי ב-$\widehat{\mathbb{C}}$ מתקיים $\lim\limits_{z\to\infty}g(z)=1$, והסיקו ש-$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

(6) (א) תהנא $f,g:U\to\mathbb{C}$ גזירות בנקודה $z_0\in U$, ו-$g(z_0)\neq 0$. הראו כי גם $f+g, f\cdot g, f/g$ גזירות ב-z_0.
(ב) תהא $f:U\to\mathbb{C}$ גזירה ב-$z_0\in U$ ותהא $g:V\to\mathbb{C}$ גזירה ב-$f(z_0)\in V$. הוכיחו כי $g\circ f$ גזירה ב-z_0 וכן שמתקיים כלל השרשרת: $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$.
(ג) נגדיר שפונקציה $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ היא גזירה בנקודה $t\in(a,b)$ אם ורק אם קיים הגבול $\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$, ונגדיר אותו בתור $f'(t)$. נכתוב $f=u+iv$, $u,v:(a,b)\to\mathbb{R}$. הראו ש-f גזירה ב-t אם ורק אם u,v גזירות ב-t, ואז מתקיים $f'(t)=u'(t)+iv'(t)$ בתור f .$f'(t)=u'(t)+iv'(t)$.
(ד) הראו כי אם מסילה $\alpha:(a,b)\to\mathbb{C}$ גזירה ב-t, ופונקציה $f:U\to\mathbb{C}$ גזירה ב-$\alpha(t)\in U$, אז גם $f\circ\alpha$ גזירה ב-t וכן מתקיים כלל השרשרת $(f\circ\alpha)'(t)=f'(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)$.

(7) תהא $K\subset\mathbb{C}$ קומפקטית.
(א) הוכיחו שיש ל-$\mathbb{C}\setminus K$ מרכיב קשירות לא חסום אחד ויחיד וכל שאר מרכיבי הקשירות חסומים (אם קיימים).
(ב) הוכיחו שלכל מרכיב קשירות U של $\mathbb{C}\setminus K$, מתקיים $\partial U\subset K$.
תזכורת: השפה של קבוצה היא חיתוך הסגור של U עם הסגור של המשלים של U: $\partial U=\overline{U}\cap\overline{\mathbb{C}\setminus U}$.

(8) (א) מצאו $f:(0,1)\to\mathbb{C}$ רציפה וחח"ע כך ש-$\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(f)$ אינה קשירה מסילתית.
(ב) (*) האם קיימת פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{C}$ כנ"ל?

(9) לכל $a\in\mathbb{C}$ עם $|a|<1$ נסמן $\phi_a(z)=\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$. הוכיחו ש-$\phi_a$ היא פונקציה גזירה, חח"ע ועל מ-D לעצמו.
רמז: $\phi_a^{-1}=\phi_{-a}$. בדקו מה קורה ל-$|z|=1$.

שאלות העשרה – לא להגשה

(10) הוכיחו שאם $\mathbb{R} \subset \mathbb{F}$ שדה המכיל את הממשיים, וכמ"ו מעליהם הוא ממימד סופי, אז $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ או $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.
רמז: העזרו במשפט היסודי של האלגברה. בהינתן $a \in \mathbb{F}$ הביטו בהעתקה ה-$\mathbb{R}$ לינארית $x \mapsto a \cdot x$ מ-$\mathbb{F}$ לעצמו.

(11) נגדיר באופן פורמלי <u>שדה מרוכבים</u> כשדה $\mathbb{F}$ עליו מוגדרת פעולה $z \mapsto \overline{z}$ הנקראת <u>פעולת הצמדה</u> ומקיימת את התכונות הבאות:

(i) לכל z, $\overline{\overline{z}} = z$.

(ii) ההצמדה שומרת על פעולות החיבור והכפל: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(iii) קבוצת נקודות השבת $\{z \in \mathbb{F} : \overline{z} = z\}$ – הנקודות הצמודות לעצמן, שהיא תת-שדה בגלל (ii) – הינה שדה סדור שלם, כלומר, (שדה איזומורפי ל)שדה הממשיים.

(iv) לכל $z \neq 0$, האיבר $z \cdot \overline{z}$, אשר צמוד לעצמו (כלומר ממשי), הינו חיובי.

(v) קיים $z \in \mathbb{F}$ כך ש-$z \neq \overline{z}$.

לאיברים המקיימים $\overline{z} = -z$ נקרא מדומים טהורים.

(א) הראו שהפירוק $z = \frac{z+\overline{z}}{2} + \frac{z-\overline{z}}{2}$ הינו פירוק של כל $z \in \mathbb{F}$ לסכום של ממשי ומדומה טהור, והשפירוק יחיד.

(ב) הוכיחו (ישירות מהאקסיומות) שקיים ב-$\mathbb{F}$ פתרון למשוואה $z^2 = -1$.

(ג) האם תוכלו להוכיח ישירות מהאקסיומות שקיים ב-$\mathbb{F}$ גם פתרון למשוואה $z^4 = -1$?

(ד) נגדיר לכל $z \in \mathbb{F}$, $|z| = +\sqrt{z\overline{z}}$. הוכיחו ש-$|\cdot|$ מקיים את תכונת הכפליות של הנורמה וכן את אי-שיוויון המשולש.

(ה) הראו שקבוצת המטריצות

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$$

עם פעולות החיבור והכפל הרגילות של מטריצות והפעולה $\overline{A} = A^T$ מקיימת את כל האקסיומות (i)-(v) . מה הקשר בין המטריצות הנ"ל והרמז משאלה 10?