תורת הפונקציות המרוכבות 1 - פתרון תרגיל בית מספר 1

(1) יהא $w \in B(0,\alpha/2)$. נתבונן בפונקציה $z \mapsto f(z) - w$ על $B(0,r)$. נשים לב ש-$f(0)=0$ ולכן $|f(0)-w| = |w| < \alpha/2$, ואילו על השפה $|z| = r$ מתקיים $|f(z)| \geq \alpha$ ולכן $|f(z)-w| \geq |f(z)| - |w| > \alpha - \alpha/2 = \alpha/2$. מכאן שהמינימום של $|f(z)-w|$ לא מתקבל על השפה, ולכן מעקרון המינימום הפונקציה חייבת להתאפס, כלומר קיים $z \in B(0,r)$ עם $f(z) = w$. זה נכון לכל w כנ"ל, כלומר $B(0,\alpha/2) \subset f(D)$, כנדרש.

(2) (א)

$$\begin{aligned}\cos(\pi a) &= \frac{e^{i\pi a} + e^{-i\pi a}}{2} = \frac{e^{\mp \log(n+\sqrt{n^2}-1)+m\pi i} + e^{\pm \log(n+\sqrt{n^2}-1)-m\pi i}}{2} \\ &= (-1)^m \frac{(n+\sqrt{n^2-1})^{\mp 1} + (n+\sqrt{n^2-1})^{\pm 1}}{2} = (-1)^m \frac{(n \mp \sqrt{n^2-1}) + (n \pm \sqrt{n^2-1})}{2} \\ &= (-1)^m n\end{aligned}$$

(ב) יהא $z = x+iy$. נבחר $m \in \mathbb{Z}$ קרוב ביותר ל-x, כך ש-$|m-x| \leq \frac{1}{2}$. נסמן $b_n = n + \sqrt{n^2-1}$, $c_n = \frac{1}{\pi}\log(b_n)$. בבירור c_n עולה מונוטונית ו-$c_1 = 0$, ולכן קיים ויחיד n עבורו $c_n \leq |y| < c_{n+1}$. קל לראות שלכל $n \geq 1$ מתקיים $2n-1 \leq b_n < 2n$, ומכאן

$$c_{n+1} - c_n = \frac{\log(b_{n+1}) - \log(b_n)}{\pi} < \frac{b_{n+1}-b_n}{\pi b_n} < \frac{3}{\pi b_n} < \frac{1}{b_1} = 1$$

(וליתר דיוק מתקיים לכל n ש-$c_{n+1} - c_n \leq c_2 - c_1 \approx 0.4192$). בפרט, עבור $n' \in \{n, n+1\}$ עבורו $c_{n'}$ קרוב ביותר ל-$|y|$, נקבל $|c_{n'} - |y|| \leq \frac{c_{n+1}-c_n}{2} < \frac{1}{2}$, ולכן $a = m + \mathrm{sgn}(y) c_{n'} i \in A$ מקיים $|a-z| < \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} < 1$, כנדרש. (והמרחק המקסימלי האמיתי מתקבל למשל עבור $z = \frac{1}{2} + \frac{c_2}{2} i$, והוא בקירוב 0.542).

(3) מכיוון ששתי הפונקציות $z, \frac{1}{\bar{z}}$ רציפות בתחום הגדרתן, ברור כי T רציפה בכל אחד מהתחומים $|z| \leq 1$, $|z| \geq 1$. על השפה המשותפת $|z| = 1$ מתקיים $z = 1\bar{z}$ לכל z, כלומר שתי ההגדרות מסכימות, ולכן T מוגדרת היטב ורציפה גם בשפה. ולכן היא רציפה בכל $\mathbb{C}$. בבדיקת שני התחומים בנפרד נקבל טריוויאלית $|z| \leq 1$ כאשר $|z| \leq 1$ וכן $|\frac{1}{\bar{z}}| = \frac{1}{|z|} \leq 1$ כאשר $|z| \geq 1$, ומכאן $|T(z)| \leq 1$ לכל z. לחסימת $|T(z) - T(w)|$ נפריד לשלושה מקרים:

(א) אם $|z|, |w| \leq 1$, אז פשוט מתקיים $|T(z) - T(w)| = |z-w| \leq |z-w|$ כנדרש.

(ב) אם $|z|, |w| \geq 1$, אז מתקיים $|T(z) - T(w)| = |\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{w}}| = |\frac{w-z}{zw}| = \frac{|z-w|}{|z||w|} \leq |z-w|$ כנדרש.

(ג) אם $|z| < 1 < |w|$ (או להפך), אז קיימת $p \in S^1 \cap [z,w]$ (מרציפות ערך מוחלט, שלאורך הקטע $[z,w]$ מתחיל קטן מ-1 ומסיים גדול ממנו. למעשה p מוגדרת ביחידות). כעת מתקיים $|z|, |p| \leq 1$ וכן $|w|, |p| \geq 1$, ולכן מהמקרים הקודמים נקבל

$$|T(z) - T(w)| \leq |T(z) - T(p)| + |T(p) - T(w)| \leq |z-p| + |p-w| = |z-w|$$

באשר במעבר האחרון השתמשנו בכך ש-p נמצאת ממש בין הנקודות z, w.

(4) (א) המשוואה היא מהצורה $z^4 = w$, באשר $w = -1 + \sqrt{3} i$. הערך המוחלט של w הינו $|w| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$, והארגומנט שלו הוא θ המקיים $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = \frac{w}{|w|} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$, כלומר $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. לכן פתרונות המשוואה הם

$$z = |w|^{1/4} \cos(\tfrac{\theta}{4}) + i\sin(\tfrac{\theta}{4}) = \{\sqrt[4]{2}\cos(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{2} \cdot k) + i\sin(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{2} \cdot k) : k = 0,1,2,3\}$$

עבור $k=0$ נקבל את הפתרון $z_0 = \sqrt[4]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i)$, ושאר הפתרונות מתקבלים ממנו על ידי כפל בחזקה של i.

(ב) זוהי משוואה ריבועית $z^2+2bz+c=0$, עם $b=\sqrt{8}i, c=-6i$, ששורשיה מתקבלים על פי הנוסחה:

$$z_{1,2}=-b\pm\sqrt{b^2-c}=-\sqrt{8}i\pm\sqrt{-8+6i}=-2\sqrt{2}i\pm(1+3i)$$

כלומר שני הפתרונות הם $\{1+(3-2\sqrt{2})i,-1-(3+\sqrt{2})i\}$. במהלך החישוב נדרשנו לחשב את השורש של $-8+6i$. במקרה זה ניתן היה לעשות זאת על ידי ניחוש ובדיקה שהתשובה $1+3i$ אכן מחזירה את המספר הנכון אחרי העלאה בריבוע. באופן כללי יותר, אפשר לקבל את השורש של $x+iy$ לפי הנוסחה

$$\sqrt{x+yi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}}+\operatorname{sgn}(y)\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}i\right).$$

וודאו את נכונות הנוסחה באמצעות העלאה בריבוע.

מאיפה הנוסחה הגיעה? אם נסמן $x+yi=(a+bi)^2$, נקבל $x=a^2-b^2$ ו-$\sqrt{x^2+y^2}=a^2+b^2$, ומתוך ערכים אלה קל לחלץ את $|a|,|b|$, והסימנים נקבעים לפי $y=2ab$.

(ג) נפעיל ערך מוחלט על המשוואה ונקבל $|z|=|\overline{z}|=|z^2|=|z|^2$, ולכן $|z|\in\{0,1\}$. אם $|z|=0$ אזי $z=0$, וזה אכן פתרון של המשוואה. ואילו אם $|z|=1$ אז $\overline{z}=\frac{|z|^2}{z}=\frac{1}{z}$, והמשוואה שקולה לכך ש-$z^3=1$, אשר פתרונותיה הם שורשי היחידה מסדר שלוש $e^{\frac{2\pi k}{3}i}$ עבור $k=0,1,2$, והם אכן כולם פתרונות של המשוואה המקורית. סך הכל קיבלנו ארבעה פתרונות.

(5) נסמן $M=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|}{|a_n|}\geq 0$. יהא $\varepsilon>0$. נסמן $R=\max(M/\varepsilon,1)$. אזי לכל $|z|>R$ מתקיים

$$|g(z)-1|=\left|\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^k}{a_nz^n}\right|=\left|\frac{1}{a_n}\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^{k-n}\right|\leq\frac{1}{|a_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k||z|^{k-n}$$
$$\leq\frac{1}{|a_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|R^{k-n}\leq\frac{1}{|a_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|\frac{1}{R}=\frac{M}{R}\leq\varepsilon$$

ומכאן מקבלים מיידית $\lim_{z\to\infty}g(z)=1$, מהגדרת הגבול, ובשילוב עם $\lim_{z\to\infty}a_nz^n=\infty$ נקבל מחשבון גבולות $\lim_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

(6) **(א)**

$$\lim_{z\to z_0}\frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=f'(z_0)+g'(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{(f\cdot g)(z)-(f\cdot g)(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}g(z)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+f(z_0)\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\lim_{z\to z_0}(z)\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}+f(z_0)\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=g(z_0)f'(z_0)+f(z_0)g'(z_0)$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{(f/g)(z)-(f/g)(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{g(z_0)}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\frac{f(z)}{g(z)g(z_0)}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\frac{1}{g(z_0)}\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}-\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)g(z_0)}\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\frac{f'(z_0)}{g(z_0)}-\frac{f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

(ב)

$$\lim_{z\to z_0}\frac{(g\circ f)(z)-(g\circ f)(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$
$$=\lim_{w\to f(z_0)}\frac{g(w)-g(f(z_0))}{w-f(z_0)}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=g'(f(z_0))f'(z_0)$$

(ג) מהגדרה, מתקיים לכל t, h $\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \frac{u(t+h)-u(t)}{h} + i\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$ (פירוק לחלק ממשי ומדומה). מכיוון שהתכנסות של מרוכבים שקולה להתכנסות חלקים ממשיים ומדומים, נקבל כי מתקיים גם

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(t+h)-u(t)}{h} + i\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h)-v(t)}{h}$$

במובן שהגבול באגף שמאל קיים אם ורק אם שני הגבולות באגף ימין קיימים, ואז יש גם שיוויון. אך קיום הגבולות האלה הוא בדיוק הגזירות של u, v ב-t, והשיוויון בדיוק אומר $f'(t) = u'(t) + iv'(t)$, כנדרש.

(ד) חישוב זהה לחלוטין לחישוב של סעיף (ב), בהחלפת הגבול $z \to z_0$ ב-$t \to s$.

(7) (א) K קומפקטית, בפרט חסומה, כלומר קיים R עבורו $K \subset B(0,R)$, ולכן $U = \mathbb{C}\setminus B(0,R) \subset \mathbb{C}\setminus K$. הקבוצה U עצמה קשירה, ולכן מוכלת כולה ברכיב קשירות אחד V של $\mathbb{C}\setminus K$. מכיוון ש-U אינה חסומה, גם V אינו חסום, ומצד שני כל רכיב קשירות אחר של $\mathbb{C}\setminus K$ חייב להיות זר ל-V, ולכן מוכל ב-$\mathbb{C}\setminus U = B(0,R)$, כלומר חסום. לכן V הוא רכיב הקשירות הלא-חסום היחיד של $\mathbb{C}\setminus K$, כנדרש.

(ב) יהא U רכיב קשירות כנ"ל. תהא $z \in \partial U$. מהגדרת השפה נובע שקיימות סדרות $z_n \to z$ ו-$w_n \to z$ כך ש- $z_n \in U, w_n \notin U$ לכל n. לא ייתכן שמתקיים $[z_n, w_n] \subset \mathbb{C}\setminus K$, שכן אז נקבל שבהכרח z_n, w_n באותו רכיב קשירות של $\mathbb{C}\setminus K$, בסתירה לכך ש-U רכיב קשירות שמכיל את z_n ולא את w_n. לכן קיימת ונבחר $t_n \in [z_n, w_n] \cap K$ (למשל ניתן להגדיר $t_n = \lambda z_n + (1-\lambda)w_n$ עם λ מינימלי עבורו $t_n \in K$; המינימום קיים על סמך היות K סגורה). מכיוון ש-$z_n, w_n \to z$ נקבל שגם בהכרח $t_n \in z$ (מהקמירות של כדורים $B(z,\varepsilon)$), ומכיוון ש-$t_n \in K$ ו-K סגורה, נקבל גם $z = \lim t_n \in K$. הראנו שלכל $z \in \partial U$ מתקיים $z \in K$ – כנדרש.

(8) (א) נגדיר $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$. קל לראות ש-$f$ מונוטונית עולה ממש בתחום $(0,1)$ (לכן חח"ע), ומקיימת $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ ו-$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty$, ולכן $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, ואכן $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ אינה קשירה מסילתית (לא ניתן לקשר בין חצי-המישור העליון וחצי-המישור התחתון בלי לעבור דרך $\mathbb{R}$, ממשפט ערך הביניים לחלק המדומה של המסילה).

(ב) לא. מכיוון ש-f רציפה ו-$[0,1]$ קומפקטי, גם התמונה $\text{Im}(f)$ קומפקטית. מהחח"ע, זוהי מסילה פשוטה (שלא חותכת את עצמה), ולא נסגרת (גם $f(1) \neq f(0)$). בהמשך הקורס נראה מדוע מסילות כאלו אינן יכולות להפריד את המישור לרכיבי קשירות שונים – זוהי טענה אינטואיטיבית לכאורה, אך כלל לא טריוויאלית.

(9) נראה ש-ϕ_{-a} הפכי ל-ϕ_a: ואכן

$$\phi_{-a}(\phi_a(z)) = \frac{\phi_a(z)+a}{1+\overline{a}\phi_a(z)} = \frac{\frac{z-a}{1-\overline{a}z}+a}{1+\overline{a}\frac{z-a}{1-\overline{a}z}} = \frac{(z-a)+a(1-\overline{a}z)}{(1-\overline{a}z)+\overline{a}(z-a)} = \frac{z-|a|^2 z}{1-|a|^2} = z$$

ובדומה להרכבה בכיוון ההפוך. בהצבת $|z|=1$ נקבל

$$|\phi_a(z)| = \left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| = \left|\frac{z-a}{\overline{z}-\overline{a}}\overline{z}\right| = 1$$

כלומר ϕ_a, ϕ_{-a} מעבירות את S^1 לתוך עצמו (ומכיוון שהן הפכיות אחת לשנייה, הן גם הפכיות בצמצום ל-S^1). לכן הן גם שולחות את רכיבי הקשירות של $\mathbb{C}\setminus S^1$, שהם הדיסק הפתוח D והמשלים $\mathbb{C}\setminus\overline{D}$, לאותם רכיבי קשירות. בנוסף, מתקיים $\phi_a(0) = \frac{0-a}{1-\overline{a}\cdot 0} = -a \in D$, ולכן בהכרח $\phi_a(D) = D$ (ולא $\phi(D) = \mathbb{C}\setminus\overline{D}$). ומכאן ש-$\phi_a, \phi_{-a} : D \to D$ הפכיות אחת לשנייה, וחח"ע ועל. הגזירות היא מיידית כי זו פונקציה רציונלית (שאלה 6), והמכנה אינו מתאפס לאף נקודה ב-D.

(10) נתבונן בהעתקה ה-$\mathbb{R}$-לינארית $T_a(x) = ax$. מכיוון ש-$\mathbb{F}$ ממימד סופי, ניתן להתבונן בפולינום המינימלי m_a של T_a. נשים לב שכל גורם אי פריק p של m_a מעל $\mathbb{R}[x]$ בהכרח מקיים ש-$p(T_a)$ היא העתקה סינגולרית, כלומר קיים $0 \neq b \in \mathbb{F}$ עם $p(T_a)(b) = 0$. אך מצד שני $p(T_a)(b) = p(a)\cdot b$, ולכן בהכרח $p(a) = 0$, כלומר $p(T_a) = 0$, כלומר $m_a = p$. מתוך המשפט היסודי של האלגברה, ידוע לנו שכל פולינום אי-פריק ב-$\mathbb{R}[x]$ הוא ממעלה 1 או 2 בלבד. אם ממעלה 1, אז $m_a(x) = x - a$, ובפרט $a \in \mathbb{R}$; אם זה מתקיים לכל $a \in \mathbb{F}$, אז $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, כנדרש. אחרת, קיים $a \in \mathbb{F}\setminus\mathbb{R}$ ולכל a כזה m_a הוא ממעלה 2, ולכן קיימים מרוכבים צמודים $\lambda, \overline{\lambda}$ עם $m_a(x) = x^2+bx+c = (x-\lambda)(x-\overline{\lambda})$. נגדיר $\phi(1) = 1, \phi(a) = \lambda$, ונרחיב את ϕ להעתקה $\mathbb{R}$ לינארית $\phi : \text{Sp}\{1,a\} \to \mathbb{C}$ (שהיא בבירור איזומורפיזם לינארי). מכיוון ש-a שורש של פולינום ריבועי אי-פריק מעל $\mathbb{R}$, נקבל ש-$\widetilde{\mathbb{F}} = \text{Sp}\{1,a\}$ הוא בעצמו שדה ומתקיים $\phi(a^2) = \phi(-ba-c) = -b\lambda - c = \lambda^2$, ומכאן קל לראות ש-$\phi : \widetilde{\mathbb{F}} \to \mathbb{C}$ הוא למעשה איזומורפיזם של שדות. כעת יש לבדוק רק שאכן $\mathbb{F} = \widetilde{\mathbb{F}}$, ואז נקבל ש-$\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

יהא $d \in \mathbb{F}$. אם $d \in \mathbb{R}$ ברור כי $d \in \widetilde{\mathbb{F}}$. אחרת, m_d הוא ממעלה 2, ומתקיים $m_d(x) = (x-\mu)(x-\overline{\mu})$ עבור $\mu, \overline{\mu} \in \mathbb{C}$. על ידי הפעלת ϕ^{-1}, שפועל כזהות על $\mathbb{R}[x]$, נקבל גם $m_d(x) = (x-\phi^{-1}(\mu))(x-\phi^{-1}(\overline{\mu})) \in \mathbb{F}[x]$. אך מתקיים $m_d(d) = 0$, ומכיוון ש-$\mathbb{F}$ שדה זה גורר $d \in \{\phi^{-1}(\mu), \phi^{-1}(\overline{\mu})\} \subset \phi^{-1}(\mathbb{C}) = \widetilde{\mathbb{F}}$, כנדרש.

(11) (א) אכן מתקיים $\overline{\frac{z+\overline{z}}{2}} = \frac{\overline{z}+\overline{\overline{z}}}{2} = \frac{\overline{z}+z}{2}$ כלומר זהו ממשי, ו-$\overline{\frac{z-\overline{z}}{2}} = \frac{\overline{z}-\overline{\overline{z}}}{2} = -\frac{z-\overline{z}}{2}$ כלומר זהו מדומה טהור. עבור יחידות, אם $z = a+b$ סכום של ממשי ומדומה טהור, אז $\overline{z} = \overline{a+b} = \overline{a}+\overline{b} = a-b$, ומכאן $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{z-\overline{z}}{2}$.

(ב) לפי (v), יהא z עם $z \neq \overline{z}$, מהסעיף הקודם $w = \frac{z-\overline{z}}{2} \neq 0$ מדומה טהור. נראה ש-w^2 ממשי שלילי, ואכן $w^2 = -w\overline{w} < 0$ לפי אקסיומה (iv). בממשיים ניתן לפתור $x = \sqrt{-w^2}$, ולכן נקבל ש- $i = w/x \in \mathbb{F}$ מקיים $i^2 = w^2/x^2 = -1$, כנדרש.

(ג) יהא i מהסעיף הקודם. גם $1, \sqrt{2} \in \mathbb{F}$ (כי הם ממשיים), ולכן $\zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{F}$, וכשנעלה בריבוע נקבל $\zeta^2 = \frac{1+2i+i^2}{2} = i$, ולכן $\zeta^4 = i^2 = -1$, כנדרש.

(ד) כפליות: $|zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{zw\overline{z}\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{|z|^2|w|^2} = |z||w|$ כנדרש. אי-שיוויון המשולש $|z+w| \leq |z|+|w|$, שקול, באמצעות העלאה בריבוע, ל-

$$\begin{aligned}
& (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = |z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2 = |z|^2+|w|^2+2|z||w| = z\overline{z}+w\overline{w}+2|z||w| \\
\iff \quad & z\overline{w}+w\overline{z} \leq 2|z||w| \Leftarrow |z\overline{w}+w\overline{z}| \leq 2|z||w| \\
\iff \quad & (z\overline{w}+w\overline{z})(w\overline{z}+z\overline{w}) = |z\overline{w}+w\overline{z}|^2 \leq 4|z|^2|w|^2 = 4z\overline{z}w\overline{w} \\
\iff \quad & z^2\overline{w}^2+w^2\overline{z}^2 \leq 2z\overline{z}w\overline{w} \iff (z\overline{w}-w\overline{z})^2 \leq 0
\end{aligned}$$

ואכן, האי-שיוויון האחרון נובע מכך ש-$y = z\overline{w}-w\overline{z}$ הוא מדומה טהור, ולכן כפי שראינו ב-(ב), נובע מכך ש-$y^2 \leq 0$.

(ה) הבדיקה של רוב התכונות מיידית לחלוטין מתכונות השחלוף. נבדוק רק את (iv) :

$$A\overline{A} = AA^T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

ומטריצה זו מתאימה לממשי a^2+b^2, שאכן חיובי לכל $A \neq 0$ (כלומר $(a,b) \neq (0,0)$). הקשר לשאלה 10, הוא שמטריצות אלה הן בדיוק המטריצות המייצגות של פעולת הכפל $x \mapsto z \cdot x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ עבור $z = a+bi \in \mathbb{C}$, כמ"ו מעל $\mathbb{R}$ עם הבסיס $\{1, i\}$.