תורת הפונקציות המרוכבות 1 - תרגיל בית מספר 2
תאריך הגשה: 26.7.2018

השאלות המסומנות בכוכבית (*) אינן להגשה, אך לא בהכרח קשות מהרגיל.

(1) תזכורת: עבור $z \neq 0$ ו-$\alpha \in \mathbb{C}$, קבוצת הערכים האפשריים של z^α היא הקבוצה $\{e^{\alpha w} : e^w = z\}$.
(א) תארו במפורש את הערכים האפשריים של 1^α. מה גודל הקבוצה, וכיצד הוא תלוי ב-α?
(ב) תארו את הערכים האפשריים של i^i, והראו שכולם ממשיים.

(2) תזכורת: הסימון $\log(z)$ מתייחס לקבוצת כל הלוגריתמים האפשריים של z, ו-$\mathrm{Log}(z)$ הוא הענף הראשי. פעולות על קבוצות מבוצעות על ידי ביצוע הפעולה על כל איברי הקבוצה. בנוסף, נזהה בין המספר z והסינגלטון $\{z\}$. הוכיחו או הפריכו:
(א) $\log(e^z) = z$
(ב) $e^{\log z} = z$
(ג) $\log(z^2) = 2\log(z)$
(ד) $\mathrm{Log}(z^2) = 2\,\mathrm{Log}(z)$ עבור $z \in \mathbb{C} \setminus ((\infty, 0] \cup i\mathbb{R})$.
(ה) $\log(1/z) = -\log(z)$
(ו) $\mathrm{Log}(1/z) = -\mathrm{Log}(1/z)$
(ז) $z^{w+1} = z \cdot z^w$

(3) יהא U תחום קמור וחסום, ותהי $z_0 \in U$. תהא $f_n : U \to \mathbb{C}$ סדרת פונקציות גזירות, כך שהסדרה $f_n(z_0)$ מתכנסת, וכן סדרת הנגזרות f_n' מתכנסת במ"ש על U לפונקציה g, כלומר, לכל $\varepsilon > 0$ קיים N עבורו לכל $n > N$ ו-$z \in U$ מתקיים $|f_n'(z) - g(z)| < \varepsilon$. הוכיחו כי הסדרה f_n עצמה מתכנסת במ"ש על U לפונקציה גזירה $f : U \to \mathbb{C}$, וכן מתקיים $f' = g$. הדרכה:
(א) הראו שלכל $\varepsilon > 0$, עבור m, n גדולים מספיק, מתקיים $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon|z - z_0| + \varepsilon$. השתמשו בהתכנסות של $f_n(z_0)$, בהתכנסות במ"ש של f_n', ובלמה הלוקאלית-גלובאלית לקטעים עבור $f_n - f_m$.
(ב) הסיקו מהסעיף הקודם שקיימת פונקציה $f : U \to \mathbb{C}$ ש-f_n מתכנסת אליה במ"ש ב-U (התוצאה הנ"ל היא למעשה קריטריון קושי להתכנסות במ"ש). בדומה לסעיף הקודם, הוכיחו כי $\frac{f_n(z)-f_n(w)}{z-w}$ מתכנס ל-$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ לכל $U \ni w \neq z$, ושההתכנסות הזו היא במידה שווה (בו זמנית לכל הזוגות $w \neq z$).
(ג) באמצעות הסעיף הקודם הוכיחו כי $\lim_{z\to w} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = g(w)$ לכל $w \in U$, והסיקו את הנדרש.

(4) (א) יהא $0 < R < 1$. על ידי שימוש בנוסחה המפורסמת לטור גיאומטרי, הוכיחו כי סדרת הפונקציות $f_n(w) = 1 + w + \cdots + w^n$ מתכנסת במ"ש ב-$B_R(0)$ לפונקציה $\frac{1}{1-w}$.
(ב) ע"י הצבה $z = 1 - w$ הוכיחו שקיימת סדרת פולינומים $P_n(z)$ כך ש-$P_n(z) \to \frac{1}{z}$ במ"ש ב-$B_R(1)$. הסיקו באמצעות השאלה הקודמת שב-$B_R(1)$ יש ל-$\frac{1}{z}$ פונקציה קדומה.

(5) תהנא w_1, w_2 נקודות ב-$\mathbb{C}$, ותהא f פונקציה מרוכבת רציפה המוגדרת על הקטע $[w_1, w_2]$. נתבונן בנוסחת החלפת המשתנה הבאה:

$$\int_{[w_1,w_2]} f(z)\,dz = (w_2 - w_1)\int_{[0,1]} f(w_1 + t \cdot (w_2 - w_1))\,dt$$

הראו שסכומי רימן עבור האינטגרל באגף ימין מתאימים באופן טבעי לסכומי רימן עבור האינטגרל באגף שמאל. הסיקו שסכומי רימן באגף שמאל מתכנסים אם ורק אם זה נכון באגף ימין.

(6) חשבו את האינטגרל המסלולי $\int_\gamma f(z)dz$ לאורך המסילה הפוליגונאלית γ.
(א) $f(z) = 3z^2 - z - 1$, לאורך $\gamma_1 = [0, 1, 1+i]$ וגם לאורך $\gamma_2 = [0, i, 1+i]$.
(ב) $\gamma = [-2+i, -2-i, 4-i, 4+i, -2+i] \quad , \quad f(z) = \frac{8}{(z^2-1)(z^2-9)}$

הדרכה: הזכרו בטכניקות מחדו"א 2 לחישוב אינטגרלים של פונקציות רציונליות, והשתמשו בהם על מנת לעבור לאינטגרלים מרוכבים שלמדנו.

(7) נתבונן בספירת היחידה $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ (עם רדיוס 1, מרכז בראשית $(0,0,0)$). נשכן את המישור המרוכב במרחב לפי $z = x+iy \mapsto (x,y,0)$ ונתבונן בהטלה הסטריאוגרפית $S^2 \to \widehat{\mathbb{C}} : \hat{z} \mapsto z$, באשר $\hat{z}$ מוגדרת להיות נקודת החיתוך השנייה של הספירה עם הישר $[N,z]$, עבור $N=(0,0,1)$ הקוטב הצפוני. בקואורדינטות, מתקיים $\hat{z} = \frac{1}{1+|z|^2}(2x, 2y, |z|^2-1)$. (הערה: בתרגול תיארו ספירה שונה קצת. נסו לחשוב מה הקשר ביניהן.)

(א) (*) ודאו את נכונות הנוסחות הבאות למרחק ספרי: לכל $z, w \in \mathbb{C}$,

$$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z,w) = ||\hat{z}-\hat{w}||_{\mathbb{R}^3} = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|)^2}}, \quad d_{\widehat{\mathbb{C}}}(\tfrac{1}{z},\tfrac{1}{w}) = d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z,w)$$

(ב) עבור פונקציה $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$, הנגזרת הספירית ב-$z \in U$ מוגדרת בתור הגבול $f^\sharp(z) = \lim_{h\to 0} \frac{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f(z+h), f(z))}{|h|}$, אם הוא קיים. באמצעות הנוסחה מסעיף (א), הראו שאם $f(z) \neq \infty$, אז אכן $f^\sharp(z) = \frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$.

(ג) הסבירו מדוע מתקיים $(1/f)^\sharp = f^\sharp$ ישירות מהגדרת הנגזרת הספירית ומסעיף (א).

(8) לכל מטריצה הפיכה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ נתאים פונקציה $T_A : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ המוגדרת לפי $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. אם $c \neq 0$, נגדיר גם $T_A(-\frac{d}{c}) = \infty$, ו-$T_A(\infty) = \frac{a}{c}$; אם $c = 0$, מגדירים $T_A(\infty) = \infty$. פונקציות אלו נקראות <u>העתקות מביוס</u>.

(א) הוכיחו כי T_A רציפה על כל $\widehat{\mathbb{C}}$. (ודאו במיוחד את הרציפות ב-∞ וב-$T_A^{-1}(\infty)$!)

(ב) הראו כי הרכבת העתקת מביוס מתאימה למכפלת מטריצות: לכל שתי מטריצות A, B מתקיים $T_A \circ T_B = T_{AB}$. הסיקו בפרט שכל העתקת מביוס היא הפיכה, ושההופכית שלה היא גם העתקת מביוס.

(ג) הראו כי כל העתקת מביוס ניתנת להצגה כהרכבה של העתקות מביוס מהסוגים הבאים:

$$z \mapsto z + c \quad (c \in \mathbb{C}) \quad ; \quad z \mapsto \lambda z \quad (\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}) \quad ; \quad z \mapsto \tfrac{1}{z}.$$

(ד) הראו כי לכל 3 נקודות שונות בזוגות $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, קיימת ויחידה העתקת מביוס T_A המקיימת

$$T_A(0) = w_1, \quad T_A(1) = w_2, \quad T_A(\infty) = w_3.$$

(ה) הסיקו מהסעיף הקודם את ההכללה: לכל $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ שונים בזוגות ולכל $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ שונים בזוגות, קיימת ויחידה העתקת מביוס T_A המקיימת $T_A(z_i) = w_i$ לכל $i = 1,2,3$.

(ו) הראו כי לכל $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ עם $ad-bc \neq 0$ ולכל $t \in \mathbb{R}$ חיובי, קבוצת הנקודות

$$C = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{C}} : \left| \frac{az+b}{cz+d} \right| = t \right\}$$

מהווה ישר או מעגל במישור.

(*) ודאו כי כל ישר או מעגל ניתן לייצוג בצורה זו. מתי המשוואה מגדירה ישר, ומתי מעגל?

(ז) הסיקו מסעיפים (ב) ו-(ו) שהעתקות מביוס תמיד מעבירות ישרים ומעגלים ב-$\widehat{\mathbb{C}}$ לישרים או למעגלים.

(*) מצאו תנאי מספיק והכרחי לכך שהתמונה של ישר או מעגל C תחת העתקת מביוס T_A תהיה דווקא ישר.

(9) עבור רביעיית נקודות $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ שונות בזוגות, <u>היחס הכפול</u> ביניהן מוגדר בתור

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] := \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}.$$

(א) (*) ודאו את הזהויות $[z_3, z_4; z_1, z_2] = [z_1, z_2; z_3, z_4] = [z_1, z_2; z_4, z_3]^{-1} = [z_2, z_1; z_3, z_4]^{-1}$.

(ב) חשבו את היחסים הכפולים הבאים:

$$[1, -1; i, -i] \quad , \quad [1, 2i; -1, 3i].$$

(ג) הראו כי לכל $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ שונים בזוגות, ההעתקה $z \mapsto [z_1, z_2; z_3, z]$ היא העתקת מביוס. הסיקו שניתן להמשיך אותה ברציפות (ב-$\widehat{\mathbb{C}}$) גם ל-$z = z_1, z_2, z_3, \infty$. לאן נקודות אלה עוברות תחת ההעתקה?

(ד) (*) הראו כי העתקות מביוס משמרות את היחס הכפול, כלומר, לכל $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ שונים בזוגות ולכל העתקת מביוס T_A, מתקיים $[T_A(z_1), T_A(z_2); T_A(z_3), T_A(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4]$.

<u>הדרכה:</u> העזרו בשאלה (8ג) על מנת לבדוק את נכונות הטענה רק עבור העתקות מביוס מ-3 הסוגים המיוחדים הללו.

(ה) (*) הראו כי $[0, 1; \infty, z] \in \mathbb{R}$ אם ורק אם $z \in \mathbb{R}$. העזרו בסעיפים קודמים ובשאלות (8ד, 8ז) על מנת להסיק שלכל רביעיית נקודות $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$, מתקיים $[z_1, z_2; z_3, z_4] \in \mathbb{R}$ אם ורק אם ארבע הנקודות כולן על מעגל או ישר אחד.