תורת הפונקציות המרוכבות 1 - פתרון תרגיל בית מספר 2

(1) (א) $e^w = 1 \Rightarrow w = \tau in$, ולכן $1^\alpha = \{e^{\tau i\alpha n} : n \in \mathbb{Z}\}$. אם $\alpha = \frac{p}{q}$ רציונלי מצוצמם, אז קבוצה זו היא בדיוק קבוצת שורשי היחידה מסדר המחלק את q, וגודלה q; אם α אי-רציונלי, אז כל המספרים $e^{\tau i\alpha n}$ שונים זה מזה (כי $\alpha(m-n)$ אף פעם לא שלם), ולכן הקבוצה בת-מנייה.

(ב) $e^w = i \Rightarrow w = (\tau n + \frac{\tau}{4})i$, ולכן

$$i^i = \{e^{(n+1/4)\tau i^2} : n \in \mathbb{Z}\} = \{e^{-(n+1/4)\tau} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

כל הערכים האלה אכן ממשיים, שכן הם אקספוננטים של ממשיים.
''סיבה'' לכך ש-i^i ממשי ניתן לראות בכך שהוא אינווריאנטי להצמדה, ואכן $\overline{i^i} = (\bar{i})^{\bar{i}} = (1/i)^{-i} = i^i$.

(2) (א) $\log(e^z) = z$ – לא נכון, ואפילו לא הגיוני - אגף ימין הוא סינגלטון, בעודשאגף שמאל הוא תמיד קבוצה בת מנייה. הזהות הנכונה היא $\log(e^z) = \{z + \tau in : n \in \mathbb{Z}\}$.

(ב) $e^{\log z} = z$ – נכון. זו למעשה ההגדרה של $\log$.

(ג) $\log(z^2) = 2\log(z)$ – לא נכון: אגף שמאל מכיל איברים שנבדלים זה מזה בכפולות שלמות של τi, בעוד שבאגף ימין האיברים נבדלים זה מזה בכפולות שלמות של $2\tau i$. הנוסחה הנכונה היא $\log(z^2) = 2\log(z) \cup 2\log(-z)$.

(ד) $\mathrm{Log}(z^2) = 2\,\mathrm{Log}(z)$ עבור $z \in \mathbb{C} \setminus ((\infty, 0] \cup i\mathbb{R})$: לא נכון, למשל לכל z בתחום עם $\Re(z) < 0$, נקבל ש-$|\operatorname{Im}\mathrm{Log}(z)| > \frac{\tau}{4}$, ולכן $|\operatorname{Im}(2\,\mathrm{Log}(z))| > \frac{\tau}{2}$. אך זה כמובן לא ערך אפשרי של $|\operatorname{Im}\mathrm{Log}(z^2)|$. הנוסחה כן תהיה נכונה עבור כל z עם $\Re(z) > 0$.

(ה) $\log(1/z) = -\log(z)$ – הנוסחה נכונה, שכן

$$w \in log(1/z) \iff e^w = 1/z \iff e^{-w} = z \iff -w \in \log(z) \iff w \in -\log(z).$$

(ו) $\mathrm{Log}(1/z) = -\mathrm{Log}(z)$ – נוסחה זו נכונה – מהסעיף הקודם, אנחנו רואים ש- $-\mathrm{Log}(z) \in -\log(z)$ הוא בחירה אפשרית של $\log(1/z)$, ומכיוון שהוא מקיים $|\operatorname{Im}(-\mathrm{Log}(z))| = |\operatorname{Im}(\mathrm{Log}(z))| < \frac{\tau}{2}$, זה בהכרח הענף הראשי.

(ז) $z^{w+1} = z \cdot z^w$ – הנוסחה נכונה:

$$z^{w+1} = \{e^{\alpha(w+1)} : e^\alpha = z\} = \{e^{\alpha w}e^\alpha : e^\alpha = z\} = z \cdot \{e^{\alpha w} : e^\alpha = z\} = z \cdot z^w$$

(3) (א) מכיוון ש-$f_n(z_0)$ מתכנסת, החל מ-N_0 כלשהו, מתקיים $|f_n(z_0) - f_m(z_0)| < \varepsilon$ לכל $m, n > N_0$. מכיוון ש-f'_n מתכנסת במ''ש ב-U, החל מ-N_1 מתקיים $|f'_n(w) - f'_m(w)| < \varepsilon$ לכל $n, m > N_1$ ולכל $w \in U$. בפרט זה מתקיים לכל $w \in [z_0, z]$, מקמירות U, ולכן מהלמה הלוקאלית-גלובאלית לקטעים, נקבל

$$|(f_n(z) - f_m(z)) - (f_n(z_0) - f_m(z_0))| < \varepsilon|z - z_0|$$

לכל $n, m > N_1$ ולכל $z \in U$. כעת מאי שיוויון משולש נקבל שלכל $m, n > N = \max(N_0, N_1)$ ולכל $z \in U$ מתקיים

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le |(f_n(z) - f_m(z)) - (f_n(z_0) - f_m(z_0))| + |f_n(z_0) - f_m(z_0)| < \varepsilon|z - z_0| + \varepsilon$$

כנדרש.

(ב) אכן, מכיוון ש-U חסומה, קיים R כך ש-$U \subset B(z_0, R-1)$, ואז מסעיף הקודם נקבל עבור אותם m, n ש-$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon R$ לכל $z \in U$, וזה בדיוק קריטריון קושי להתכנסות במ''ש. (בכל z בנפרד זה קריטריון קושי להתכנסות נקודתית, לכן יש גבול נקודתי f, ואז הוא גם גבול במ''ש כי $|f_n(z) - f(z)| \le \overline{\lim}|f_n(z) - f_m(z)| \le \varepsilon$ לכל n מספיק גדול ולכל $z \in U$.) כפי שראינו בסעיף הקודם (כשנחליף את z_0 ב-w), לכל $m, n > N_1$ מתקיים $|f'_n - f'_m| < \varepsilon$ בכל U ולכן $|(f_n(z) - f_m(z)) - (f_n(w) - f_m(w))| < \varepsilon|z - w|$ לכל $z \neq w \in U$, כלומר

$$\left|\frac{f_n(z) - f_n(w)}{z - w} - \frac{f_m(z) - f_m(w)}{z - w}\right| < \varepsilon$$

לכל $z,w\in U$. יש התכנסות נקודתית $\frac{f_n(z)-f_n(w)}{z-w}\to\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$, וממנה נקבל שגם

$$\left|\frac{f_n(z)-f_n(w)}{z-w}-\frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right|\le\varepsilon$$

לכל $z\neq w\in U$ ולכל $n>N_1$, וזו ההתכנסות במ"ש הנדרשת.

(ג) יהא $\varepsilon>0$. מתוך $f_n'(w)\to g(w)$ נקבל שהחל מ-N_1 מתקיים $|f_n'(w)-g(w)|<\frac{\varepsilon}{3}$ לכל $n>N_1$, ומתוך הסעיף הקודם נקבל שלכל $n>N_2$ מתקיים $|\frac{f_n(z)-f_n(w)}{z-w}-\frac{f(z)-f(w)}{z-w}|<\frac{\varepsilon}{3}$ לכל $z\neq w\in U$. נבחר $n>N_1,N_2$ כלשהו. מגזירות f_n נקבל שקיים δ כך שלכל $z\in B(w,\delta)$ מתקיים $|\frac{f_n(z)-f_n(w)}{z-w}-f_n'(w)|<\frac{\varepsilon}{3}$. בסה"כ נקבל שלכל $z\in B(w,\delta)$ מתקיים

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right| &\le \left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-\frac{f_n(z)-f_n(w)}{z-w}\right|+\left|\frac{f_n(z)-f_n(w)}{z-w}-f_n'(w)\right|+|f_n'(w)-g(w)|\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

ומכאן $\lim_{z\to w}\frac{f(z)-f(w)}{z-w}=g(w)$, כלומר f גזירה ומתקיים $f'(w)=g(w)$, כנדרש.

(4) (א) מתקיים $f_n(w)=\frac{1-w^{n+1}}{1-w}$, ולכן $|f_n(w)-\frac{1}{1-w}|=|\frac{-w^{n+1}}{1-w}|\le\frac{R^{n+1}}{1-R}$ לכל $|w|\le R$. היות ש-$R<1$ נקבל $\frac{R^{n+1}}{1-R}\to 0$ כאשר $n\to\infty$, וזו התכנסות במ"ש על פי הגדרה.

(ב) נגדיר פולינום $P_n(z)=f_n(1-z)$, ומהחישוב בסעיף הקודם נקבל שוב ש-$|P_n(z)-\frac{1}{z}|<\frac{R^{n+1}}{1-R}\to 0$ לכל $z\in B(1,R)$. לכל n נגדיר את Q_n בתור הפולינום היחיד עבורו $Q_n'=P_n$ וכן $Q_n(1)=0$. כעת סדרת הפולינומים Q_n מקיימת את הנחות שאלה 3, ולכן קיים לה גבול במ"ש $Q(z)$ שמקיים $Q'(z)=\lim P_n(z)=\frac{1}{z}$ ב-$B(1,R)$, כנדרש.

(5) תהא $0=t_0,t_1,\ldots,t_n=1$ חלוקה של [0,1] עם פרמטר Δ, ויהיו $\tau_i\in[t_i,t_{i+1}]$ נקודות בחלוקה. נסמן $z_i=w_1+t_i(w_2-w_1)$, $\zeta_i=w_1+\tau_i(w_2-w_1)$. אז סכום רימן המתאים לאינטגרל באגף ימין הוא

$$S(f(w_1+t(w_2-w_1)),\{t_i\},\{\tau_i\})=\sum_{i=0}^{n-1}f(\zeta_i)(t_{i+1}-t_i)$$

ומכיוון שמתקיים $(w_2-w_1)(t_{i+1}-t_i)=z_{i+1}-z_i$ לכל i, נקבל

$$(w_2-w_1)S(f(w_1+t(w_2-w_1)),\{t_i\},\{\tau_i\})=\sum_{i=0}^{n-1}f(\zeta_i)(z_{i+1}-z_i)=S(f,\{z_i\},\{\zeta_i\})$$

באשר אגף ימין בביטוי האחרון הוא סכום רימן המתאים לאינטגרל של f לאורך $[w_1,w_2]$, עבור חלוקה עם פרמטר $\Delta|w_2-w_1|$. לכן כאשר $\Delta\to 0$, שני הפרמטרים שואפים לאפס, ושני האגפים שואפים לאינטגרלים המבוקשים, ולכן הם שווים.

(6) (א) ל-f יש קדומה גלובאלית $g(z)=z^3-\frac{1}{2}z^2-z$. לכן

$$\int_{\gamma_1}f(z)dz=\int_{\gamma_2}f(z)dz=g(1+i)-g(0)=(1+i)^3-\frac{(1+i)^2}{2}-(1+i)=-3$$

(ב)

$$f(z)=\frac{8}{(z^2-1)(z^2-9)}=\frac{1}{z^2-9}-\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z+1}\right)$$

מבין המספרים $\pm1,\pm3$, המלבן γ מקיף פעם אחת נגד כיוון השעון את כולם מלבד -3, אותו הוא לא מקיף כלל. לכן

$$\int_\gamma f(z)dz=\tau i\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot 1-\frac{1}{6}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{\tau i}{6}$$

(7) (א) נסמן $z=x_1+iy_1,w=x_2+iy_2$ וכן $r_1=|z|,r_2=|w|$. אזי

$$|z-w|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)+(y_1^2+y_2^2-2y_1y_2)=r_1^2+r_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2)$$

$$\begin{aligned}
\hat{z}-\hat{w} &= \frac{1}{(1+r_1^2)(1+r_2^2)}(2(x_1(1+r_2^2)-x_2(1+r_1^2)),2(y_1(1+r_2^2)-y_2(1+r_1^2)),\\
&\quad (r_1^2-1)(1+r_2^2)-(r_2^2-1)(1+r_1^2))\\
&= \frac{2}{(1+r_1^2)(1+r_2^2)}(x_1(1+r_2^2)-x_2(1+r_1^2),y_1(1+r_2^2)-y_2(1+r_1^2),r_1^2-r_2^2)\\
\Rightarrow ||\hat{z}-\hat{w}||^2 &= \frac{4}{(1+r_1^2)^2(1+r_2^2)^2}((x_1^2(1+r_2^2)^2+x_2^2(1+r_1^2)^2-2x_1x_2(1+r_1^2)(1+r_2^2))+\\
&\quad (y_1^2(1+r_2^2)^2+y_2^2(1+r_1^2)^2-2y_1y_2(1+r_1^2)(1+r_2^2))+(r_1^2-r_2^2)^2)\\
&= \frac{4}{(1+r_1^2)(1+r_2^2)}\left(\frac{(r_1^2(1+r_2^2)^2+r_2^2(1+r_1^2)^2+(r_1^2-r_2^2)^2}{(1+r_1^2)(1+r_2^2)}-2(x_1x_2+y_1y_2)\right)\\
&= \frac{4}{(1+r_1^2)(1+r_2^2)}(r_1^2+r_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2))=\frac{4|z-w|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}
\end{aligned}$$

כנדרש. נציב $1/z,1/w$ ונקבל

$$d_{\widehat{\mathbb{C}}}(\tfrac{1}{z},\tfrac{1}{w})=\frac{2|\frac{1}{z}-\frac{1}{w}|}{\sqrt{(1+|1/z|^2)(1+|1/w|^2)}}=\frac{2|\frac{w-z}{zw}|}{\sqrt{\frac{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}{|z|^2|w|^2}}}=\frac{2|w-z|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}}=d_{\widehat{\mathbb{C}}}(z,w)$$

(ב) מהנוסחה בסעיף (א) נובע שלכל $z\in\mathbb{C}$, מתקיים

$$\lim_{w\to z}\frac{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(w,z)}{|w-z|}=\lim_{w\to z}\frac{2}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}=\frac{2}{1+|z|^2}$$

היות ש-$f(z+h)\to f(z)$ כאשר $h\to 0$, נקבל

$$\begin{aligned}
f^\sharp(z) &= \lim_{h\to 0}\frac{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f(z+h),f(z))}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f(z+h),f(z))}{|f(z+h)-f(z)|}\cdot\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f(z+h),f(z))}{|f(z+h)-f(z)|}\left|\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|=\frac{2}{1+|f(z)|^2}|f'(z)|=\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}
\end{aligned}$$

כנדרש.

(ג) לפי סעיף (א), לכל z,h מתקיים $d_{\widehat{\mathbb{C}}}(f(z+h),f(z))=d_{\widehat{\mathbb{C}}}(1/f(z+h),1/f(z))$. כשנחלק את שני האגפים ב-$|h|$ ונשאיף $h\to 0$, הזהות תהפוך בדיוק ל-$(1/f)^\sharp(z)=f^\sharp(z)$, כנדרש.

(8) (א) הרציפות ברורה לכל $z\neq\infty,-d/c$, שכן זוהי מנה של פונקציות רציפות (לינאריות), ולכן רציפות כל עוד המכנה לא מתאפס. אם $c=0$ אז צריך לבדוק רק באינסוף. מכיוון שהמטריצה הפיכה, נקבל $a,d\neq 0$, ולכן

$$\lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{d}=\lim_{z\to\infty}\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=\infty=T_A(\infty)$$

כנדרש. אם $c\neq 0$, אז

$$\lim_{z\to\infty}\frac{az+b}{cz+d}=\lim_{z\to\infty}\frac{a+b/z}{c+d/z}=\frac{a}{c}=T_A(\infty)$$

$$\lim_{z\to -d/c}\frac{az+b}{cz+d}=\lim_{z\to -d/c}\left(\frac{-ad+bc}{c^2(z+d/c)}+\frac{a}{c}\right)=\infty=T_A(-d/c)$$

כנדרש.

(ב) נסמן $B=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$, אזי $AB=\begin{pmatrix}a\alpha+b\gamma&a\beta+b\delta\\c\alpha+d\gamma&c\beta+d\delta\end{pmatrix}$, ומתקיים

$$\begin{aligned}
T_A\circ T_B(z)=T_A(T_B(z))=T_A\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)&=\frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d}\\
&=\frac{a(\alpha z+\beta)+b(\gamma z+\delta)}{c(\alpha z+\beta)+d(\gamma z+\delta)}=\frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)}=T_{AB}(z)
\end{aligned}$$

הנוסחות תקפות פרט למספר סופי של ערכים המערבים את אינסוף; ואפשר להסיק את השוויון ביתר הערכים מתוך העובדה ששני האגפים הם פונקציות רציפות של $\widehat{\mathbb{C}}$. כעת מכיוון ש-$T_I(z)=\frac{1\cdot z+0}{0\cdot z+1}=z$ היא העתקת

הזהות, נקבל ש-$T_A \circ T_{A^{-1}} = T_{A^{-1}} \circ T_A = T_I$, כלומר $T_{A^{-1}}$ היא הופכית ל-T_A והעתקת מביוס, כנדרש. קל לראות שהיא גם שקולה להעתקה $z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$.

(ג) אם $c = 0$, אז $z \mapsto \frac{az+b}{d}$ היא ההרכבה $T_2 \circ T_1$ עבור $T_1(z) = \frac{a}{d}z, T_2(z) = z + \frac{b}{d}$. עבור $c \neq 0$, נקבל $T = T_5 \circ T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1$ עבור

$$T_1(z) = cz,\ T_2(z) = z + d,\ T_3(z) = 1/z,\ T_4(z) = \frac{bc-ad}{c}z,\ T_5(z) = z + \frac{a}{c},$$

ואכן ההרכבה היא

$$z \mapsto cz \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz+d} \mapsto \frac{bc-ad}{c(cz+d)} \mapsto \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{az+b}{cz+d}.$$

(ד) נשים לב כי התנאים הללו שקולים לכך ש- $\frac{b}{d} = w_1,\ \frac{a}{c} = w_3,\ \frac{a+b}{c+d} = w_2$, או אחרי העברת אגפים $b - w_1 \cdot d = a - w_3 \cdot c = (a+b) - w_2 \cdot (c+d) = 0$. קל לראות שעבור $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ שונים בזוגות, אלו שלושה תנאים לינאריים בת"ל ב-a, b, c, d, ולכן קיים להם פתרון שאינו כולו אפסים, והפתרון הזה יחיד עד כדי כפל בקבוע; מכיוון שמטריצות $A, \lambda A$ הנבדלות בכפל בסקלאר מגדירות את אותה העתקת מביוס, העתקת המביוס המתאימה מוגדרת ביחידות. צריך לבדוק בנוסף שפתרון זה מקיים $ad - bc \neq 0$, וזה שוב נובע מכך שה-w_i היו שונים בזוגות. (צריך עקרונית גם לבדוק את המקרים בהם חלק מה-w_i הם באינסוף.)

(ה) תהא T_A העתקה השולחת את $0, 1, \infty$ ל-w_1, w_2, w_3, על סמך הסעיף הקודם. נשים לב שההעתקה T_B שולחת את $0, 1, \infty$ ל-z_1, z_2, z_3 אם ורק אם $T_C = T_A \circ T_{B^{-1}}$ שולחת את z_i ל-w_i, ולהפך, אפשר לייצר את T_B מתוך T_C לפי $T_B = T_{C^{-1}} \circ T_A$. ההתאמות האלו בין T_B ל-T_C הופכיות אחת לשנייה, ולכן הקיום והיחידות של T_C נובע מתוך הקיום והיחידות של T_B – אשר הוכח בסעיף הקודם.

(ו) נעביר אגפים ונעלה בריבוע:

$$\begin{aligned} z \in C &\iff |az+b|^2 = t^2|cz+d|^2 \iff (az+b)(\overline{az}+\overline{b}) - t^2(cz+d)(\overline{cz}+\overline{d}) = 0 \\ &\iff (|a|^2 - t^2|c|^2)|z|^2 + \Re(2(a\overline{b} - t^2c\overline{d})z) + (|b|^2 - t^2|d|^2) = 0 \end{aligned}$$

ונשים לב שבקואורדינטות קרטזיות $z = x + yi \leftrightarrow (x, y)$ מתקיים $|z|^2 = x^2 + y^2$, ועבור הקבוע $\gamma = 2(a\overline{b} - t^2c\overline{d}) = \gamma_x + \gamma_y i \in \mathbb{C}$ מתקיים $\Re(\gamma z) = \gamma_x x - \gamma_y y$, פונקציה לינארית ב-$x, y$.
אם כן, קיבלנו שהמשוואה הנ"ל היא משוואת מעגל אם המקדם $|a|^2 - t^2|c|^2 \neq 0$, או משוואת ישר אם $|a|^2 = t^2|c|^2$ ו-$\gamma \neq 0$ – וקל לראות שלא ייתכן $|a|^2 - t^2|c|^2 = \gamma = 0$ וגם $ad - bc \neq 0$.
קיבלנו ש-C הוא ישר אם ורק אם $t = |a|/|c|$. קל לראות שתנאי זה גם שקול לכך ש-$\infty \in C$. אפשר גם לנסח את התנאי המקורי בתור $\frac{|z+b/a|}{|z+d/c|} = t\frac{|c|}{|a|}$, שזה תנאי על היחס בין המרחקים מ-z לנקודות $w_1, w_2 = -\frac{b}{a}, -\frac{d}{c}$.
אם יחס המרחקים הזה שווה ל-1, זה מגדיר את האנך האמצעי של w_1, w_2, שהוא אכן ישר. אם היחס הוא לא 1, האובייקט שתנאי זה מגדיר הוא אכן מעגל, אשר מכונה מעגל אפולוניוס של w_1, w_2 – ראו את הערך בויקיפדיה להוכחה נוספת לכך שמדובר במעגל.
מכיוון שכל ישר הוא אנך אמצעים של זוג נקודות כלשהו, הוכחנו שכל הישרים מתקבל במשוואות כאלה. עבור מעגלים, נשים לב שעבור $c = 0, a = d = 1$, המשוואה $|z + b| = t$ היא משוואת מעגל עם מרכז $-b$ ורדיוס t, ולכן מתארת את כל המעגלים.

(ז) יהא C ישר או מעגל במישור. לפי סוף הסעיף הקודם, ניתן להגדיר אותו לפי המשוואה $\left|\frac{az+b}{cz+d}\right| = t$. נשים לב שעבור המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, המשוואה הזו היא למעשה $|T_A(z)| = t$. עבור העתקת מביוס נוספת T_B, נקבל ש-

$$\begin{aligned} T_B(C) &= \{T_B(z) : z \in \widehat{\mathbb{C}}, |T_A(z)| = t\} = \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : |T_A(T_B^{-1}(w))| = t\} \\ &= \{w \in \widehat{\mathbb{C}} : |T_{AB^{-1}}(w)| = t\} \end{aligned}$$

ולפי הסעיף הקודם - גם זו משוואה שמגדירה ישר או מעגל, כפי שרצינו להוכיח.
כפי שראינו בסעיף הקודם, ניתן לדעת האם $T_B(C)$ הוא ישר או מעגל למשל על ידי בדיקה של האם ∞ שייך לתמונה $T_B(C)$ או לא, או במילים האחרות האם $T_B^{-1}(\infty) \in C$. כלומר, T_B מעבירה ישרים ומעגלים אשר עוברים דרך $T_B^{-1}(\infty)$ לישרים, וישרים ומעגלים אשר לא עוברים דרך נקודה זו למעגלים.

(9) (א) אלגברה מיידית.

(ב)

$$[1, -1; i, -i] = \frac{(i-1)(-i+1)}{(i+1)(-i-1)} = \frac{(i-1)^2}{(i+1)^2} = \frac{-2i}{2i} = -1 \in \mathbb{R}$$

$$[1,2i;-1,3i]=\frac{(-1-1)(3i-2i)}{(-1-2i)(3i-1)}=\frac{-2i}{7-i}=\frac{-2i(7+i)}{7^2+1^2}=\frac{1-7i}{25}\notin\mathbb{R}$$

(ג)

$$[z_1,z_2;z_3,z]=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\frac{z-z_2}{z-z_1}=\frac{az-az_2}{z-z_1}$$

עבור $a=\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$. זו אכן העתקת מביוס, שכן $a\neq 0,\infty,1$, על סמך כך ש-z_1,z_2,z_3 שונים בזוגות. מיידי לראות ש-∞ עובר ל-a הנ"ל, בעוד ש-z_1,z_3,z_2 ממופות ל-$0,1,\infty$ בהתאמה. זוהי למעשה בנייה ישירה של העתקת המביוס (היחידה) אשר שולחת את הנקודות z_i ל-$0,1,\infty$ בסדר הזה – ההופכית של ההעתקה עליה מדובר בשאלה (4ד).

(ד) בהתאם לרמז, מספיק לבדוק שהזזות, כפל בסקלאר ואינברסיה שומרות על יחס כפול - ואכן, כל הבדיקות הללו קלות במיוחד:

$$\begin{aligned}[z_1+c,z_2+c;z_3+c,z_4+c]&=\frac{(z_3+c-z_1-c)(z_4+c-z_2-c)}{(z_3+c-z_2-c)(z_4+c-z_1-c)}\\&=\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)}=[z_1,z_2;z_3,z_4]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\lambda z_1,\lambda z_2;\lambda z_3,\lambda z_4]&=\frac{(\lambda z_3-\lambda z_1)(\lambda z_4-\lambda z_2)}{(\lambda z_3-\lambda z_2)(\lambda z_4-\lambda z_1)}\\&=\frac{\lambda^2(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{\lambda^2(z_3-z_2)(z_4-z_1)}=\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)}=[z_1,z_2;z_3,z_4]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[1/z_1,1/z_2;1/z_3,1/z_4]&=\frac{(1/z_3-1/z_1)(1/z_4-1/z_2)}{(1/z_3-1/z_2)(1/z_4-1/z_1)}\\&=\frac{\frac{z_1-z_3}{z_1z_3}\frac{z_2-z_4}{z_2z_4}}{\frac{z_2-z_3}{z_2z_3}\frac{z_1-z_4}{z_1z_4}}=\frac{(z_3-z_1)(z_4-z_2)}{(z_3-z_2)(z_4-z_1)}=[z_1,z_2;z_3,z_4]\end{aligned}$$

(ה) נסמן $\widehat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$. מתוך סעיפים (א) ו-(ג), אפשר לכתוב $[0,1;\infty,z]=[0,1;z,\infty]^{-1}=\frac{z-1}{z}=1-\frac{1}{z}$. כעת ברור ש

$$z\in\widehat{\mathbb{R}}\iff\frac{1}{z}\in\widehat{\mathbb{R}}\iff[0,1;\infty,z]\in\widehat{\mathbb{R}},$$

כפי שטענו. תהנה z_1,z_2,z_3,z_4 רביעיית נקודות כלשהי. לפי (4ד), קיימת העתקת מביוס T עבורה $T(0,1,\infty)=z_1,z_2,z_3$. נסמן $z=T^{-1}(z_4)$. מכיוון שהעתקות מביוס משמרות את היחס הכפול, $[0,1;\infty,z]=[z_1,z_2;z_3,z_4]$. נשים לב כי שלוש נקודות שונות בזוגות z_1,z_2,z_3 תמיד מגדירות ישר או מעגל יחיד שעובר בשלושתן: אם אחת מהנקודות היא אינסוף, זה הישר דרך השתיים האחרות; אם שלוש הנקודות על ישר, זה הישר, ואחרת הן מגדירות משולש אשר חסום במעגל. נסמן ב-C את הישר/מעגל הזה, ונשים לב שארבע הנקודות הן על ישר או מעגל אחד אם ורק אם $z_4\in C$. מצד שני, $T^{-1}(C)$ הוא גם ישר או מעגל לפי (4ז), והוא עובר דרך הנקודות $0,1,\infty$, ולכן זה בהכרח הישר הממשי $\widehat{\mathbb{R}}$. ובסה"כ נקבל

$$[z_1,z_2;z_3,z_4]\in\widehat{\mathbb{R}}\iff[0,1;\infty,z]\in\widehat{\mathbb{R}}\iff z\in T^{-1}(C)=\widehat{\mathbb{R}}\iff z_4\in C,$$

כנדרש.