תורת הפונקציות המרוכבות 1 - תרגיל בית מספר 3
תאריך הגשה: 2.8.2018

(1) (א) השתמשו במשפט ליוביל (הרגיל) על מנת להוכיח את המשפט היסודי של האלגברה.
(ב) תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ גזירה ולא קבועה. הוכיחו שהתמונה $f(\mathbb{C})$ מהווה קבוצה צפופה ב-$\mathbb{C}$.

(2) תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ גזירה. הוכיחו שכל אחד מהתנאים הבאים הוא תנאי מספיק לְהיות f פונקציה קבועה.
(א) $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
(ב) קיים קבוע $C > 0$ עבורו $\operatorname{Re} f(z) \leq C \cdot \log|z|$ לכל z עם $|z| \geq 2$.
(ג) $|f(z)| \neq 1$ לכל $z \in \mathbb{C}$.
(ד) לכל $z \in \mathbb{C}$, מתקיים $f(z) = f(z+1) = f(z+i)$.

(3) האם קיימת פונקציה גזירה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ המקיימת $|f(z)| > |z|$ לכל $z \in \mathbb{C}$?

(4) יהא $U \subset \mathbb{C}$ תחום קמור.
(א) תהא $f : U \to \mathbb{C}$ גזירה ברציפות שאינה על. הראו כי קיימת $g : U \to \mathbb{C}$ גזירה ברציפות וקבוע $C \in \mathbb{C}$ כך ש- $f(z) = e^{g(z)} + C$ לכל $z \in U$.
(ב) נניח כי הפונקציות $f, g : U \to \mathbb{C}$ הינן גזירות ברציפות ומקיימות את המשוואה $f^2 + g^2 = 1$ בכל U. הוכיחו שקיימת $h : U \to \mathbb{C}$ גזירה ברציפות עבורה $f(z) = \cos(h(z)), g(z) = \sin(h(z))$.
רמז: הראו תחילה שהפונקציות $f + ig, f - ig$ אינן מתאפסות, והשתמשו בסעיף (א) עבורן. זכרו ש- $\cos(w) = \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$, $\sin(w) = \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$.
(ג) תהא $f : U \to \mathbb{C}$ גזירה ברציפות המקיימת $f(z) \neq \pm 1$ לכל $z \in U$. הראו שקיימת $g : U \to \mathbb{C}$ גזירה ברציפות כך ש-$f^2 + g^2 = 1$. רמז: שוב יש להשתמש בסעיף (א) – עבור איזו פונקציה?
הערה: משילוב של סעיפים (ב) ו-(ג) נקבל את הטענה הבאה, בה נשתמש בהמשך הקורס: אם $f : U \to \mathbb{C}$ גזירה ברציפות עם $f(z) \neq \pm 1$ לכל $z \in U$, אז קיימת $h : U \to \mathbb{C}$ גזירה ברציפות עם $f(z) = \cos(\frac{\tau}{2}h(z))$.

(5) האם סדרת הפונקציות f_n מתכנסת במ"ש על קומפקטיות בתחום U? אם כן, מה הגבול?
(א) $f_n(z) = z/n$, $U = \mathbb{C}$
(ב) $f_n(z) = z^n$, $U = B(0,1)$
(ג) $f_n(z) = z^{-n}$, $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
(ד) $f_n(z) = \begin{cases} |z|^n, & |z| \leq 1 \\ 1, & |z| \geq 1 \end{cases}$, $U = \mathbb{C}$

(6) יהא $U \subset \mathbb{C}$ תחום, ותהנא $f_n, g_n : U \to \mathbb{C}$ סדרות פונקציות רציפות אשר מתכנסות במ"ש על קומפקטיות לפונקציות $f, g : U \to \mathbb{C}$ בהתאמה. הראו שגם $f_n + g_n, f_n \cdot g_n$ מתכנסות במ"ש על קומפקטיות ל-$f+g, f \cdot g$ בהתאמה. בנוסף, הראו שאם $g \neq 0$ בכל U, אז $f_n/g_n \to f/g$ במ"ש על קומפקטיות. (שימו לב לדקות, ש-f_n/g_n לא בהכרח מוגדרת בכל U!)

(7) יהא U תחום. הראו כי אם $f, g : U \to \mathbb{C}$ הן נגזרות מקומית, אז גם $f \cdot g$ היא נגזרת מקומית.
הדרכה: השתמשו בעובדה (אשר תוכח בהרצאה ביום שלישי) שכל נגזרת מקומית היא גבול במ"ש על קומפקטיות של פונקציות גזירות, ולהפך; ובשאלה הקודמת.

(8) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+x+1} dx$.

(9) תהא $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$ מסילה סגורה ורציפה, ותהא f פונקציה מרוכבת המוגדרת על $\operatorname{Im} \alpha$, גזירה פעמיים ברציפות בסביבה שלה, ושאינה מתאפסת עליה. הוכיחו כי $\frac{1}{\tau i}\int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{\tau i}\int_{f \circ \alpha} \frac{1}{z}$.
הראו זאת בשתי דרכים: לפי הגדרת האינטגרל כפי שנלמדה בהרצאה, ולפי ההגדרה ה"קלאסית" שנלמדה בתרגול (במקרה השני יש להניח שהמסילה α גזירה ברציפות).

(10) תהא $A \subset \mathbb{C}$ קבוצה סגורה, ותהא $f : A \to [0,1]$ פונקציה רציפה. הראו כי ניתן להמשיך את f ברציפות ל-$\mathbb{C}$, כלומר שקיימת $F : \mathbb{C} \to [0,1]$ רציפה כך ש-$F|_A = f$; ספציפית, בדקו שהפונקציה הבאה היא המשכה כזו:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ \inf\limits_{a \in A}\left(f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1\right), & x \notin A \end{cases}$$

באשר כרגיל $d(x,A) = \inf\limits_{a \in A} d(x,a)$.

הערה: זהו מקרה פרטי של משפט ההרחבה של Tietze, שנכון גם במרחבים מטריים כלליים, ואף ביותר כלליות.

(11) הוכיחו את הווריאנט הבא על משפט הדפורמציה: יהא U תחום, ותהא $\alpha : [0,1] \to U$ מסילה רציפה (לאו דווקא סגורה). הראו כי קיים ε (שתלוי רק ב-α, U) כך שלכל מסילה $\beta : [0,1] \to U$ עם $\beta(0) = \alpha(0)$, $\beta(1) = \alpha(1)$ ו-$|\beta(t) - \alpha(t)| < \varepsilon$ לכל $t \in [0,1]$, ולכל פונקציה גזירה $f : U \to \mathbb{C}$, מתקיים $\int_\alpha f = \int_\beta f$.