תורת הפונקציות המרוכבות 1 - פתרון תרגיל בית מספר 3

(1) (א) יהא $f \in \mathbb{C}[z]$ פולינום ממעלה $n > 0$, אזי $f(z) \to \infty$ כאשר $z \to \infty$, ובפרט קיים R עבורו $|f(z)| > 1$ לכל $|z| > R$ (ראו שאלה 5 מתרגיל 1). נניח בשלילה של-f אין שורשים, ואז $g = 1/f$ פונקציה שלמה שמקיימת $|g(z)| > 1$ עבור $|z| > R$, ומרציפות g היא חסומה על קומפקטיות, כלומר $|g(z)| \le M_0$ לכל $|z| \le R$, ולכן עבור $M = \max(M_0, 1)$ קיבלנו $|g(z)| \le M$ בכל $\mathbb{C}$ – ולכן מליוביל, g פונקציה קבועה, ולכן גם f קבועה, בסתירה לכך שמעלתה חיובית.

(ב) נניח בשלילה שהתמונה אינה צפופה ב-$\mathbb{C}$, כלומר קיים $w \in \mathbb{C}$ שאינו בסגור של התמונה, כלומר קיים ε כך שהכדור הפתוח $B(w, \varepsilon)$ זר לתמונה של f. נתבונן בהעתקת המביוס $\phi(z) = \frac{\varepsilon}{z-w}$, שמוגדרת וגזירה בכל המישור המנוקב $z \neq w$, ולכן ההרכבה $g = \phi \circ f$ היא פונקציה שלמה, וחסומה על ידי 1: ואכן, לכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $f(z) \notin B(w, \varepsilon)$ כלומר $|f(z) - w| \ge \varepsilon$ ולכן $|g(z)| = \frac{\varepsilon}{|f(z)-w|} \le 1$. לכן לפי משפט ליוביל g פונקציה קבועה, אך אז גם $f = \phi^{-1} \circ g$ קבועה, בסתירה.

(2) (א) נתבונן בפונקציה $g(z) = e^{-f(z)}$. מתוך $\operatorname{Re} f \ge 0$ נובע $|g(z)| \le 1$. מצד שני g גזירה בכל המישור (כהרכבה של גזירות), ולכן מליוביל $g \equiv const$ קבועה. לכן התמונה של f מוכלת ב-$\log(-const)$, שהיא קבוצה דיסקרטית; ומכיוון ש-f רציפה, גם f בהכרח קבועה.

(ב) כמו קודם, נגדיר $g(z) = e^{f(z)}$. התנאי $\operatorname{Re} f(z) \le C \cdot \log|z|$ מתרגם לכך ש-$|g(z)| \le |z|^C$ עבור $|z| > 2$. על פי ליוביל המוכלל, נובע מכאן ש-$g(z)$ היא בהכרח פולינום (ממעלה קטנה או שווה ל-C). אולם g לא מתאפסת כלל ב-$\mathbb{C}$ (כי אקספוננט לא מתאפס אף פעם), ולכן מהמשפט היסודי של האלגברה, g חייבת להיות פולינום קבוע. מכאן נובע ש-f קבועה בדיוק כמו בסעיף הקודם.

(ג) על פי משפט ערך ביניים (הממשי), בהכרח מתקיים $|f(z)| < 1$ לכל z, או $|f(z)| > 1$ לכל z: ואכן, אם עבור z_0, z_1 מתקיים $|f(z_1)| > 1 > |f(z_0)|$, אז מרציפות $|f(z)|$ נובע שקיים $z_2 \in [z_0, z_1]$ עבורו $|f(z_2)| = 1$, בסתירה לנתון.

כעת, אם $|f(z)| < 1$ לכל z, אז נקבל ש-f היא קבועה מתוך ליוביל; ולעומת זאת אם $|f| > 1$ אז בפרט היא לא מתאפסת ולכן $1/f$ היא גם פונקציה גזירה בכל המישור, ומקיימת $|1/f| < 1$, ולכן שוב $1/f$ קבועה מתוך ליוביל, ולכן בבירור גם f.

(ד) מתוך הנתון נובע באינדוקציה שגם לכל $m, n \in \mathbb{Z}$ ולכל $z \in \mathbb{C}$ מתקיים $f(z + m + in) = f(z)$. הפונקציה f רציפה על הריבוע הקומפקטי $[0,1] \times [0,1]$ במישור המרוכב, ולכן חסומה עליו, נניח על ידי M. נשים לב שאז f חסומה בכל $\mathbb{C}$ על ידי M, שכן לכל $z = x + iy \in \mathbb{C}$, אם נבחר $m = \lfloor x \rfloor, n = \lfloor y \rfloor$ אזי $f(z) = f(z - m - in) \in f([0,1) \times [0,1))$ ולכן $|f(z)| \le M$. לכן f חסומה בכל המישור, ולכן קבועה, מתוך ליוביל.

(3) לא קיימת פונקציה כזו. נשים לב שפונקציה כזו בפרט לא מתאפסת אף פעם, שכן $|f(z)| > |z| \ge 0$. לכן גם $g = 1/f$ גזירה בכל המישור, ומקיימת $|g(z)| < |1/z|$ לכל $z \neq 0$; ובפרט $|g(z)| < 1$ לכל $|z| > 1$. מצד שני, הכדור $\overline{B}(0,1)$ קומפקטי, ו-g רציפה, לכן חסומה עליו, כלומר קיים M כך ש-$|g(z)| \le M$ לכל $|z| \le 1$. אם נחליף את M במקסימום בין M ו-1, נקבל ש-$|g(z)| \le M$ לכל z, ולכן g קבועה, מתוך ליוביל. לכן גם $f \equiv$ קבועה. אך ברור שפונקציה כזו לא מקיימת $|f(z)| > |z|$ עבור $|z| > |const|$, בסתירה.

(4) (א) נתון ש-f אינה על, לכן קיים $C \in \mathbb{C}$ שאינו בתמונה של f, כלומר הפונקציה $f - C$ אינה מתאפסת. מכיוון שהיא גזירה ברציפות בכל $\mathbb{C}$, שהוא תחום פשוט קשר, נובע שקיים ענף גזיר ברציפות של $\log(f(z) - C)$ בכל $\mathbb{C}$, ונסמנו ב-$g(z)$. זה בדיוק שקול לכך ש-$f(z) - C = e^{g(z)}$, או לחילופין $f(z) = e^{g(z)} + C$ לכל z, כנדרש.

(ב) אכן, מתקיים $(f+ig)(f-ig) = f^2 + g^2 = 1$ בכל U, ובפרט שתי הפונקציות לא מתאפסות, ולכן מסעיף (א) ניתן לכתוב $f + ig = e^{ih(z)}$, ואז נקבל $f - ig = \frac{1}{f+ig} = e^{-ih(z)}$, ולכן $f = \frac{(f+ig)+(f-ig)}{2} = \frac{e^{ih(z)}+e^{-ih(z)}}{2} = \cos(h(z))$ ובדומה $g(z) = \sin(h(z))$, כנדרש.

(ג) על פי הנתון ש-$f \neq \pm 1$, נקבל ש-$f^2 \neq 1$, ולכן מסעיף (א) ניתן לכתוב $f^2 = 1 + e^{h(z)}$ עם h גזירה ברציפות. נגדיר $g : U \to \mathbb{C}$ לפי $g(z) = ie^{h(z)/2}$ ונקבל $g^2 = -e^{h(z)}$ ולכן $f^2 + g^2 = 1$ בכל U, כנדרש.

(5) (א) כן, לגבול $f \equiv 0$. זאת משום שכל קבוצה קומפקטית K היא חסומה, כלומר מוכלת ב-$B(0,R)$ כלשהו, ואז מתקיים לכל $z \in K$, $|f_n(z)| \le \frac{R}{n}$ באופן אחיד. כאשר $n \to \infty$, מתקיים $\frac{R}{n} \to 0$, ולכן זו התכנסות במ"ש על K.

(ב) כן, לגבול $f \equiv 0$. מתקיים שלכל $K \subset U$, קיים $r = \max\{|z| : z \in K\}$, ובהכרח $r < 1$, כלומר $|f_n(z)| \le r^n$ באופן אחיד על $z \in K$, ומתקיים $r^n \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

(ג) לא. לנקודות ב-$B(0,1) \setminus \{0\}$ אין גבול נקודתי ב-$\mathbb{C}$ ל-$f_n(z)$ (הערכים שואפים ל-∞), ולכן אין פונקציה גבולית, אפילו לא נקודתית, ובוודאי שלא במ"ש על קומפקטיות. גם לערכים ב-$\partial B(0,1) \setminus \{1\}$ אין לסדרה $f_n(z)$ גבול נקודתי.

(ד) לא. לסדרה f_n יש גבול נקודתי, שהוא $f(z) = 0$ עבור $|z| < 1$ ו-$f(z) = 1$ עבור $z \ge 1$. אך ההתכנסות לגבול הזה היא לא במ"ש על קומפקטיות, למשל בכדור הסגור $K = \overline{B}(0,1)$ ועבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$ נקבל שלכל n טבעי עבור $z \in K$ עם $\sqrt[n]{\varepsilon} < |z| < 1$ יתקיים $|f_n(z) - f(z)| = |f_n(z)| = |z|^n > \varepsilon$, ולכן זו אינה התכנסות במ"ש על K (ולכן לא התכנסות במ"ש על קומפקטיות).
דרך אלטרנטיבית לראות שההתכנסות אינה במ"ש על קומפקטיות היא להבחין שהפונקציות f_n כולן רציפות, אך הגבול הנקודתי f אינו רציף – אך גבול במ"ש של קומפקטיות של פונקציות רציפות הוא בהכרח פונקציה רציפה, לכן f אינה גבול במ"ש על קומפקטיות של f_n.

(6) יהא K קומפקטי, ויהא $\varepsilon > 0$. עבור $f + g$, נבחר N כך שלכל $n > N$ יתקיים $|f_n - f|, |g_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$ לכל $z \in K$, ואז מא"ש משולש נקבל גם $|(f_n + g_n) - (f + g)| < \varepsilon$ לכל $z \in K$ ולכל $n > N$, כנדרש.
עבור המכפלה, מכך ש-f_n, g_n רציפות ב-U ו-f, g גבולות במ"ש על קומפקטיים שלהם, נסיק שגם f, g רציפות ב-U; ומכך ש-K קומפקטי, נסיק ש-f, g חסומות ב-K, כלומר קיים M עבורו $|f|, |g| \le M$ לכל $z \in K$. נבחר N כך שלכל $n > N$ יתקיים $|f_n - f|, |g_n - g| < \max\{M, \frac{\varepsilon}{3M}\}$ לכל $z \in K$. בפרט נקבל ש-$|f_n|, |g_n| < 2M$ לכל $z \in K$ ואז מא"ש משולש נקבל

$$|f_n g_n - fg| \le |f_n g_n - f_n g| + |f_n g - fg| = |f_n||g_n - g| + |f_n - f||g| < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M = \varepsilon$$

לכל $z \in K$ ולכל $n > N$, כנדרש.
הטיעון עבור המנה f/g יהיה דומה, אך כאן גם צריך לשים לב שמכיוון ש-$g \neq 0$ על K ורציפה, קיים מינימום $|g| \ge m \neq 0$ לכל $z \in K$, ולכן אם נבחר N כך שלכל $n > N$ יתקיים $|g_n - g| < \frac{m}{2}$ ב-K, אז גם $|g_n| > \frac{m}{2}$ ובפרט $g_n \neq 0$ בכל K, ולכן f_n/g_n מוגדר היטב ב-K לכל $n > N$. כמקודם נניח $|f| \le M$ ב-K, ונניח ש-N מספיק גדול כך שיתקיים לכל $n > N$ ולכל $z \in K$, $|f_n - f| < \max\{M, \frac{\varepsilon m}{2}\}$ ו-$|g_n - g| < \frac{\varepsilon m^2}{8M}$, ונקבל

$$\left|\frac{f_n}{g_n} - \frac{f}{g}\right| \le \left|\frac{f_n}{g_n} - \frac{f_n}{g}\right| + \left|\frac{f_n}{g} - \frac{f}{g}\right| = \frac{|f_n|}{|g_n||g|}|g_n - g| + \frac{|f_n - f|}{|g|} < \frac{2M}{m^2/2}\frac{\varepsilon m^2}{8M} + \frac{\varepsilon m}{2m} = \varepsilon$$

לכל $n > N$ ולכל $z \in K$, כנדרש.

(7) כאמור בהדרה, מכיוון ש-f, g נגזרות מקומיות, קיימות סדרות $f_n, g_n : U \to \mathbb{C}$ של פונקציות גזירות כך ש-f, g הן גבולות במ"ש על קומפקטיות שלהן. כפי שהראנו בתרגיל הקודם, נובע מכאן ש-$f \cdot g$ היא גבול במ"ש על קומפקטיות של $f_n \cdot g_n$, שגם זו סדרה של פונקציות גזירה (שכן מכפלה של גזירות היא גזירה). לכן, על פי הכיוון השני של אותו אפיון, נקבל ש-$f \cdot g$ נגזרת מקומית, כנדרש.

(8) מתקיים $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ולכן עבור $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+z+1}$ מתקיים $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+x+1}dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\right)$. יהא $R > 0$ גדול, ותהא β_R מסילת חצי מעגל ברדיוס R עם מרכז ב-0 בכיוון החיובי, מ-$+R$ ל-$-R$, ותהא $\gamma_R = \beta_R + [-R, R]$ לולאת חצי מעגל סגורה. לכל $z \in \beta_R$ מתקיים $|e^{iz}| = e^{\mathrm{Re}(iz)} \le 1$, ו-$|z^2 + z + 1| > |z|^2 - |z| - 1 = R^2 - R - 1$, לכן $|f(z)| \le \frac{1}{R^2-R-1}$ ולכן מנוסחת חסם-אורך נקבל $\left|\int_{\beta_R} f(z)\right| \le \frac{\frac{\tau}{2}R}{R^2-R-1} \to 0$ כאשר $R \to \infty$. בדומה $\left|\int_R^{\infty} f(x)dx\right| \le \int_R^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx <$ $\int_R^{\frac{1}{x^2}} dx = \frac{1}{R} \to 0$, וכן $\left|\int_{-\infty}^{-R} f(x)dx\right| \to 0$ כאשר $R \to \infty$, ולכן בסה"כ מקבלים $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)$. את האינטגרל האחרון כבר לחשב בקלות: הפונקציה $f(z)$ גזירה בתוך כל חצי-הדיסק שתחום על ידי γ_R, למעט בנקודה $\omega = e^{\frac{\tau i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, שהיא שורש של המכנה $z^2 + z + 1 = (z - \omega)(z - \overline{\omega})$. נגדיר $g(z) = (z - \omega)f(z) = \frac{e^{iz}}{z-\overline{\omega}}$ שגזירה בכל התחום, ואז $f(z) = \frac{g(z)}{z-\omega} = \frac{g(\omega)}{z-\omega} + \frac{g(z)-g(\omega)}{z-\omega}$. הפונקציה $\frac{g(z)-g(\omega)}{z-\omega}$ מוגדרת וגזירה בכל התחום למעט ב-$z = \omega$, שם ניתן להמשיך אותה ברציפות לערך $g'(\omega)$, ולכן מגורסה

(עם נקודת רציפות אחת) האינטגרל שלה על פני γ_R מתאפס. המסילה γ_R מקיפה את ω בדיוק פעם אחת בכיוון החיובי (עבור R גדול מספיק), ולכן $\int_{\gamma_R} \frac{1}{z-\omega} = \tau i$. סה"כ קיבלנו

$$\int_{\gamma_R} f = \int_{\gamma_R} \frac{g(\omega)}{z-\omega} + \int_{\gamma_R} \frac{g(z)-g(\omega)}{z-\omega} = g(\omega)\tau i + 0 = \frac{e^{i\omega}}{\omega - \overline{\omega}}\tau i = \frac{e^{\frac{-\sqrt{3}-i}{2}}}{\sqrt{3}i}\tau i = \frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\tau}{\sqrt{3}}(\cos(\tfrac{1}{2}) - i\sin(\tfrac{1}{2}))$$

מכיוון שהאינטגרל הזה כלל לא תלוי ב-R, הוא למעשה שווה ל-I, ובסה"כ נקבל

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+x+1}dx = \mathrm{Im}(I) = -\frac{e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin(\frac{1}{2})\tau}{\sqrt{3}}$$

(9) בדרך הראשונה: מכיוון ש-$f\circ\alpha$ רציפה ולא מתאפסת, ניתן לחלק את $[0,1]$ למספר סופי של קטעים $[t_i, t_{i+1}]$ כך ש-$f\circ\alpha([t_i,t_{i+1}])$ מוכל בחצי מישור, ולכן אפשר להגדיר על חצי מישור זה ענף רציף של לוג, $\log_i$, ונסמן $\ell_i(t) = \log_i(f(\alpha(t)))$ לכל $t \in [t_i, t_{i+1}]$. אפשר גם להדביק את הענפים יחד, ולדרוש $\ell_i(t_{i+1}) = \ell_{i+1}(t_{i+1})$, וכך נקבל פונקציה רציפה $\ell(t)$ שהיא ענף רציף של $\log(f\circ\alpha)$. נשים לב שהפונקציה $\log_i(f(z))$, בתחום הגדרתה, מקיימת שהנגזרת שלה היא $f'(z)/f(z)$, מתכונות של ענפים של $\log$ ומכלל השרשרת. מכיוון שהתמונה של $\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}$ מוכלת בתחום ההגדרה של $\log_i \circ f$, מתקיים

$$\int_{\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \log_i(f(\alpha(t_{i+1}))) - \log_i(f(\alpha(t_i))) = \ell_i(t_{i+1}) - \ell_i(t_i) = \ell(t_{i+1}) - \ell(t_i)$$

ומכאן

$$\int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_i \int_{\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}} \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_i (\ell(t_{i+1}) - \ell(t_i)) = \ell(1) - \ell(0)$$

ומצד שני מכיוון ש-$\log_i$ היא קדומה של $\frac{1}{z}$ שמוגדרת בתחום שמכיל את $f\circ\alpha([t_i,t_{i+1}])$, נקבל בדומה

$$\int_{f\circ\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}} \frac{1}{z} = \log_i(f\circ\alpha(t_{i+1})) - \log_i(f\circ\alpha(t_i)) = \ell_i(t_{i+1}) - \ell_i(t_i) = \ell(t_{i+1}) - \ell(t_i)$$

ושוב

$$\int_{f\circ\alpha} \frac{1}{z} = \sum_i \int_{f\circ\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}} \frac{1}{z} = \sum_i (\ell(t_{i+1}) - \ell(t_i)) = \ell(1) - \ell(0) = \int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)}$$

כנדרש.

בדרך השנייה, על פי הגדרת האינטגרל הקלאסית:

$$\int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int_0^1 \frac{f'(\alpha(t))}{f(\alpha(t))}\alpha'(t)dt = \int_0^1 \frac{(f\circ\alpha)'(t)}{(f\circ\alpha)(t)}dt = \int_0^1 \frac{1}{(f\circ\alpha)(t)}(f\circ\alpha)'(t)dt = \int_{f\circ\alpha} \frac{1}{z}dz$$

(10) מהגדרתה ברור ש-$F|_A = f$. יש לבדוק עוד שהטווח של F הוא אכן $[0,1]$, וכן ש-F רציפה בכל $\mathbb{C}$. נגדיר לכל $a \in A, x \notin A$ פונקציית עזר $F_a(x) = f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1$, כך שמתקיים $F(x) = \inf_{a\in A} F_a(x) = \min_{a\in A} F_a(x)$ (המינימום בהכרח מתקבל, כי $F_a(x)$ רציפה בפרמטר a, מהרציפות של $d(a,x)$ ו-$f(a)$).

ברור שמתקיים $F(x) = f(x) \in [0,1]$ עבור $x \in A$. עבור $x \notin A$, תהא $a_x \in A$ קודה עבורה $d(x,a_x) = d(x,A)$ (קיימת כזו כי A סגורה), אז מהגדרה נקבל $F(x) \le F_{a_x}(x) = f(a_x) \le 1$. מצד שני, עבור הנקודה a'_x בה מתקבל המינימום $F(x) = F_{a'_x}(x)$, נקבל $F(x) = f(a'_x) + \frac{d(x,a'_x)}{d(x,A)} - 1 \ge f(a'_x) \ge 0$. הראנו ש-$0 \le f(a'_x) \le F(x) \le f(a_x) \le 1$ לכל $x \in \mathbb{C}$, כנדרש. בנוסף, מכיוון ש-$F_{a'_x}(x) = F(x) \le 1$ ו-$f(a'_x) \ge 0$, נקבל $\frac{d(x,a'_x)}{d(x,A)} - 1 \le 1$, כלומר $d(x,a'_x) \le 2d(x,A)$ לכל $x \notin A$, ובפרט $F(x) = \min\{F_a(x) : a \in A \cap B(x, 2d(x,A))\}$.

נראה שהפונקציה רציפה בכל $x \notin A$: יהא $r = d(x,A)$, ונתבונן בכדור $U = B(x, r/2)$, שזר ל-A, ובתוכו גם מתקיים $\frac{r}{2} < d(y,A) < \frac{3r}{2}$ לכל $y \in U$. בפרט הכדורים $B(y, 2d(y,A))$ כולם מוכלים ב-$B(x, \frac{7r}{2})$ לכל $y \in U$, ולכן עבור הקבוצה הקומפקטית $A' = A \cap \overline{B}(x, \frac{7r}{2})$ מתקיים $F(y) = \min\{F_a(y) : a \in A'\}$

לכל $y \in U$. אי שיוויון המשולש אומר לנו שהפונקציות $d(y,a), d(y,A)$ הן 1-ליפשיץ וחסומות בין $\frac{r}{2}$ ו-$4r$ לכל $y \in U$ ו-$a \in A'$, לכן נקבל ש- $F_a(y) = f(a) + \frac{d(y,a)}{d(y,A)} - 1$ היא L-ליפשיץ עבור $L = \frac{18}{r}$: ואכן

$$\begin{aligned}|F_a(y_1) - F_a(y_2)| &= \left|\frac{d(y_1,a)}{d(y_1,A)} - \frac{d(y_2,a)}{d(y_2,A)}\right| \le \frac{|d(y_1,a) - d(y_2,a)|}{d(y_1,A)} + \frac{d(y_2,a)|d(y_1,A) - d(y_2,A)|}{d(y_1,A)d(y_2,A)} \\ &\le \frac{2d(y_1,y_2)}{r} + \frac{4r \cdot d(y_1,y_2)}{r^2/4} = \frac{18}{r}d(y_1,y_2)\end{aligned}$$

(2)

לכן גם הפונקציה F תהיה L-ליפשיץ ב-U, ובפרט רציפה: ואכן, לכל $y_1, y_2 \in U$ נקבל $F(y_1) \le F_{a'_{y_2}}(y_1) \le F_{a'_{y_2}}(y_2) + L|y_2 - y_1| = F(y_2) + L|y_2 - y_1|$ ובדומה $F(y_2) \le F(y_1) + L|y_2 - y_1|$, וזו בדיוק L-ליפשיציות.

הוכחה אחרת לרציפות של F ב-U ניתן לקבל מתוך כך שהיא מינימום של פונקציות רציפות F_a שרציפות גם בפרמטר a, והמינימום נלקח על פני קבוצה קומפקטית A'. לכן אם $y_n \to y$, מהרציפות של $F_{a'_y}$ נקבל $F(y_n) \le F_{a'_y}(y_n) \to F_{a'_y}(y) = F(y)$, ומצד שני אם נעבור לת"ס כך ש-$a'_n = a'_{y_n} \to a' \in A'$ (ניתן לעשות זאת מהקומפקטיות של A'), נקבל $F(y_n) = F_{a'_n}(y_n) \to F_{a'}(y) \ge F(y)$. לכן בת"ס הזו בהכרח נקבל $F(y_n) \to F(y)$ מכלל הסנדוויץ'. הראינו שלכל סדרה $y_n \to y$ יש ת"ס בה $F(y_n) \to F(y)$, וזה גורר רציפות.

לסיום, יש להראות רציפות בנקודות $a \in A$. יהא $\varepsilon > 0$. מרציפות f, קיים δ כך שלכל $a' \in B(a,\delta) \cap A$ מתקיים $f(b) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$. נגדיר $\delta' = \frac{\delta}{3}$, ויהא $x \in B(a,\delta')$, ונרצה להוכיח שגם $F(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, וזה יוכיח את הרציפות הנדרשת. אם $x \in A$, זה אכן נכון כי $\delta' < \delta$. אם $x \notin A$, אז כמובן מתקיים $r = d(x,A) \le d(x,a) < \delta'$, ולכן מתקיים $a_x \in B(x,\delta') \subset B(a,2\delta') \subset B(a,\delta)$, וכן $a'_x \in B(x,2\delta') \subset B(a,3\delta') = B(a,\delta)$, ולכן $f(a) - \varepsilon < f(a'_x) \le F(x) \le f(a_x) < f(a) + \varepsilon$ כנדרש.

(11) ההוכחה דומה מאוד להוכחה של משפט הדפורמציה המקורי. מרציפות של α וקומפקטיות של $[0,1]$, ניתן לחלק את הקטע למספר סופי של קטעים $[t_i, t_{i+1}]$, כך שהתמונה של כל קטע כזה על ידי α מוכלת בקבוצה פתוחה קמורה $U_i \subset U$. לכל נקודה $t \in [t_i, t_{i+1}]$ יש $\varepsilon_t > 0$ מקסימלי כך ש-$B(\alpha(t), \varepsilon_t) \subset U_i$, ε_t הוא פונקציה רציפה של t ולכן קיים לו מינימום חיובי ε על פני כל ה-t, כלומר לכל i ולכל $t \in [t_i, t_{i+1}]$ מתקיים $B(\alpha(t), \varepsilon) \subset U_i$.

כעת עבור פונקציה גזירה f, בקבוצה הקמורה U_i תהיה לה קדומה F_i שמוגדרת ביחידות עד כדי קבוע; נבחר את הקבוע של F_0 שרירותית, ואת הקבועים האחרים נבחר כך שיתקיים $F_{i+1}(\alpha(t_{i+1})) = F_i(\alpha(t_{i+1}))$, ואז נקבל

$$\int_\alpha f = \sum_i \int_{\alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}} f = F_i(\alpha(t_{i+1}) - F_i(\alpha(t_i)) = F_n(\alpha(1)) - F_0(\alpha(0))$$

ומצד שני, נשים לב שגם עבור המסילה β, מתוך $|\beta(t) - \alpha(t)| < \varepsilon$ אנחנו מקבלים $\beta(t) \in B(\alpha(t), \varepsilon) \subset U_i$ עבור $t \in [t_i, t_{i+1}]$. כמו כן, הפונקציה $F_{i+1} - F_i$ מוגדרת על החיתוך $U_i \cap U_{i+1}$, שהיא קבוצה קמורה כחיתוך של קמורות ולא ריקה כי מכילה את $B(\alpha(t_{i+1}), \varepsilon)$. בתחום הזה זוהי פונקציה קדומה של $f - f = 0$, ולכן היא קבועה, ומהבחירה של F_{i+1} היא מתאפסת ב-$\alpha(t_{i+1})$ – ולכן היא זהותית 0 על כל החיתוך, ובפרט גם ב-$\beta(t_{i+1})$, כלומר $F_{i+1}(\beta(t_{i+1})) = F_i(\beta(t_{i+1}))$. לכן נקבל בסה"כ

$$\int_\beta f = \sum_i \int_{\beta|_{[t_i,t_{i+1}]}} f = F_i(\beta(t_{i+1}) - F_i(\beta(t_i)) = F_n(\beta(1)) - F_0(\beta(0))$$

וכעת מתוך כך ש-$\beta(0) = \alpha(0), \beta(1) = \alpha(1)$ אנו רואים שאכן האינטגרלים של f לאורך α ולאורך β – שווים.