תורת הפונקציות המרוכבות 1 - תרגיל בית מספר 4
תאריך הגשה: 9.8.2018

(1) יהא $R=\{x+iy:-1<x,y<1\}\subset\mathbb{C}$ ריבוע פתוח, ונסמן $N=i$, $S=-i$, $W=-1$, $E=1$ נקודות על צלעות הריבוע. תהנא $\alpha,\beta:[0,1]\to\overline{R}$ מסילות רציפות בתוך הריבוע ממערב למזרח ומצפון לדרום, בהתאמה, כלומר: $\alpha(0)=W,\alpha(1)=E$, $\beta(0)=N,\beta(1)=S$ וכן $\alpha((0,1)),\beta((0,1))\subset R$.
הוכיחו כי התמונות $\mathrm{Im}(\alpha),\mathrm{Im}(\beta)$ בהכרח נחתכות.
<u>רמז:</u> הגדירו מסילה γ מ-E ל-W שכולה מוכלת ב-$\mathbb{C}\setminus R$.

(2) תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ לולאת ז'ורדן, תהא $z_0=\gamma(t_0)\in\mathrm{Im}(\gamma)$ נקודה על הלולאה ($t_0\in(0,1)$), ויהא $\varepsilon>0$. הוכיחו כי קיימת לולאת ז'ורדן קוואזי-פוליגונאלית $\beta:[0,1]\to\mathbb{C}$ כך שלכל $t\in[0,1]$ מתקיים: אם $\gamma(t)\notin B(z_0,\varepsilon)$ אז $\beta(t)=\gamma(t)$, ואם $\gamma(t)\in B(z_0,\varepsilon)$ אז גם $\beta(t)\in B(z_0,\varepsilon)$. הדרכה:
(א) הראו כי קיים קטע פתוח $t_0\in I$ כך ש-$\gamma(I)\subset B(z_0,\varepsilon)$.
(ב) הראו כי קיים $\delta>0$ כך ש-$J=\gamma^{-1}(\overline{B}(z_0,\delta))\subset I$. זכרו ש-$\gamma$ – ז'ורדן.
(ג) נגדיר $t_1=\min J$, $t_2=\max J$, ונסמן $z_1=\gamma(t_1),z_2=\gamma(t_2)$. נגדיר

$$\beta(t)=\begin{cases}\gamma(t), & t\notin(t_1,t_2)\\ (1-\lambda)z_1+\lambda z_2, & t=(1-\lambda)t_1+\lambda t_2\in[t_1,t_2]\end{cases}$$

בדקו כי β עומדת בכל הדרישות.

(3) הוכיחו את נוסחת האינטגרל של קושי למסילת מעגל $f(w)=\frac{1}{\tau i}\int_{\partial B(0,r)}\frac{f(z)}{z-w}$ בשימוש רק במשפט קושי ההומוטופי (אם g גזירה בתחום U ו-γ מסילה כוויצה ב-U אז $\int_\gamma g=0$), ולא במשפט קושי ההומולוגי, כפי שנעשה בכיתה.
רמז: העזרו בפונקציה $\frac{f(z)-f(w)}{z-w}$.

(4) תהא $\gamma_0:[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ לולאה רציפה. בתרגיל זה נראה הוכחה נוספת לכך שהיא הומוטופית ב-$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ לכפולה שלמה של לולאת מעגל היחידה $\alpha:[0,1]\to S^1$ המוגדרת לפי $\alpha(t)=e^{\tau it}$.
(א) הראו כי γ_0 הומוטופית ללולאה $\gamma:[0,1]\to S^1$ המוגדרת לפי $\gamma(z)=\frac{\gamma_0(z)}{|\gamma_0(z)|}$.
(ב) בלי הגבלת הכלליות, נניח $\gamma(0)=\gamma(1)=1$ (אחרת נסובב את התמונה). אזי $\gamma^{-1}(S^1\setminus\{1\})\subset(0,1)$ היא קבוצה פתוחה, כלומר איחוד סופי או בן מנייה של קטעים פתוחים זרים: $\gamma^{-1}(S^1\setminus\{1\})=\bigcup_{n=1}^\infty I_n$. נסמן $J=\{j:-1\in\gamma(I_j)\}$, קבוצת האינדקסים עבורם $\gamma(I_j)$ מכיל את -1. הראו כי J סופית. רמז: לקטע $[0,1]$ אורך סופי.
(ג) הראו כי $(0,1)\setminus\bigcup_{j\in J}I_j$ הוא איחוד זר של כמות סופית של קטעים סגורים, $\bigcup_{k=1}^m L_k$. הראו כי לכל k כנ"ל, המסילה $\gamma|_{L_k}$ הומוטופית למסילה הקבועה 1 באמצעות הומוטפיה קמורה טבעית ב-$S^1\setminus\{-1\}$.
(ד) לכל $j\in J$, נסמן $I_j=(s_j,t_j)$. נגדיר $\beta_j=\alpha^{-1}\circ\gamma|_{I_j}:I_j\to(0,1)$. הראו כי הגבולות $\lim_{t\to s_j^+}\beta_j(t)$, $\lim_{t\to t_j^-}\beta_j(t)$ מתכנסים ושווים ל-0 או 1, כך שניתן להמשיך את β_j ברציפות למסילה $\beta_j:[s_j,t_j]\to[0,1]$ המקיימת $\gamma|_{\overline{I_j}}=\alpha\circ\beta_j$. הראו כי:
- אם $(\beta_j(s_j),\beta_j(t_j))\in\{(0,0),(1,1)\}$, אז $\gamma|_{\overline{I_j}}$ הומוטופית למסילה הקבועה 1.
- אם $(\beta_j(s_j),\beta_j(t_j))=(0,1)$, אז $\gamma|_{\overline{I_j}}$ הומוטופית ל-α.
- אם $(\beta_j(s_j),\beta_j(t_j))=(1,0)$, אז $\gamma|_{\overline{I_j}}$ הומוטופית ל-$-\alpha$.

רמז: התבוננו בהומוטופיה קמורה בין β ופונקציה לינארית או קבועה.
(ה) הסבירו מדוע ניתן לבצע בבת אחת את כל ההומוטופיות בסעיפים הקודמים, כך שמקבלים ש-γ הומוטופית לשרשור של מספר סופי של מסילות קבועות, עותקים של α, ועותקים של $-\alpha$. הסיקו ש-γ_0 הומוטופית ל-$n\alpha$, באשר $n\in\mathbb{Z}$ שווה לכמות המופעים של α פחות כמות המופעים של $-\alpha$, כנדרש.

(5) תהא f פונקציה גזירה בסביבה של $\overline{B}(z_0,R)$, ונסמן $M=\max_{z\in\partial B(z_0,R)}|f(z)|$.
(א) הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$|f^{(n)}(z_0)|\le M\frac{n!}{R^n}.$$

(ב) הסיקו מהסעיף הקודם את משפט ליוביל המוכלל.

(ג) נניח כי $f : B(0,1) \to \mathbb{C}$ גזירה מקיימת $|f(z)| \le \frac{1}{1-|z|}$ לכל $|z| < 1$. הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$|f^{(n)}(0)| \le (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

(6) (א) הוכיחו את משפט היחידות: תהא f גזירה בתחום U, ונסמן $Z = \{z \in U : f(z) = 0\}$. נניח כי קיימת ב-$Z$ נקודה שהיא גם נקודת הצטברות של Z, כלומר נקודה $z \in Z$ וסדרה $z_n \in Z \setminus \{z\}$ עם $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. הוכיחו כי f היא בהכרח פונקציית האפס. רמז: השתמשו בכך שאם f אינה קבועה, אז היא רגולרית ב-z.

(ב) תהא f גזירה בכל $\mathbb{C}$. הראו כי אם $f(x) \in \mathbb{R}$ לכל $x \in \mathbb{R}$, אזי $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

(ג) תהא f גזירה בכל $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. הראו כי אם $f(z) + f(\overline{z}) = 0$ לכל z עם $|z| = 1$, אזי $f(\overline{z}) = -f(\frac{z}{|z|^2})$ לכל $z \neq 0$.

(7) עקרון השיקוף: נסמן ב-$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ את חצי המישור העליון. הסגור שלו הוא $\overline{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$. תהא $g : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ פונקציה שגזירה בכל $\mathbb{H}$ ורציפה על $\mathbb{R}$, ובנוסף מקיימת $g(x) \in \mathbb{R}$ לכל $x \in \mathbb{R}$. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = \begin{cases} g(z), & z \in \overline{\mathbb{H}} \\ \overline{g(\overline{z})}, & z \notin \overline{\mathbb{H}} \end{cases}.$$

הוכיחו באמצעות משפט מורררה ש-f גזירה בכל המישור המרוכב.

(8) (א) תהא f פונקציה גזירה בסביבה מנוקבת של $z_0 = 0$, ונניח כי מתקיים $\lim_{z\to 0} zf(z) - \frac{b}{z} = a$. הוכיחו כי $\mathrm{Res}(f,0) = a$.

(ב) תהא f פונקציה גזירה בסביבה מנוקבת של $z_0 = 0$, יהא $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[z]$ פולינום ממעלה n, ונניח כי מתקיים $\lim_{z\to 0} zf(z) - \frac{p(z)}{z^n} = 0$. הוכיחו כי $\mathrm{Res}(f,0) = a_n$.

(ג) הוכיחו את נוסחת קושי ל-$f^{(n)}(0)$ באמצעות משפט השארית והסעיף הקודם. מיהו הפולינום p?

(9) השתמשו במשפט השארית על מנת לחשב את $\int_\gamma f(z)dz$ עבור $\gamma = \partial B(0,3)$ עם אוריינטציה חיובית.

(א) $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{z^2}$

(ב) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2 - 2z}$

(ג) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{z(z-4)^2}$

(10) חשבו את האינטגרלים הממשיים הבאים:

(א) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$ עבור $a > b > 0$. (רמז: $\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$.)

(ב) הראו כי $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2-1}dx = \frac{\tau^2}{16}$. רמז: העזרו באינטגרל $\int_{\partial U(r,R)} \frac{Log(z)}{z^2-1}dz$ לאורך השפה של התחום $U(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) > 0\}$, בגבול $r \to 0^+, R \to \infty$.