תורת הפונקציות המרוכבות 1 - פתרון תרגיל בית מספר 4

(1) כפי שנרמז, נחבר את הנקודות E, W במסילה γ שזרה ל-R, וגם ל-$\overline{R}$ למעט בקצוות. קל לבצע זאת, למשל על ידי המסילה הפוליגונאלית $\gamma = [1, 2, 2+2i, -2+2i, -2, -1]$. נגדיר גם $\widetilde{\alpha} = [-1, 1]$, כך ש- $\widetilde{\alpha} + \gamma$ היא מסילת מלבן בכיוון החיובי שמרכזו ב-N ואינו מקיף את S. נשים לב שמתוך הקמירות של R נקבל ש-$\alpha, \widetilde{\alpha}$ הומוטופיות (על ידי ההומוטופיה הקמורה) ב-$R \cup \{W, E\}$, ובפרט ב- $\mathbb{C} \setminus \{N\}$ וב-$\mathbb{C} \setminus \{S\}$, לכן

$$\mathrm{Ind}_{\alpha+\gamma}(N) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{\alpha}+\gamma}(N) = 1$$

$$\mathrm{Ind}_{\alpha+\gamma}(S) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{\alpha}+\gamma}(S) = 0$$

בפרט, האינדקסים של N, S ביחס ל-$\alpha+\gamma$ שונים זה מזה, ולכן הם בהכרח ברכיבי קשירות שונים של $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\alpha+\gamma)$. לכן מכיוון שהמסילה β מקשרת בין N ו-S, היא בהכרח נחתכת עם $\alpha + \gamma$. אך תמונות β מוכלת ב-$R \cup \{N, S\}$, שזה לתמונת γ: לכן β בהכרח נחתכת עם α, כנדרש.

(2) (א) מרציפות γ, מכיוון ש-$B(z_0, \varepsilon)$ פתוחה, גם $V = \gamma^{-1}(B(z_0, \varepsilon))$ פתוחה. מכיוון ש-$\gamma(t_0) = z_0$, נקבל $t_0 \in V$, לכן V מכיל סביבה פתוחה של t_0, שזה בדיוק קטע פתוח I עם $t_0 \in I$, שכן $t_0 \in (0,1)$. לכן $\gamma(I) \subseteq \gamma(V) \subseteq B(z_0, \varepsilon)$ כנדרש.

(ב) מתקיים ש-$[0,1] \setminus I$ קבוצה קומפקטית, ולכן מרציפות γ גם $A = \gamma([0,1] \setminus I)$ קומפקטית, ומחח"ע של γ מתקיים $A = \mathrm{Im}(\gamma) \setminus \gamma(I)$. בפרט $z_0 \notin A$ ולכן קיים מרחק $\delta = d(z_0, A)/2 > 0$, ובפרט $\overline{B}(z_0, \delta)$ זר ל-A. לכן מהגדרת A נקבל ש-$\mathrm{Im}(\gamma) \cap \overline{B}(z_0, \delta) \subseteq \gamma(I)$, ושוב מחח"ע של γ זה גורר $\gamma^{-1}(\overline{B}(z_0, \delta)) \subset \gamma^{-1}(\gamma(I)) = I$, כנדרש.

(ג) t_1, t_2 מוגדרים היטב כי J סגורה (בתור תמונה הפוכה של קבוצה סגורה על ידי פונקציה רציפה) ולכן קומפקטית. מכיוון ש-I גם $J \subset I$, $t_1, t_2 \in I$, ואז גם $(t_1, t_2) \in I$ מכיוון ש-I הוא קטע. לכן לכל t עם $\gamma(t) \notin B(z_0, \varepsilon)$, בפרט $t \notin I$, ובפרט $t \notin (t_1, t_2)$, ולכן $\beta(t) = \gamma(t)$ כנדרש. מצד שני אם $\gamma(t) \in B(z_0, \varepsilon)$ אז בהככרח או $\beta(t) = \gamma(t) \in B(z_0, \varepsilon)$ או $\beta(t) = (1-\lambda)z_1 + \lambda z_2 \in [z_1, z_2] \subset B(z_0, \varepsilon)$, מהקמירות של $B(z_0, \varepsilon)$ והיות z_1, z_2 בתוכו. בשני המקרים מתקיים $\beta(t) \in B(z_0, \varepsilon)$, כנדרש.

מההגדרה ברור כי β רציפה בקטעים הסגורים $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, 1]$ (מהרציפות של γ ושל הפונקציה הלינארית), וכן ש- $\beta(0) = \gamma(0) = \gamma(1) = \beta(1)$ ולכן היא לולאה. היא ז'ורדן, כי בצמצום שלה ל-$[0,1] \setminus [t_1, t_2]$ היא מזדהה עם המסילה החח"ע γ , ומהגדרת J, t_1, t_2 רואים שהתמונה של $\beta = \gamma$ בתחום הזה מוכלת ב-$\mathbb{C} \setminus \overline{B}(z_0, \delta)$, ולכן זרה לתמונה של β על התחום $[t_1, t_2]$, שהיא $[z_1, z_2] \subset \overline{B}(z_0, \delta)$, וכמובן ש-$\beta$ חח"ע גם בתחום זה. ולסיום ברור ש-β קוואזיפוליגונאלית, היות שהצמצום שלה ל-$[t_1, t_2]$ הינו פונקציה לינארית.

(3) משפט קושי ההומוטופי תקף גם עבור פונקציה g שגזירה בכל התחום למעט בנקודה אחת, בה היא רק רציפה (ובעצם בהכרח גזירה בה); הפונקציה $g(z) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ היא פונקציה כזו, עם רציפות בלבד בנקודה $z = w$. לכן מהמשפט נקבל

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau i}\int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)}{z-w} &= \frac{1}{\tau i}\left(\int_{\partial B(0,r)} \frac{f(w)}{z-w} + \int_{\partial B(0,r)} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\right) \\ &= \frac{1}{\tau i}\left(f(w)\int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{z-w} + 0\right) = f(w)\,\mathrm{Ind}_{\partial B(0,r)}(w) = f(w)\end{aligned}$$

כנדרש.

(4) (א) אכן, הן הומוטופיות באמצעות ההומוטופיה הקמורה $\gamma_s(t) = \gamma_0(t) \cdot (1 + s\frac{1-|\gamma_0(t)|}{|\gamma_0(t)|})$. זוהי הומוטופיה של לולאות עם קצוות חופשיים.

(ב) γ רציפה על הקטע הקומפקטי $[0,1]$, לכן רציפה במ"ש, ובפרט קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta$ אז $|\gamma(x) - \gamma(y)| < 2$. אך אז נקבל שלכל $j \in J$, $I_j = (t_1, t_2)$ עם $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = 1$ וגם קיים $t \in (t_1, t_2)$ עם $\gamma(t) = -1$, לכן $|t_2 - t|, |t - t_1| \geq \delta$ ובפרט $t_2 - t_1 = (I) \geq 2\delta$. מכיוון שהקטעים I_j זרים, האורך של $[0,1]$ הוא סכום האורכים שלהם; מכיוון שהוא סופי ושווה ל-1, אך גם לפחות $2\delta|J|$, נקבל $|J| \leq \frac{1}{2\delta}$, כנדרש.

(ג) מכיוון ש-$\{I_j : j \in J\}$ היא קבוצה סופית של קטעים פתוחים זרים, המשלים שלה היא אכן איחוד זר של מספר סופי של קטעים סגורים זרים (חלקם אולי מנוונים, כלומר נקודה מבודדת), ומספרם אף אינו עולה על $|J|+1$. בכל אחד מהקטעים הסגורים האלה L_k, הפונקציה מקבלת את הערך 1 בקצוות (כי קצוותיהם הם בהכרח קצוות של הקטעים I_j), ולא מקבלת את הערך -1 באף מקום. לכן ההומוטופיה הקמורה לפונקציה הקבועה היא עם קצוות קבועים על 1, ולא עוברת דרך 0, כי לכל $\lambda \in S^1 \setminus \{-1\}$ מתקיים $[\lambda, 1] \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, כלומר זו הומוטופיה ב-$\mathbb{C} \setminus \{0\}$, כנדרש.

(ד) עבור אותו δ מסעיף (ב), נקבל שבקטעים $(s_j, s_j+\delta), (t_j-\delta, t_j)$ המסילה לא מקבלת את הערכים ± 1, כלומר התמונה של $\beta_j = \alpha^{-1} \circ \gamma$ עליהם מוכלת ב-$(0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$, ולכן מרציפות β_j, למעשה מוכלת ב-$(0, \frac{1}{2})$ או ב-$(\frac{1}{2}, 1)$. כיוון ש-$\alpha \circ \beta_j(s_j) = \alpha \circ \beta_j(t_j) = 1$ ורציפה בהן, ו-$\alpha^{-1}(1) = \{0, 1\}$ נקבל שהגבולות של β_j ב-s_j, t_j אכן קיימים, ונקבעים על פי האם הסביבה החד-צדדית המתאימה ממופה לתוך $(0, \frac{1}{2})$ או $(\frac{1}{2}, 1)$, ואז הגבולות הם 0 או 1 בהתאמה.

כעת, נתבונן בפונקציה הלינארית $\widetilde{\beta} : [s_j, t_j] \to [0,1]$ המקיימת $\widetilde{\beta}(s_j) = \beta_j(s_j)$ ו-$\widetilde{\beta}(t_j) = \beta_j(t_j)$, שיכולה להיות קבועה 0, קבועה 1, לעלות מ-0 ל-1 או לרדת מ-1 ל-0. בכל המקרים, מהקמירות של $[0,1]$ מקבלים ש-$\beta_j, \widetilde{\beta}$ הומוטופיות זו לזה על ידי ההומוטופיה הקמורה. כשנרכיב על ההומוטופיה הזו את α, נקבל ש-$\gamma|_{I_j} = \alpha \circ \beta_j$ הומוטופית ל-$\alpha \circ \widetilde{\beta}$ – שהיא אכן פשוט המסילה הקבועה 1, או המסילה α, או המסילה $-\alpha$, מואצות לקטע I_j במקום $[0,1]$, והמקרים הללו בדיוק מתאימים לתיאור בשאלה.

(ה) ביצענו רק מספר סופי של הומוטופיות: אחת בכל קטע I_j עם $j \in J$, אחת בכל קטע L_k. בנוסף כל ההומוטופיות הללו שמרו את הקצוות של הקטעים במקום, ולכן אינן מפריעות אחת לשנייה וניתן לבצע אותן בו זמנית. המסילה שמתקבלת היא אכן שרשור של $\alpha, -\alpha$ וקבועות בקצבים ומהירויות משתנות; אך מכיוון שמסילות במהירויות שונות הן הומוטופיות, מקבלים שזהו פשוט הומוטופי לשרשור סטנדרטי של $\alpha, -\alpha$ וקבועים, שהוא אכן $n\alpha$ מהגדרה.

(5) (א) לפי נוסחת קושי לנגזרת, מתקיים

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{\tau i} \int_{\partial B(z_0, R)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

מהגדרת M מתקיים $|f(z)| \leq M$ על המעגל, ולכן $|\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}| \leq \frac{M}{R^{n+1}}$. אורך המעגל הוא τR. לכן האינטגרל כולו חסום על ידי $\frac{M}{R^{n+1}} \tau R = \frac{\tau M}{R^n}$ והנגזרת חסומה על ידי $|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{\tau} \frac{\tau M}{R^n} = M \frac{n!}{R^n}$, כנדרש.

(ב) תהא f פונקציה שלמה עם $f(z) = o(|z|^n)$. יהא z_0 כלשהו, אז גם $f(z+z_0) = o(|z|^n)$, כלומר לכל ε קיים R כך שלכל $|z| \geq R$ מתקיים $|f(z+z_0)| < \varepsilon R^n$, ובפרט $|f(z)| \leq M = \varepsilon R^n$ עבור $z \in \partial B(z_0, R)$, ולכן מסעיף (א) נקבל $|f^{(n)}(z_0)| \leq M \frac{n!}{R^n} = \varepsilon \cdot n!$. היות שזה נכון לכל $\varepsilon > 0$, בהכרח נקבל $f^{(n)}(z_0) = 0$, לכל $z_0 \in \mathbb{C}$, כלומר $f^{(n)} \equiv 0$, ולכן f פולינום ממעלה קטנה מ-n, כנדרש.

(ג) יהא n טבעי. נבחר $r < 1$ כלשהו. על פי הנתון, על המעגל $\partial B(0, r)$ הפונקציה חסומה על ידי $M = \frac{1}{1-r}$. לכן על פי הסעיף הראשון, מתקיים $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{1}{1-r} \frac{n!}{r^n}$. כעת נבחר $r = \frac{n}{n+1}$, ונקבל

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{1}{1-r} \frac{n!}{r^n} = (n+1) \frac{n!}{(\frac{n}{n+1})^n} = (n+1)! \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

כנדרש.

הערה: קל לראות שזו הייתה הבחירה האופטימלית של r, למשל על ידי גזירת המכנה $r^n(1-r)$.

(6) (א) בלי הגבלת הכלליות, על ידי הרכבה על פונקציה לינארית, ניתן להניח כי נקודת ההצטברות של Z היא $z_0 = 0$. נניח בשלילה ש-f אינה זהותית 0. אזי היא גם אינה קבועה, כי $f(0) = 0$, ולכן היא רגולרית ב-0, ונכתוב $f(z) = z^k g(z)$ עם $k \geq 0$ ו-g גזירה עם $g(0) \neq 0$. אך מרציפות g נקבל שעבור $\delta > 0$ לכל $z \in B(0, \delta)$ מתקיים $|g(z) - g(0)| < \frac{|g(0)|}{2}$ ובפרט $|g(z)| > \frac{|g(0)|}{2}$ ולכן $g(z) \neq 0$, ואז $f(z) \neq 0$ לכל $z \in B(0, \delta) \setminus \{0\}$, כלומר $Z \cap B(0, \delta) = \{0\}$, בסתירה לכך ש-$0$ נקודת הצטברות של Z.

(ב) הפונקציה $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ גזירה בכל $\mathbb{C}$. בנוסף מתקיים לכל $z \in \mathbb{R}$, $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{f(z)} = f(z)$, כי גם $f(z) \in \mathbb{R}$. כלומר הפונקציה $f - g$ גזירה בכל $\mathbb{C}$ ומתאפסת על כל $\mathbb{R}$. מכיוון ש-$\mathbb{R}$ מכילה נקודות הצטברות, משפט היחידות גורר ש-$f = g$ זהותית בכל $\mathbb{C}$, כלומר $f(\overline{z}) = \overline{g(z)} = \overline{f(z)}$, כנדרש.

(ג) נשים לב ש-$g(z)=f(1/z)$ גם גזירה בכל $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, ומתקיים לכל $|z|=1$, $(f+g)(z)=f(z)+f(1/z)=f(z)+f(\overline{z})=0$ מהנתון. מכיוון שבמעגל היחידה יש נקודות הצטברות ו-$f+g$ גזירה, קיבלנו ש-$f+g$ זהותית אפס על כל $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, כלומר

$$f(\overline{z})=f(|z|^2/z)=-g(|z|^2/z)=-f(z/|z|^2)$$

כנדרש.

(7) על פי משפט מוררה, על מנת להוכיח ש-f גזירה בכל המישור, די להוכיח שהאינטגרל של f על פני כל מצולע סגור מתאפס. נשים לב שהדבר נכון לכל מצולע γ המוכל ב-$\mathbb{H}$, שכן $f=g$ גזירה בתחום הזה על פי הנתון. מכאן שזה גם מתקיים לכל מצולע $\gamma\subset\overline{\mathbb{H}}$, מהרציפות של $f=g$: את האינטגרל על כל מצולע כזה ניתן לכתוב כגבול של אינטגרלים על פני מצולעים שמוכלים ב-$\mathbb{H}$ (כך שהצלע התחתונה שלהם שואפת לצלע התחתונה של γ), אשר כולם מתאפסים – ובזכות הרציפות של f ניתן להחליף את הגבול והאינטגרל. כעת נקבל שגם לכל $\gamma\subset\overline{\mathbb{H}}_-=\{z:\operatorname{Im}(z)\leq 0\}$ האינטגרל מתאפס: ואכן, אם נסמן $\overline{\gamma}(t)=\overline{\gamma(t)}$, אז מתקיים

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_\gamma\overline{g(\overline{z})}dz=\int_\gamma\overline{g(\overline{z})d\overline{z}}=\int_\gamma\overline{g(\overline{z})}\overline{d\overline{z}}=\overline{\int_{\overline{\gamma}}g(w)dw}=\overline{0}=0$$

באשר האינטגרל האחרון מתאפס בשל כך ש-$\overline{\gamma}\subset\overline{\mathbb{H}}$. (שימו לב שמהנתון ש-$g(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$ ומהגדרת f נובע ש-$f(\overline{z})=\overline{f(z)}$ לכל $z\in\mathbb{C}$.) לסיום עבור מצולע $\gamma\subset\mathbb{C}$ כללי שלא מוכל באף אחד מחצאי המישורים, נפצל אותו לשני מצולעים γ_1,γ_2, שאחד הוא חיתוכו עם $\overline{\mathbb{H}}$ והשני עם $\overline{\mathbb{H}}_-$ – זה יוסיף לשפות המצולע קטע על הציר הממשי, אשר ילקח בכיוון אחד ב-γ_1 ובכיוון ההפוך לו ב-γ_2, ולכן יתבטל בחישוב האינטגרל, ונקבל מהתוצאות הקודמות $\int_\gamma f(z)dz=\int_{\gamma_1}f(z)dz+\int_{\gamma_2}f(z)dz=0+0=0$, כנדרש.

(8) (א) נסמן $g(z)=f(z)-\frac{a}{z}-\frac{b}{z^2}$. זוהי כמובן גם פונקיצה גזירה בסביבה מנוקבת U של 0. נשים לב שהנתון שקול לכך ש-$\lim_{z\to 0}zg(z)=0$, ולכן על פי משפט, ל-g יש קדומה ב-U, נסמנה G. לכן גם ל-$f(z)-\frac{a}{z}=g(z)+\frac{b}{z^2}$ יש קדומה ב-U, שהיא $G-\frac{b}{z}$ – ומכאן ש-$a=\operatorname{Res}(f,0)$, על פי הגדרת השארית.

(ב) בדומה לסעיף הקודם, נקבל שהפונקציה $g(z)=f(z)-\frac{p(z)}{z^{n+1}}$ מקיימת $\lim_{z\to 0}zg(z)=0$ ולכן השארית שלה היא 0, ולכן יש לה קדומה בסביבה מנוקבת; גם לפונקציה $\frac{p(z)-a_nz^n}{z^{n+1}}=\sum_{k=0}^{n-1}a_kz^{k-n-1}$ יש קדומה שהיא $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{k-n}z^{k-n}$; ולכן מחיסור הקדומות נקבל של-$f(z)-\frac{a_nz^n}{z^{n+1}}=f(z)-a_nz^{-1}$ יש קדומה בסביבה מנוקבת של 0, ושוב זה בדיוק אומר שהשארית של f היא a_n.

(ג) יהא $p(z)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$ פולינום טיילור מסדר n של f. מתקיים $f(z)-p(z)=o(z^n)$, ולכן עבור הפונקציה $\frac{f(z)}{z^{n+1}}$ מתקיים $z\frac{f(z)}{z^{n+1}}-\frac{p(z)}{z^n}=\frac{f(z)-p(z)}{z^n}=o(1)$, ולכן מהסעיף הקודם $\operatorname{Res}(\frac{f(z)}{z^{n+1}},0)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, כלומר

$$f^{(n)}(0)=n!\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{n+1}},0\right)=\frac{n!}{\tau i}\int_{\partial B(0,r)}\frac{f(z)}{z^{n+1}}$$

כנדרש.

(9) (א) יש סינגולריות רק ב-0. נפתח את f לטור:

$$f(z)=\frac{e^{-z}}{z^2}=\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^\infty\frac{(-z)^n}{n!}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}+\sum_{n=2}^\infty\frac{(-z)^{n-2}}{n!}$$

ולכן השארית היא $\operatorname{Res}(f,0)=-1$ (המקדם של z^{-1} בטור). מכיוון ש-$\operatorname{Ind}_0\gamma=1$, נקבל שהאינטגרל הוא $I=-\tau i$.

(ב) יש סינגולריויות ב-$z=0,2$ בלבד, והמסילה מקיפה את שתי הנקודות עם אינדקס 1. אפשר לחשב את השאריות בכל אחת מהנקודות, אך במקום זאת נחשב באמצעות השארית באינסוף: לפי (2ד), רואים ישירות מביטוי השבר שהשארית באינסוף היא -1, ולכן האינטגרל על פני γ הוא $I=-\tau i\operatorname{Res}(f,\infty)=\tau i$.

(ג) יש סינגולריויות ב-$0,4$ בלבד. נשים לב שקיים גבול $\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{2z}}{(z-4)^2}=\frac{1}{16}$, ולכן בהכרח $\operatorname{Res}(f,0)=1/16$. נשים לב שמתקיים $\operatorname{Ind}_0\gamma=1$ אך $\operatorname{Ind}_4\gamma=0$, ולכן אין בכלל צורך לחשב את השארית ב-4, ונקבל פשוט $I=\tau i\operatorname{Res}(f,0)=\frac{\tau i}{16}$.

(10) (א) בהתאם לרמז, נשים לב ש-$\cos(x) = \mathrm{Re}(e^{ix})$, ולכן

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}(e^{ix})}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$$

ונסמן $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$, גזירה בכל המישור המרוכב למעט בסינגולריויות $\pm ai, \pm bi$. בנוסף נשים לב שכאשר $|z| \to \infty$ ו-$\mathrm{Im}(z) \geq 0$, מתקיים $f(z) = O(|z|^{-4}) = o(|z|^{-1})$, ולכן אינטגרל על חצי מעגל $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ עבור $\theta \in [0, \tau/2]$ – המוכל בחצי-המישור העליון – ישאף לאפס כאשר $R \to \infty$.
לכן כמו בסעיף הקודם, נקבל

$$I = \mathrm{Re}\left(_{R\to\infty}\int_{[-R,R]+\gamma_R} f(z)dz\right) = \mathrm{Re}((\tau i)(\mathrm{Res}(f, ai) + \mathrm{Res}(f, bi)))$$

כאשר השיוויון האחרון נכון החל מ-$R > a > b$. בשאלה זו הקטבים הם פשוטים, אז קל לחשב את השאריות:

$$\mathrm{Res}(f, ai) = \lim_{z\to ai}(z-ai)f(z) = \frac{e^{-a}}{(2ai)(b^2-a^2)}$$

$$\mathrm{Res}(f, bi) = \lim_{z\to bi}(z-bi)f(z) = \frac{e^{-b}}{(2bi)(a^2-b^2)}$$

לכן

$$(\tau i)(\mathrm{Res}(f, ai) + \mathrm{Res}(f, bi)) = \frac{\tau}{2(a^2-b^2)}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right)$$

מכיוון שזה מספר ממשי,זהו גם הערך של I.

(ב) נתבונן בתחום שהוגדר ברמז, $U(r,R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, \mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z) > 0\}$. השפה שלו מורכבת מ-4 מסילות: הקטע הממשי $[-r, R]$, רבע מעגל γ_R ברדיוס R נגד כיוון השעון, הקטע המדומה $[Ri, ri]$, ורבע מעגל γ_r ברדיוס r עם כיוון השעון. מחשבים את האינטגרל של הפונקציה $f(z) = \frac{\mathrm{Log}(z)}{z^2-1}$ לאורך השפה. נשים לב שמכיוון ש-$|\mathrm{Log}(z)|$ גדל הרבה יותר לאט מ-z, מתקיים $|f(z)| = o(|z|^{-1})$ כאשר $|z| \to \infty$, ולכן האינטגרל על γ_R שואף ל-0 כאשר $R \to \infty$. בדומה, מכיוון שמתקיים $|z\,\mathrm{Log}(z)| \to 0$ כאשר $z \to 0$, הרי שהאינטגרל על γ_r שואף ל-0 כאשר $r \to 0^+$. האינטגרל על $[r, R]$ שואף לאינטגרל שאנו מעוניינים בו, I, כאשר r, R שואפים לקצוות, ואילו האינטגרל על $[iR, ir]$ הוא

$$\int_{[iR,ir]} f(z)dz = \int_R^r \frac{\mathrm{Log}(ix)}{-x^2-1}(i\cdot dx) = i\int_r^R \frac{\log(x)+\frac{\tau}{4}i}{x^2+1}dx$$
$$\xrightarrow[R\to\infty, r\to 0^+]{} -\frac{\tau}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} + i\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}dx = I'$$

כעת נשים לב של-f אין בכלל סינגולריויות בתוך U – המכנה מתאפס רק עבור $z = 1$, אך זו סינגולריות סליקה, כי קיים הגבול $\lim_{z\to 1} f(z)$ (המונה $\mathrm{Log}(z)$ גם מתאפס). בפרט, הסכום של ארבעת האינטגרלים תמיד שווה ל-0, ולכן בהכרח $I = -I'$. נשים לב ש-I הוא ממשי (כי אינטגרל של פונקציה ממשית), ולכן גם I' ממשי, כלומר החלק המדומה שלו הוא $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2} = 0$, וקיבלנו

$$I = -I' = \frac{\tau}{4}\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\tau}{4}\arctan(x)|_0^\infty = \left(\frac{\tau}{4}\right)^2$$

כנדרש.