תורת הפונקציות המרוכבות 1 - תרגיל בית מספר 5
תאריך הגשה: 16.8.2018

(1) חשבו את השאריות $\mathrm{Res}(f,z_0)$ לפונקציות ונקודות הבאות:

(א) $f(z)=z^ne^{1/z}, z_0=0$, לכל $n\in\mathbb{Z}$.

(ב) $f(z)=z^{-n}e^{z^2/2}, z_0=0$, לכל $n\in\mathbb{Z}$.

(ג) $f(z)=\frac{z}{\sin(z)}, z_0=n\frac{\tau}{2}$.

(ד) $f(z)=\frac{1}{\sin(z)-z}, z_0=0$.

(2) תהא f גזירה בכל המישור למעט קב' סופית של נקודות סינגולריות $S=\{z_i\}_{i=1}^n$. הזכרו בהגדרת השארית באינסוף: $\mathrm{Res}(f,\infty)=-\frac{1}{\tau i}\int_{\partial B(0,R)}f$, עבור $R>\max\{|z_1|,\ldots,|z_n|\}$.

(א) הראו כי אם $f(z)=o(|z|^{-1})$ כאשר $z\to\infty$ אז $\mathrm{Res}(f,\infty)=0$. הסיקו שאם קיים הגבול $\lim_{z\to\infty}zf(z)=a$, אז $\mathrm{Res}(f,\infty)=-a$.

(ב) הראו כי עבור הפונקציה $g(z)=-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$ מתקיים $\mathrm{Res}(f,\infty)=\mathrm{Res}(g,0)$. בדקו את נכונות הנוסחה ישירות עבור $f(z)=z^n$ לכל $n\in\mathbb{Z}$.

(ג) נסמן $S'=S\cup\{\infty\}$. הראו כי $\sum_{z\in S'}\mathrm{Res}(f,z)=0$.

(3) חשבו את $\displaystyle\int_\gamma\frac{2z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}dz$ עבור

(א) $\gamma=\partial B(0,4)$ עם אוריינטציה חיובית.

(ב) $\gamma=\partial B(2,2)$ עם אוריינטציה חיובית.

(4) חשבו את $\displaystyle\int_\gamma\frac{dz}{z^3(z+4)}$ עבור

(א) $\gamma=\partial B(-2,3)$ עם אוריינטציה חיובית.

(ב) $\gamma=\partial B(0,2)$ עם אוריינטציה חיובית.

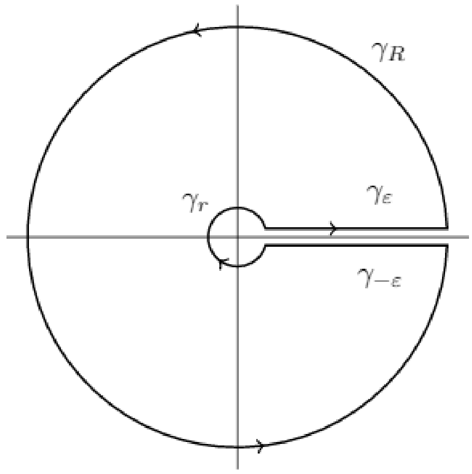
(5) חשבו את האינטגרלים הממשיים הבאים:

(א) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{x^2}{(x^2+9)^2(x^2+4)}dx$

(ב) $\int_0^\infty\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}dx$. השתמשו באינטגרל מסלולי על השפה של התחום

$$U(r,R,\varepsilon)=\{z:r<|z|<R,(\mathrm{Re}(z)<0\vee|\mathrm{Im}(z)|>\varepsilon)\}$$

באשר $r>\varepsilon$, בגבולות $R\to\infty$ ו-$r,\varepsilon\to0^+$, כמתואר בתרשים:



הקונטור הזה מכונה קונטור פקמן או קונטור מנעול. הוא קונטור טבעי בשאלה הזו מכיוון של-$z^{1/3}$ אין ענף רציף/גזיר בכל המישור המרוכב, אבל כן ניתן להגדירו אם נתרחק למשל מהממשיים החיוביים. שימו לב שבדיוק בעייתיות זו תגרום לכך שערכי הפונקציה על חלקי המסילות $\gamma_\varepsilon,\gamma_{-\varepsilon}$ יהיו שונים!

(ג) (רשות, לא להגשה) חשבו את אותו האינטגרל, הפעם על ידי חישוב אינטגרל מסלולי על שפת חצי-הטבעת

$$U(r,R)=\{z:r<|z|<R,\mathrm{Im}(z)>0\}$$

בגבול $R\to\infty,r\to0^+$.

(6) השתמשו במשפט רושה על מנת להוכיח את הגרסה הכמותית הבאה של משפט ההעתקה הפתוחה: תהא f פונקציה גזירה על תחום U, ויהא $\overline{B}(z_0,\delta) \subseteq U$. נניח כי מתקיים $|f(z)-f(z_0)| \geq \alpha$ לכל $z \in \partial B(z_0,\delta)$, עבור $\alpha > 0$ מסוים. הוכיחו כי $f(B(z_0,\delta)) \supseteq B(f(z_0),\alpha)$.
<u>הערה:</u> בתרגיל 1 שאלה 1 הוכחנו טענה דומה ישירות, אך הצלחנו להגיע רק לרדיוס $\frac{\alpha}{2}$, ולא עד α. משפט רושה מאפשר לנו להוכיח את הטענה החזקה יותר. טענה זו גם הדוקה, כלומר, באופן כללי לא ניתן להבטיח שהתמונה תכיל כדור ברדיוס גדול יותר מ- $\alpha = \min\{|f(z)-f(z_0)| : |z-z_0| = \delta\}$. ודאו שעבור פונקציה לינארית $f(z) = cz$ ו-$z_0 = 0$, זה אכן הרדיוס המקסימלי.

(7) (א) מצאו את מספר הפתרונות של $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$ עבור $1 < |z| < 2$.
(ב) הראו שכל השורשים של $P(z) = z^8 - 4z^3 + 10$ נמצאים ב-$1 < |z| < 2$.
(ג) יהא $c \in \mathbb{C}$ המקיים $|c| > e$, ויהא n טבעי. הוכיחו כי למשוואה $e^z = cz^n$ יש n פתרונות שונים בכדור $|z| < 1$.

(8) הוכיחו כי לא ניתן לקרב את הפונקציה $f(z) = \overline{z}$ על מעגל היחידה על ידי פולינומים. ספציפית, הראו כי אם $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ פולינום כלשהו, אז בהכרח קיים z עם $|z| = 1$ עבורו $|p(z) - f(z)| \geq 1$.

(9) יהא n טבעי. נניח כי הפונקציות הגזירות $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ מקיימות $f^n + g^n = 1$ בכל המישור.
(א) יהיו $\mu_1, \ldots, \mu_n$ הפתרונות של המשוואה $z^n = -1$. וודאו שלכל $z \in \mathbb{C}$ ולכל k מתקיים $f(z) \neq \mu_k g(z)$, או במילים אחרות, שהפונקציה $f(z) - \mu_k g(z)$ אף פעם לא מתאפסת.
(ב) הראו שהפונקציה $h(z) = \frac{g(z)}{f(z)-\mu_1 g(z)}$ היא אנליטית בכל $\mathbb{C}$, ומפספסת $n-1$ ערכים (מצאו אותם!). עבור $n \geq 3$, הסיקו מכאן ש-h בהכרח קבועה, ומכך הסיקו ש-f, g גם חייבות להיות קבועות.
הערה: עבור $n = 2$ קיימות פונקציות לא קבועות שפותרות את המשוואה. אפיינו באופן מלא את משפחת הפונקציות הזו בתרגיל 3, שאלה (4ב).

(10) תהנא $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ אנליטיות, ונניח כי לכל $i \neq j$ הפונקציה $f_i - f_j$ אינה קבועה. הראו כי הפונקציות $e^{f_1}, e^{f_2}, e^{f_3}$ בלתי תלויות לינארית, כלומר שלא קיימים קבועים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ לא כולם 0 עבורם $\sum \alpha_i e^{f_i(z)} = 0$ לכל $z \in \mathbb{C}$.

(11) יהא $U \subsetneq D$ תחום עם $0 \in U$ ובעל תכונת השורש הריבועי: לכל פונקצייה גזירה $f : U \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ קיים שורש אנליטי, כלומר פונקציה גזירה $g : U \to \mathbb{C}$ עם $f = g^2$. בתרגיל זה נוכיח שקיימת פונקציה גזירה חח"ע $f : U \to D$ המקיימת $f(0) = 0$ ו-$|f(z)| > |z|$ לכל $z \neq 0$.
נסמן לכל $a \in D$, $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. כזכור, ϕ_a הינה העתקת מביוס הממפה את D לעצמו באופן חח"ע ועל, ושולחת את a ל-0 ואת 0 ל-$-a$. בנוסף מתקיים $\phi_{-a} = \phi_a^{-1}$.
(א) יהא $a \in D \setminus U$, ויהא b אחד משני השורשים של $-a$. נגדיר $q(z) = \phi_{-a}(\phi_{-b}(z)^2)$ לכל $z \in D$. השתמשו בהצבות ובלמה של שוורץ כדי להראות ש-$|q(z)| < |z|$ לכל $z \in D \setminus \{0\}$.
(ב) שימו לב ש-$\phi_a : U \to D$ לא מתאפסת, ולכן ניתן מההנחה למצוא לה שורש אנליטי g. הראו שניתן לבחור את g כך ש-$g(0) = b$, וכי הטווח של g מוכל ב-D.
(ג) נגדיר $f = \phi_b \circ g : U \to D$. הראו כי $f(0) = 0$ וכן $q(f(z)) = z$ לכל $z \in U$. הסיקו מכאן ומסעיף (א) ש-f מקיימת את כל התכונות המבוקשות.
(ד) עבור התחום $V = D \setminus \{p\}$, $0 \neq p \in D$, הראו שלא קיימת f עם התכונות הנ"ל (רמז: משפט ההשלמה של רימן). הראו שהתחום לא מקיים את תכונת השורש הריבועי גם על ידי דוגמה מפורשת של פונקציה שאין לה שורש.