תורת הפונקציות המרוכבות 1 - פתרון תרגיל בית מספר 5

(1) (א) נשים לב כי $e^{1/z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!z^m}$ הוא טור לורן שמתכנס לכל $z \neq 0$ (ובמ"ש הרח על קומפקטיים ב-$\mathbb{C} \setminus \{0\}$), ממש כפי שקורה עבור e^z. לכן גם $z^n e^{1/z} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^{n-m}$ הוא טור לורן שמתכנס לכל $z \neq 0$. לכן השארית ב-$z_0 = 0$ היא המקדם של z^{-1} בטור, ששווה ל-$\frac{1}{(n+1)!}$ אם $n \geq -1$ ו-0 אם $n < -1$.

(ב) נפתח לטור לורן באמצעות הטור של האקספוננט:

$$z^{-n} e^{z^2/2} = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z^2/2)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m-n}}{2^m m!}$$

טור שמתכנס בכל $z \neq 0$. השארית ב-0 היא המקדם של z^{-1}, כלומר שמתאים ל-$2m - n = -1$, כלומר $m = \frac{n-1}{2}$. לכן השארית היא 0 עבור n זוגי או שלילי, ועבור אי-זוגיים חיוביים נקבל שהשארית היא $\frac{1}{2^{(n-1)/2}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$.

(ג) מתקיים $\sin(z_0 + z) = \sin(z + n\frac{\tau}{2}) = (-1)^n \sin(z)$, ולכן

$$f(z_0 + z) = (-1)^n \frac{z + z_0}{\sin(z)} = (-1)^n \left(\frac{n\tau}{2\sin z} + \frac{z}{\sin(z)} \right)$$

מכיוון ש-$\sin(z) = z + O(z^3)$ בסביבה של 0, נקבל ש-$\frac{z}{\sin(z)}$ ניתנת להמשכה בגזירות ל-$z = 0$ ובפרט יש לה שארית 0 שם, ושל-$\frac{n\tau}{2\sin(z)}$ יש קוטב פשוט עם שארית $\frac{n\tau}{2\sin'(0)} = n\frac{\tau}{2}$; ובסה"כ נקבל

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = (-1)^n n \frac{\tau}{2}.$$

(ד) מתקיים $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)$, ולכן $\sin(z) - z = -\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)$, כלומר,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(z) - z} &= \frac{1}{-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + O(z^7)} = -\frac{6}{z^3} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{20} + O(z^4)} \\ &= -\frac{6}{z^3} \left(1 + \frac{z^2}{20} + O(z^4) \right) = -\frac{6}{z^3} - \frac{3}{10z} + O(z) \end{aligned}$$

באשר ה-$O(z)$ הוא טור חזקות אנליטי בעל רדיוס התכנסות חיובי. לכן זוהי ההתחלה של טור לורן של הפונקציה בסביבה מנוקבת של 0, בה יש לפונקציה קוטב מסדר 3, והשארית היא המקדם של z^{-1}, כלומר $-\frac{3}{10}$.

הערה: כשאנו מתחילים לפתור את השאלה, לא בהכרח ברור מראש לאיזה סדר צריך לפתח את הטורים בהם משתמשים, אבל ניתן לפתור זאת על ידי ניסוי וטעייה, או התחלה עם פיתוחים ארוכים מספיק. למשל, אם היינו מתחילים בפיתוח $\sin(z) = z + O(z^3)$, היינו מקבלים רק שהפונקציה היא $\frac{1}{O(z^3)}$, וזה לא ממש אומר כלום. אם היינו מקרבים $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + O(z^5)$, כבר היינו מקבלים שלפונקציה יש קוטב מסדר בדיוק 3 ב-0, וזה גם היה מראה לנו שבשביל המקדם של z^{-1} בטור נצטרך את המקדם של z^2 בטור של $\frac{\sin(z) - z}{z^3}$, כלומר נצטרך לפתח את sin עד למקדם של z^5.

(2) (א) מכיוון ש-f גזירה בכל U, וכל $\gamma_r = \partial B(0, r)$ עבור $r > R$ הומוטופיות זו לזו ב-U, אפשר להחליף את ה-r שמשתמשים בו בחישוב האינטגרל ב-r גדול שרירותית. מתוך הנתון $f(z) = o(|z|^{-1})$ מקבלים שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $r > R$ כך שלכל $|z| \geq r$ מתקיים $|f(z)| < \varepsilon / |z|$. בפרט נקבל שהאינטגרל על פני γ_r הוא לכל היותר

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma_r} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_r} \{|f(z)|\} (\gamma_r) \leq \frac{\varepsilon}{r} \cdot \tau r = \tau \varepsilon$$

זה נכון לכל $\varepsilon > 0$, ולכן בהכרח $\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{-1}{\tau i} \int_\gamma f(z) dz = 0$, כנדרש.

עבור ההכללה, אם מתקיים $\lim_{z \to \infty} z f(z) = a$, אז עבור $g(z) = f(z) - a/z$ מתקיים $\lim_{z \to \infty} z g(z) = 0$, כלומר $g(z) = o(|z|^{-1})$, לכן $\operatorname{Res}(g, \infty) = 0$ ומכאן $\operatorname{Res}(f, \infty) = -a$ מיידית.

(ב) נשים לב שמכיוון ש-f מוגדרת וגזירה בכל $\mathbb{C}\setminus\overline{B}(0,R)$, נובע ש-$g$ מוגדרת וגזירה בדיסק המנוקב $B(0,\frac{1}{R})\setminus\{0\}$. נבצע החלפת משתנה $w=1/z$. אם z נע על המעגל γ_r נגד כיוון השעון, אז w נע על המעגל $\gamma'=\gamma_{1/r}$ עם כיוון השעון. נקבל:

$$\begin{aligned}Res(f,\infty)&=-\frac{1}{\tau i}\int_\gamma f(z)dz=-\frac{1}{\tau i}\int_{\gamma'}f(1/w)\frac{dw}{-w^2}\\&=-\frac{1}{\tau i}\int_{\gamma'}g(w)dw=-\operatorname{Ind}_{\gamma'}(0)\operatorname{Res}(g,0)=\operatorname{Res}(g,0)\end{aligned}$$

עבור הפונקציות $f(z)=z^n$, מתקיים כרגיל $\operatorname{Res}(f,\infty)=0$ לכל $n\neq-1$, ואילו $\operatorname{Res}(f,\infty)=-1$ עבור $n=-1$. הפונקציה המתאימה g היא $g(z)=-\frac{f(1/z)}{z^2}=-z^{-n-2}$, אשר לו שארית -1 ב-0 עבור $-n-2=-1$, ואחרת שארית 0; ואכן מתקיים $-n-2=-1$ אם ורק אם $n=-1$.

(ג) נשים לב כי מההגדרה של U,γ, כל הקטבים הסופיים $z\in S$ של f נמצאים בתוך התחום ש-γ חוסם ומקיף פעם אחת נגד כיוון השעון, כלומר $\operatorname{Ind}_z\gamma=1$ לכל $z\in S$. אזי ממשפט השארית, נקבל

$$-\operatorname{Res}(f,\infty)=\frac{1}{\tau i}\int_\gamma f(z)dz=\sum_{z\in S}\operatorname{Ind}_z\gamma\cdot\operatorname{Res}(f,z)=\sum_{z\in S}\operatorname{Res}(f,z)$$

ואחרי העברת אגפים נקבל בדיוק את הנוסחה הרצויה.

הסבר שני: נסמן $a_z=\operatorname{Res}(f,z)$ ונגדיר פונקציה $g(w)=f(w)-\sum_{z\in S\}}\frac{a_z}{w-z}$. אזי g מוגדרת וגזירה בכל $\mathbb{C}\setminus S$, ומיידי לוודא ש-$\operatorname{Res}(g,z)=0$ לכל $z\in S$. לכן האינטגרל של g על פני כל לולאה סגורה ב-$\mathbb{C}\setminus S$ מתאפס, ונקבל שיש ל-g קדומה גלובאלית בכל $\mathbb{C}\setminus S$, ולכן נקבל גם ש-$\operatorname{Res}(g,\infty)=0$. אולם אז

$$\operatorname{Res}(f,\infty)=\operatorname{Res}(g,\infty)+\sum_{z\in S}\operatorname{Res}(\frac{a_z}{w-z},\infty)=-\sum_{z\in S}a_z$$

כנדרש.

(3) לפונקציה $f(z)=\frac{2z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}$ יש שלוש נקודות סינגולריות: $z=1,z=pm3i$.

(א) המסילה מקיפה את כל הסינגולריויות, ולכן קל יותר לחשב את האינטגרל דרך השארית באינסוף: מתקיים

$$f(z)=\frac{2z^3+2}{(z-1)(z^2+9)}=\frac{2z^3+2}{z^3-z^2+9z-9}=2+\frac{2z^2-18z+20}{z^3-z^2+9z-9}=2+\frac{2}{z}+O(z^{-2})$$

ולכן $\operatorname{Res}(f,\infty)=-2$, והאינטגרל הוא $2\tau i$.

(ב) המסילה מקיפה רק את הסינגולריות ב-$z=1$ (עם אינדקס 1), ונחשב את השארית שם: קיים הגבול $\lim_{z\to1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to1}\frac{2z^3+2}{z^2+9}=\frac{2}{5}$ ולכן האינטגרל הוא $I=\tau i\operatorname{Res}(f,1)=\frac{2\tau i}{5}$.

הערה: בסעיף (א) אפשר גם לחשב את השאריות ב $z_0=\pm3i$ בצורה דומה, לפי הגבול $\lim z\to z_0(z-z_0)f(z)$. זה עובד, ואחרי חישוב מייגע למדי, מקבלים $\operatorname{Res}(f,\pm3i)=\frac{4}{5}\pm\frac{41}{15}i$, בתקווה שלא קורות טעויות חישוב בדרך, ואכן מתקיים $2=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}$. סעיף (א) הוא דוגמה טובה לכך שלפעמים ממש כדאי לקחת את קיצור הדרך של השארית באינסוף.

(4) הסינגולריויות הן בבירור ב-$0,-4$.

(א) המסילה מקיפה את כל הסינגולריויות, לכן אפשר לחשב את האינטגרל דרך השארית באינסוף. בבירור מתקיים $f(z)=O(|z|^{-4})=o(|z|^{-1})$ כאשר $z\to\infty$, ולכן מתקיים $\operatorname{Res}(f,\infty)=0$, ולכן גם האינטגרל מתאפס.

(ב) המסילה מקיפה רק את הסינגולריות ב-0, אז צריך לחשב את השארית שם. מכיוון שהקוטב הוא לא פשוט אלא מסדר 3, אי אפשר לחשב פשוט מתוך גבול. נחשב בשתי דרכים:

דרך ראשונה: באמצעות טור חזקות: נשים לב שאת $\frac{1}{z+4}$ אפשר לפתח לטור חזקות בסביבה של 0 (בכדור עד רדיוס 4), כך:

$$\frac{1}{z+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+z/4}=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^\infty\left(-\frac{z}{4}\right)^n$$

ולכן

$$f(z)=\frac{1}{z^3(z+4)}=\frac{1}{4z^3}\sum_{n=0}^\infty\left(-\frac{z}{4}\right)^n=\frac{1}{4z^3}-\frac{1}{16z^2}+\frac{1}{64z}+\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^{n+3}}{4^{n+4}}z^n$$

ומכאן שהשארית היא המקדם של z^{-1}, כלומר $\text{Res}(f,0)=\frac{1}{64}$, ולכן האינטגרל שווה $\frac{\tau i}{64}$.
דרך שנייה: נשים לב שכבר חישבנו $\text{Res}(f,\infty)=0$ בקלות, ולכן נקבל $\text{Res}(f,0)=-\text{Res}(f,-4)$, ולכן אם נדע את השארית ב--4 נקבל בקלות את השארית ב-0. ואכן, את שארית זו יותר פשוט לחשב, כי זה קוטב פשוט, וקיים הגבול: $\lim_{z\to -4}(z+4)f(z)=\lim_{z\to -4}\frac{1}{z^3}=-1/64$, ולכן $\text{Res}(f,-4)=-1/64$ ו-$\text{Res}(f,0)=1/64$. לחילופין, אפשר לחשוב על הפתרון האחרון כחישוב של האינטגרל באמצעות הסינגולריויות שמחוץ לתחום החסום במקום אלה שבתוכו (-4 ואינסוף). בדוגמה זו רואים שלפעמים יותר קל לחשב את השאריות דווקא בקבוצה שיש בה יותר שאריות, אם הן יותר פשוטות, ואולי זה עדיף.

(5) (א) נסמן $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+9)^2(z^2+4)}$. נשים לב של-$f$ יש סינגולריויות ב-$z=\pm 2i,\pm 3i$ בלבד. בנוסף נשים לב ש-f פונקציה זוגית, ולכן מתקיים $I=\int_0^\infty f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$, ונחשב את האינטגרל על התחום הנ"ל. בנוסף נשים לב ש-$f(z)=O(|z|^{-4})=o(|z|^{-1})$, ולכן אינטגרל של f לאורך חצי מעגל $\gamma_R(\theta)=Re^{i\theta}$ עבור $\theta\in[0,\frac{\tau}{2}$ בהכרח שואף ל-0 כאשר $R\to\infty$, ולכן

$$I=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}f(x)dx=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]+\gamma_R}f(z)dz=\frac{\tau i}{2}(\text{Res}(f,2i)+Res(f,3i))$$

באשר המעבר האחרון נובע מכך שלמסילה $[-R,R]+\gamma_R$ יש אינדקס 1 מסביב ל-$2i,3i$ (עבור $R>3$) ו-0 מסביב ל-$-2i,-3i$. נותר לחשב את השאריות:

$$\text{Res}(f,2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{(z^2+9)^2(z+2i)}=\frac{-4}{5^2\cdot 4i}=\frac{i}{25}$$

החישוב של השארית ב-$3i$ הוא מסובך יותר, שכן הקוטב הוא לא פשוט אלא מסדר 2. נתאר שתי דרכים לעשות זאת: ראשית נסמן $g(z)=f(z)(z-3i)^2=\frac{z^2}{(z^2+4)(z+3i)^2}$, שהיא פונקציה שמוגדרת וגזירה ב-$3i$, ולא מתאפסת בו, כך ש-$f(z)=\frac{g(z)}{(z-3i)^2}$. נשים לב שאם נפתח את g לטור טיילור מסביב ל-$3i$, כלומר $g(z)=\sum_{n=0}\frac{g^{(n)}(3i)}{n!}(z-3i)^n$, אז השארית של f ב-$3i$ תגיע מתוך המקדם של $(z-3i)^1$, כלומר $g'(3i)$, שזה ביטוי בר חישוב, אם כי תוך מידה מסוימת של עבודה. כדי להקל עלינו קצת, נחשב במקום זאת את $g(3i)=\frac{(3i)^2}{(3i)^2+4)(6i)^2}=\frac{-9}{(-5)(-36)}=\frac{-1}{20}$, ואת $\frac{g'(3i)}{g(3i)}$ – אותו נעים יותר לחשב, כי מדובר בנגזרת לוגריתמית, והמכפלות הופכות לחיבור, ואכן:

$$\frac{g'(z)}{g(z)}=\frac{2}{z}-\frac{2z}{z^2+4}-\frac{2}{z+3i}$$

ולכן $\frac{g'(3i)}{g(3i)}=\frac{2}{3i}-\frac{6i}{-5}-\frac{2}{6i}=i(-\frac{2}{3}+\frac{6}{5}+\frac{1}{3})=\frac{13i}{15}i$ ולכן $\text{Res}(f,3i)=g'(3i)=\frac{13}{15}g(3i)=-\frac{13i}{300}$.
דרך שנייה: כמקודם, נעבוד עם g. כדי לפשט את הביטויים בטור טיילור, אפשר להזיז את המרכז על ידי החלפת משתנה $w=z-3i$, כך שהטור יהיה בחזקות של w. מכיוון ש-$z=w+3i$, נקבל

$$g(w)=\frac{(w+3i)^2}{((w+3i)^2+4)(w+6i)^2}=\frac{w^2+6iw-9}{(w^2+6iw-5)(w^2+12iw-36)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}}{n!}w^n$$

ושוב אנו מעוניינים להבין את המקדם של w בטור. מכאן שכל הביטויים מסדר גודל w^2 ומעלה לא מעניינים אותנו - הם לא יוכלו להשפיע למטה. כלומר, אם מזניחים אותם, נוכל לקבל:

$$\begin{aligned}
g(w)&=\frac{-9+6iw+O(w^2)}{(-5+6iw+O(w^2))(-36+12iw+O(w^2))}\\
&=\frac{-9}{(-5)(-36)}\frac{1-\frac{2i}{3}w+O(w^2)}{(1-\frac{6i}{5}w+O(w^2))(1-\frac{i}{3}w+O(w^2))}\\
&=-\frac{1}{20}(1-\tfrac{2i}{3}w+O(w^2))(1+\tfrac{6i}{5}w+O(w^2))(1+\tfrac{i}{3}w+O(w^2))\\
&=-\frac{1}{20}(1+(-\tfrac{2i}{3}+\tfrac{6i}{5}+\tfrac{i}{3})w+O(w^2))=-\frac{1}{20}-\frac{13i}{300}w+O(w^2)
\end{aligned}$$

ושוב קיבלנו את אותה השארית. (אפשר לבצע את אותו החישוב אבל עם הרבה פחות כתיבה אם לא כותבים בכל מקום את ה-$O(w^2)$ במפורש.)

בתשובה הסופית מקבלים שהאינטגרל הוא

$$I = \frac{\tau i}{2}(\mathrm{Res}(f,3i)+\mathrm{Res}(f,2i)) = \frac{\tau i}{2}\left(\frac{i}{25}-\frac{13i}{300}\right) = \frac{\tau}{600}.$$

(ב) נגדיר $f(z)=\frac{\sqrt[3]{z}}{z^2+1}$ עבור $z\notin\mathbb{R}_{>0}$, באשר הענף של $\sqrt[3]{z}$ שנבחר מקיים $\sqrt[3]{e^{i\theta}}=e^{i\theta/3}$ לכל $\theta\in(0,\tau)$. נחשב את האינטגרל של f לאורך קונטור פקמן: f אנליטית בתוך התחום החסום למעט בנקודות בהן המכנה מתאפס, כלומר $x=\pm i$. מכיוון שאלה קטבים פשוטים, נוכל לחשב את השאריות בקלות, ולקבל:

$$\mathrm{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{\sqrt[3]{z}}{z+i}=\frac{\sqrt[3]{i}}{2i}=\frac{e^{i\tau/12}}{2e^{i\tau/4}}=\tfrac{1}{2}e^{-i\tau/6}$$

$$\mathrm{Res}(f,-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)f(z)=\lim_{z\to -i}\frac{\sqrt[3]{z}}{z-i}=\frac{\sqrt[3]{-i}}{-2i}=\frac{e^{i\tau/4}}{2e^{3i\tau/4}}=-\tfrac{1}{2}$$

ולכן כאשר $R>1>r$ נקבל ממשפט השארית

$$\int_{\gamma_R+\gamma_r+\gamma_\varepsilon+\gamma_{-\varepsilon}} f(z)dz=\tau i(\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i))=\tfrac{\tau i}{2}(e^{-i\tau/6}-1)=\tfrac{\tau i}{2}e^{-i\tau/3}=\tfrac{\tau}{2}e^{-i\tau/12}.$$

נשים לב שהאינטגרלים של f לאורך המסילות γ_R,γ_r (כפי שמוגדרות בתרשים) שואפים לאפס כאשר $R\to\infty$, $r\to 0$. עבור γ_R, זה נובע מכך שמתקיים $|f(z)|=O(|z|^{-5/3})=o(R)$ כאשר $|z|=R\to\infty$, בעוד שאורך המסילה הוא לכל היותר τR, כלומר האינטגרל הוא $O(R^{-2/3})$ ובפרט שואף לאפס. עבור γ_r, מתקיים $f(z)=O(r^{1/3})$ כאשר $|z|=r\to 0$, ואורך המסילה הוא לכל היותר τr, כלומר האינטגרל הוא $O(r^{4/3})$, ושוב שואף לאפס כאשר $r\to 0$.

עבור γ_ε, נקבל שהאינטגרל שואף ל-$\int_r^R\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}dx$ כאשר $\varepsilon\to 0^+$ (כי מתקיים $f(x+i\varepsilon)\to f(x)$ במ"ש כאשר $\varepsilon\to 0$), ששואף לאינטגרל הרצוי $I=\int_0^\infty\frac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}dx$ כאשר $R\to\infty$, $r\to 0$. בדומה, האינטגרל על $\gamma_{-\varepsilon}$ שואף ל-$-e^{\tau i/3}I$: המקדם $e^{\tau i/3}$ נצבר משינוי הערך ב-$\sqrt[3]{z}$, והסימן השלישי מגיע מכך שהאינטגרל על פני $\gamma_{-\varepsilon}$ מתבצע בכיוון ההפוך מ-R, ל-r. בסה"כ קיבלנו

$$(1-e^{\tau i/3})I=\lim\int_{\gamma_R+\gamma_r+\gamma_\varepsilon+\gamma_{-\varepsilon}}f(z)dz=\tfrac{\tau}{2}e^{-i\tau/12}$$

כלומר

$$I=$$

$$\tau 2\tfrac{e^{-\tau i/12}}{1-e^{\tau i/3}}=\tfrac{\tau}{\sqrt{12}}.$$

(ג) נגדיר את f כמו בסעיף הקודם; הפעם מכיוון שאין צורך להגדירה כלל בחצי מישור התחתון, אין בעיה להגדירה גם על חיוביים, כלומר כך שיתקיים $\sqrt[3]{e^{i\theta}}=e^{i\theta/3}$ לכל $\theta\in[0,\tau/2]$. אותם חישובים עדיין מראים שהאינטגרלים על פני שפות המעגלים שואפים לאפס כאשר $R\to\infty$, $r\to 0$. הקונטור הפעם יקיף רק את הקוטב ב-i, ולכן האינטגרל הכולל יהיה

$$\int_{\partial U}f(z)dz=\tau i\,\mathrm{Res}(f,i)=\frac{\tau i}{2}e^{-i\tau/6}=\tfrac{\tau}{2}e^{i\tau/12}$$

האינטגרל על שפת המעגל על החיוביים ישאף ל-I; האינטגרל על פני השליליים ישאף $e^{i\tau/6}I$ המקדם מגיע משינוי הערך בין $f(x)$ ו-$f(-x)$, ואין שינוי בסימן כי האינטגרציה מ-$-R$ ל-$-r$ היא עדיין בכיוון הממשי החיובי. לכין סה"כ קיבלנו

$$(1+e^{i\tau i/6})I=\int_{\partial U}f(z)dz=\tfrac{\tau}{2}e^{i\tau/12}$$

כלומר

$$I=\frac{\tau}{2}\frac{e^{\tau i/12}}{1+e^{\tau i/6}}=\frac{\tau}{\sqrt{12}}.$$

(6) נסמן ב-γ את המסילה המקיפה את המעגל $\partial B(z_0,\delta)$. יהא $w\in B(f(z_0),\alpha)$. נתבונן בפונקציות $f_1(z)=f(z)-f(z_0)$, $f_2(z)=f(z)-w$. נשים לב כי לכל z מתקיים $|f_1(z)-f_2(z)|=|w-z_0|<\alpha$ על פי בחירת w; ובנוסף לכל $z\in\operatorname{Im}\gamma$ מתקיים $|f_1(z)|=|f(z)-f(z_0)|\geq\alpha$, מהנתון. כלומר, לכל $z\in\operatorname{Im}\gamma$ מתקיים $|f_1(z)-f_2(z)|<|f_1(z)|$, וממשפט רושה נסיק שלפונקציות f_1,f_2 אותו מספר אפסים בתוך $B(z_0,\delta)$. אך על פי בנייתה כמובן מתקיים $f_1(z_0)=0$, ולכן גם ל-f_2 יש לפחות שורש אחד, כלומר קיים

$z \in B(z_0,\delta)$ עם $0 = f_2(z) = f(z) - w$, כלומר עם $f(z) = w$ – כלומר $w \in f(B(z_0,\delta))$. הראנו שזה מתקיים לכל $w \in B(f(z_0),\alpha)$, כלומר $B(f(z_0),\alpha) \subset f(B(z_0,\delta))$, כנדרש.

(7) (א) נשים לב שעבור $|z| = 2$ מתקיים $|z^5| = 32$ ו-$|-6z^2 + z + 1| \leq 6|z^2| + |z| + 1 = 27$, ולכן ממשפט רושה ל-$P(z) = z^5 - 6z^2 + z + 1$ ול-z^5 יש את אותו מספר שורשים ב-$|z| < 2$, כלומר 5. מצד שני, עבור $|z| = 1$ מתקיים $|-6z^2| = 6 > 3 = |z^5| + |z| + |1| \geq |z^5 + z + 1|$, ולכן מרושה נובע של-$P(z)$ ול-$-6z^2$ יש אותו מספר שורשים ב-$|z| \leq 1$, כלומר 2. בסה"כ קיבלנו שמספר השורשים של $P(z)$ בתחום $1 < |z| < 2$ הוא $5 - 2 = 3$.

(ב) עבור $|z| = 2$ מתקיים $|z^8| = 256 > 43 = 4|z^3| + 10 \geq |-4z^3 + 10|$ ולכן מספר הפתרונות של $P(z)$ ו-z^8 שווים ב-$|z| < 2$, כלומר כל 8 השורשים של $P(z)$ נמצאים בכדור הזה. מצד שני עבור $|z| = 1$ מתקיים $10 = 10 > 5 = |z^8| + 4|z^3| \geq |z^8 - 4z^3|$ ולכן מספר השורשים של $P(z)$ זהה למספר השורשים של הקבוע 10 בתחום $|z| < 1$ – כלומר אין לו שם שורשים כלל. מכאן שכל 8 השורשים שלו נמצאים בטבעת $1 < |z| < 2$, כנדרש.

(ג) נשים לב שעבור $|z| = 1$ מתקיים $|-e^z| = e^{\text{Re}(z)} \leq e^1 = e < |c| = |cz^n|$, ולכן ממשפט רושה נובע שלפונקציות $f(z) = cz^n - e^z$, cz^n יש את אותו מספר שורשים בדיסק $|z| < 1$. ל-cz^n יש n שורשים, ולכן גם ל-$f(z)$. נותר רק להוכיח שכל השורשים של $f(z)$ שונים זה מזה (בשונה מהשורשים של cz^n). לצורך כך מספיק לבדוק שאף אחד לא נספר יותר מפעם אחת בספירת השורשים, כלומר שהם שורשים פשוטים, כלומר שמתקיים $f'(z) \neq 0$ לכל אחד מהשורשים הללו. ואכן נשים לב שבכל אחד מהשורשים הללו מתקיים

$$f'(z) = cnz^{n-1} - e^z = cnz^{n-1} - cz^n = cz^{n-1}(n - z)$$

מכיוון ש-$|z| < 1 \leq n$, בוודאי $n - z \neq 0$; וכמו כן $z \neq 0$, שכן $f(0) = 0 - e^0 = -1 \neq 0$, כלומר 0 אינו שורש של המשוואה. לכן גם $f'(z) = cz^{n-1}(n-z) \neq 0$, כנדרש.

(8) יהא $p(z)$ פולינום, ונניח בשלילה כי $|p(z) - f(z)| < 1$ לכל $|z| = 1$. נשים לב שאז גם מתקיים

$$|zp(z) - 1| = |zp(z) - z\overline{z}| = |z||p(z) - f(z)| < |z| = 1$$

לכל $|z| = 1$, ולכן ממשפט רושה נקבל של-$zp(z)$ ול-1 אותו מספר שורשים בדיסק $|z| < 1$. אך זו כמובן סתירה, שכן 1 לא מתאפס אף פעם, בעוד ש-$zp(z)$ בהכרח מתאפס ב-$z = 0$. שימו לב שלא באמת השתמשנו בכך ש-p פולינום – הטענה נכונה באותה המידה לכל פונקציה אנליטית בדיסק.

לחילופין ניתן להשתמש בגרסה המרומורפית של משפט רושה: נשים לב שמתקיים $f(z) = 1/z$ על $|z| = 1$, ולכן הנחת השלילה שקולה לכך ש-$|p(z) - \frac{1}{z}| < |\frac{1}{z}|$ על $|z| = 1$, ולכן לפונקציות $p(z), 1/z$ יש אותו מספר של אפסים פחות קטבים בתוך הדיסק. אך זה לא אפשרי, שכן מספר זה הוא אי-שלילי עבור p (שכן לפולינום אין קטבים כלל), אך שווה ל--1 עבור $1/z$, לה יש קוטב אך אין אפסים. סתירה.

(9) (א) נניח בשלילה שמתקיים $f(z) = \mu_k g(z)$. אזי $f(z)^n = (\mu_k g(z))^n = \mu_k^n g(z)^n = -g(z)^n$, מהגדרת μ_k, כלומר $f(z)^n + g(z)^n = 0$, בסתירה לכך ש-$f^n + g^n = 1$ בכל המישור.

(ב) מהסעיף הקודם נובע שהמכנה $f - \mu_1 g$ לא מתאפס ב-$\mathbb{C}$, והוא כמובן פונקציה אנליטית, ולכן גם אחרי חלוקה בו נקבל פונקציה אנליטית. נשים לב גם שלכל $i = 2, \ldots, n$, הפונקציה מפספסת את הערך $\frac{1}{\mu_i - \mu_1}$ (ומכיוון שכל ה-μ_i שונים זה מזה, אלה הם $n - 1$ ערכים שונים שהיא מפספסת). ואכן, אם נניח בשלילה $\frac{g(z)}{f(z) - \mu_1 g(z)} = \frac{1}{\mu_i - \mu_1}$, אז מהעברת אגפים נקבל $(\mu_i - \mu_1)g(z) = f(z) - \mu_1 g(z)$, ולכן $f(z) = \mu_i g(z)$ – בסתירה לסעיף הקודם.

עבור $n \geq 3$, קיבלנו ש-h היא פונקציה אנליטית בכל $\mathbb{C}$ שמפספסת לפחות 2 ערכים שונים, ולכן ממשפט פיקארד הקטן היא קבועה, ונניח ששווה ל-c; אזי מהעברת אגפים נקבל $cg(z) = f(z) - \mu_1 g(z)$, כלומר $f = (c + \mu_1)g$ ולכן $1 = f^n + g^n = ((c + \mu_1)^n + 1)g^n$, כלומר $g^n \equiv \frac{1}{1 + (c + \mu_1)^n}$, $f^n \equiv \frac{(c + \mu_1)^n}{1 + (c + \mu_1)^n}$ הן פונקציות קבועות, ולכן גם f, g קבועות (התמונה של כל אחת מהן מוכלת בקבוצה בגודל n, ומכיוון שהן חייבות להיות רציפות הן בהכרח קבועות).

(10) נניח בשלילה שכן קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ כנ"ל, שלא כולם 0. בה"כ נניח $\alpha_1 \neq 0$. נעביר אגפים ונחלק, ונקבל $e^{f_1(z)} = \beta e^{f_2(z)} + \gamma e^{f_3(z)}$, עבור $\beta = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\gamma = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}$. הפונקציה באגף שמאל לא מתאפסת בכל $\mathbb{C}$, ולכן לא ייתכן שאגף ימין יתאפס, ובפרט לא ייתכן $\beta = \gamma = 0$ – ונניח בה"כ ש-$\beta \neq 0$. נכפול את שני האגפים ב-$e^{-f_2(z)}$, ונקבל $e^{f_1(z) - f_2(z)} = \beta + \gamma e^{f_3(z) - f_2(z)}$. מהשיוויון נובע ששני האגפים מתארים את אותה פונקציה אנליטית $g(z)$. אולם, מכיוון שאקספוננט אף פעם לא מתאפס, נקבל שאגף שמאל לעולם לא מקבל את הערך 0, ואגף ימין לעולם לא מקבל את הערך $\beta \neq 0$ – כלומר g אנליטית בכל $\mathbb{C}$ ומפספסת שני ערכים שונים $\beta, 0$. לכן

ממשפט פיקארד הקטן, g קבועה – וזה גורר שגם $f_1(z) - f_2(z)$ בהכרח קבועה (כי התמונה שלה חיה בתוך הקבוצה הדיסקרטית $\log(g)$). אך זה עומד בסתירה להנחה ש-$f_1 - f_2$ אינה פונקציה קבועה – סתירה. לכן לא קיימים α_i כאלו, כנדרש.

הערה: בסתירה השתמשנו כביכול רק בעובדה ש-$f_1 - f_2$ אינה קבועה, ולא בכך שכל $f_i - f_j$ אינן קבועות ל-$i \neq j$; אך השתמשנו בהנחה זאת בכל הפעמים שאמרנו בה"כ – הסיבה שלא הגבלנו את הכלליות היא שההנחות על f_i עד לאותו רגע היו סימטריות.

הערה 2: ממעקב זהיר אחרי ההוכחה ניתן לראות שהטענה לא רק נובעת ממשפט פיקארד הקטן, אלא שקולה לו – במובן שניתן להוכיח אותו בקלות לפונקציה כללית, בשימוש בטענה הנ"ל על 3 אקספוננטים (ובשאלה (3)). בשונה מפיקארד הקטן, את הטענה האחרונה ניתן גם להכליל ליותר אקספוננטים: אם $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ אנליטיות עם $f_i - f_j$ לא קבועה לכל $i \neq j$, אז הפונקציות $e^{f_1}, \ldots, e^{f_n}$ בלתי תלויות לינאריות מעל $\mathbb{C}$. זהו משפט עמוק ויפה של בורל, אך ההוכחה לו עבור $n \geq 4$ משתמשת בכלים שמעבר למסגרת הקורס. (אבל אם מישהו מצליח להוכיח את הטענה עבור $n > 3$ בכלים שלמדנו, אשמח לשמוע!)

(א) ברור ש-q היא פונקציה מ-D ל-D (ואפילו על D), שכן היא הרכבה של פונקציות כנ"ל. נציב 0 ב-q: מתקיים

$$q(0) = \phi_{-a}(\phi_{-b}(0)^2) = \phi_{-a}(b^2) =_{-a} (-a) = 0.$$

בנוסף, אם נציב $-b$ נקבל

$$(-b) = \phi_{-a}(\phi_{-b}(-b)^2) = \phi_{-a}(0^2) = a$$

ולכן $|q(-b)| = |a| = |b^2| < |-b|$ (שכן כמובן $a, b \neq 0$, היות ש-$0 \in U$ אך $a \notin U$). בפרט לא מתקיים $q(z) = \lambda z$ עבור $|\lambda| = 1$, ולכן מהלמה של שוורץ נקבל שבהכרח $|q(z)| < |z|$ לכל $z \neq 0$, כנדרש.

(ב) אכן, ϕ_a חח"ע שכן היא העתקת מביוס, ומתקיים $\phi_a(a) = 0$, אך $a \notin U$ – ולכן $\phi_a|_U$ לא מתאפסת. יהא g שורש אנליטי של ϕ_a על U. בפרט $g(0)^2 = \phi_a(0) = -a$, ולכן $g(0) = \pm b$. אם $g(0) = b$, סיימנו, ואחרת נחליף את g ב-$-g$ – שגם היא שורש אנליטי של ϕ_a, ומקבלת את הערך הרצוי ב-0. ברור כי התמונה של g מוכלת ב-D, שכן לכל $z \in U \subset D$ מתקיים $\phi_a(z) \in D$ כלומר $1 > |\phi_a(z)| = |g(z)^2| = |g(z)|^2$ ולכן גם $|g(z)| < 1$, כלומר $g(z) \in D$, כנדרש.

(ג) נציב: $f(0) = \phi_b(g(0)) = \phi_b(b) = 0$, כנדרש. וכן לכל $z \in U$,

$$q(f(z)) = \phi_{-a}(\phi_{-b}(\phi_b(g(z)))^2) = \phi_{-a}(g(z)^2) = \phi_{-a}(\phi_a(z)) = z$$

כאשר במעברים השתמשנו בעובדה ש-$\phi_{\pm b}$ הופכיות אחת לשנייה, וכך גם $\phi_{\pm a}$. שימו לב שהעובדה ש-$q \circ f$ היא העתקת הזהות, ובפרט חח"ע, גוררת שגם f חייבת להיות חח"ע. כעת לכל $z \in U \setminus \{0\}$, נסמן $w = f(z) \neq 0$ (מחח"ע), לכן $z = q(f(z)) = q(w)$ ובפרט $|z| = |q(w)| < |w| = |f(z)|$, על פי סעיף (א). זה מסיים את ההוכחה ש-f מקיימת את כל התכונות הדרושות.

(ד) נניח בשלילה שקיימת $f : V \to D$ עם התכונות הנ"ל. בפרט, f חסומה (כי הטווח הוא D), ולכן ממשפט ההשלמה של רימן ניתן להמשיך אותה באנליטיות ב-p. גם לאחר ההשלמה, הפונקציה f נשארת חח"ע (ראו שאלה 6 בפתרון תרגיל 10), ומתקיים גם $f(p) \in D$ (אחרת יש מקסימום מקומי של $|f(z)|$ ב-p, בסתירה לעקרון המקסימום), ומההנחות על f מתקיים $f(0) = 0$. לכן מהלמה של שוורץ $|f(z)| \leq |z|$ לכל $z \in D$, בסתירה להנחה ש-$|f(z)| > |z|$ לכל $z \neq 0$, כנדרש.

עבור תכונת השורש הריבועי, אפשר להתבונן למשל בפונקציה $f(z) = z - p$ – היא אנליטית ולא מתאפסת בכל V, אך כידוע אין לה אף שורש אנליטי בסביבה מנוקבת של p, ולכן גם לא ב-V.