תורת הפונקציות המרוכבות 1 - תרגיל בית מספר 6
תאריך הגשה: 23.8.2018

(1) מצאו פיתוחי לורן של הפונקציות הבאות בתחומים הבאים:

(א) $f(z) = \frac{3}{(z-1)(z+2)}$ בטבעות $\{|z| > 2\}$, $\{1 < |z| < 2\}$ ובדיסק $\{|z| < 1\}$.

(ב) $f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)}$ בטבעות $\{0 < |z| < 1\}$, $\{1 < |z|\}$.

(ג) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$ ב-$\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(ד) $f(z) = z\cos(\frac{1}{z})$ ב-$\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(2) (א) נתבונן בטור $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{3n}$. חשבו את רדיוס ההתכנסות שלו. אם נמרכז אותו מחדש לטור טיילור מסביב לנקודה $z_0 = -1/2$, מה יהיה רדיוס ההתכנסות של הטור החדש? ומסביב למרכז $z_0 = -1$? (רמז: המטרה בשאלה היא <u>לא</u> לחשב את המירכוז מחדש.)

(ב) מה יהיה רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של $f(z) = \frac{1}{\cos(z)}$ עם מרכז ב-0? ומה יהיה רדיוס ההתכנסות של הטור של $f(z) + \frac{1}{z-\tau/4} - \frac{1}{z+\tau/4}$ ביחס לאותו מרכז?

(3) הראו שמשפט ליוביל נובע מטענת מונטל על נורמליות של משפחת פונקציות הולומורפיות החסומות במידה אחידה.
רמז: ניתן להניח כי $f(0) = 0$. הגדירו $f_n(z) = f(nz)$.

(4) (א) נסמן $f_n(z) = z^n$. הראו כי משפחת הפונקציות $\{f_n\}$ היא נורמלית בדיסק היחידה, ונורמלית בטבעת $\{1 < |z| < 2\}$, אך אינה נורמלית בדיסק $\{|z| < 2\}$.

(ב) מהסעיף הקודם ניתן ללמוד כי לחוסר הנורמליות של $\{z^n\}$ בדיסק הנ"ל אחראיות הנקודות על מעגל היחידה. במונחים של למת זצלמן, נבחר את המרכזים $z_n = 1$, וקבועי נרמול $r_n = \frac{1}{n} \to 0$. לאיזו פונקציה מתכנסת הסדרה $f_n(z_n + r_n z)$? ומה יקרה אם נקבע $z_n = \lambda$, באשר λ נקודה אחרת על מעגל היחידה?
רמז: חשבו תחילה על המקרה ש-λ הוא שורש יחידה. זכרו שתמיד ניתן לעבור לתת-סדרה.

(5) לכל פונקציה גזירה $f : U \to \mathbb{C}$, נגדיר $G(f) = (f'-1)(f'+1)(f-f')$. נראה שהתכונה "$G(f)$ אינה מתאפסת" לא מקיימת את העקרון של בלוך:

(א) הראו שלכל פונקציה שלמה $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, אם $G(f) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ אינה מתאפסת, אז f קבועה.

(ב) הראו ש-$\mathcal{F} = \{f : D \to \mathbb{C} : \forall z \in D, G(f)(z) \neq 0\}$ אינה משפחה נורמלית.
רמז: התבוננו בפונקציה $f(z) = 2018z$.

(6) תארו את משפחת כל השקילויות הקונפורמיות $f : U \to V$ בין התחומים הבאים:

(א) $U = V = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im}(z) < \frac{\tau}{2}\}$

(ב) $U = \{z \neq 0 : 0 < (z) < \frac{\tau}{6}\}, V = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

זכרו שמשפחת השקילויות הקונפורמיות מ-$\mathbb{H}$ לעצמו הן העתקות המביוס $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ באשר $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ממשיים עם $ad - bc > 0$.

(7) מצאו שקילות קונפורמית מפורשת (אחת) מהתחומים הבאים ל-$\mathbb{H}$ או ל-D, או לתחום שכבר מצאנו לו שקילות מפורשת אליהם. (אין צורך לכתוב נוסחה, ניתן גם לתאר מילולית או כהרכבה, אך יש לדייק)
בכל הסעיפים להלן, z הוא מרוכב ו-x הוא ממשי.

(א) גזרת מעגל: $\{z : 0 < |z| < R, 0 < (z) < \alpha\}$ עבור $0 < \alpha < \tau$. (רמז: התחילו מ-$\alpha = \frac{\tau}{2}$.)

(ב) מישור בלי שתי קרניים (של אותו ישר): $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$. רמז: מה עושה $z \mapsto \frac{1}{z-1}$?

(ג) חצי מישור בלי קרן: $\mathbb{H} \setminus \{i \cdot x : x \geq 1\}$

(ד) פס בלי קרן: $\{z : 0 < \text{Im}(z) < \tau\} \setminus \{x + \frac{\tau}{2}i : x \leq 0\}$

(ה) פס בלי שתי קרניים: $\{z : 0 < \text{Im}(z) < \tau\} \setminus \{x + \frac{\tau}{2}i : |x| \geq 1\}$

(ו) המשלים של פרבולה: $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < \text{Im}(z)^2 - \frac{1}{4}\}$. רמז: התבוננו בביטוי $(x+iy)^2$, במיוחד עבור $y = \frac{1}{2}$.

(8) (א) תהא $f:\mathbb{C}\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ פונקציה גזירה וחח"ע. הראו ש-f היא בהכרח העתקת מביוס.
רמז: הזכרו בהוכחה מההרצאה לכך שפונקציה חח"ע המוגדרת על המישור כולו בהכרח לינארית. שימו לב שתרגיל זה הינו הכללה של התוצאה הנ"ל.

(ב) יהא U תחום, ותהנא $z_1,z_2\in U$ שתי נקודות שונות. נתונה פונקציה $f:U\setminus\{z_1,z_2\}\to\mathbb{C}$ גזירה וחח"ע. הראו כי אחד משני הבאים בהכרח מתקיים: או שבשתי הנקודות z_1,z_2 ל-f יש גבול, ואפשר להשלים את f לפונקציה גזירה וחח"ע בכל U; או שבבדיוק אחת מהנקודות (נניח z_1) יש גבול לפונקציה ובנקודה השנייה מתקיים $\lim_{z\to z_2}f(z)=\infty$, ואפשר להשלים את f לפונקציה גזירה וחח"ע ב-$U\setminus\{z_2\}$.

(ג) תהא $A\subset\mathbb{C}$ קבוצה סופית. הראו כי כל תחום ששקול ל-$\mathbb{C}\setminus A$ הוא מהצורה $\mathbb{C}\setminus B$ עם $|B|=|A|$, וכל שקילות קונפורמית מאחד לשני היא צמצום של העתקת מביוס $\phi:\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$ המקיימת $\phi(A\cup\{\infty\})=B\cup\{\infty\}$.

(ד) תארו את כל השקילויות הקונפורמיות של התחום $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$ לעצמו.

(ה) האם התחום $\mathbb{C}\setminus\{0,1,3\}$ שקול קונפורמית ל-$\mathbb{C}\setminus\{0,1,i\}$? ול-$\mathbb{C}\setminus\{0,1,\frac{1}{3}\}$? תארו את כל השקילויות הקונפורמיות, אם קיימות.

(9) נתאר מספר תחומים השקולים קונפורמית לדיסק מנוקב $D^*=D\setminus\{0\}$.

(א) הראו שלכל $a\in D$, $D\setminus\{a\}$ שקול קונפורמית ל-D^*. (רמז: שקילויות קונפורמיות של D עצמו.)

(ב) הראו שלכל $U\subsetneq\mathbb{C}$ פשוט קשר ולכל $a\in U$, $U_a=U\setminus\{a\}$ שקול קונפורמית ל-D^*. הראו בנוסף שאם $f,g:U_a\to D^*$ שתי שקילויות קונפורמיות, אז בהכרח $f=\lambda g$ עבור $|\lambda|=1$.

(ג) הראו ש-D^* שקול קונפורמית למשלים של דיסק: $\mathbb{C}\setminus\overline{D}$.

(ד) הראו שההעתקה $z\mapsto\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$ היא שקילות קונפורמית מ-D ל-$\mathbb{C}\setminus[-1,1]$.

(ה) (רשות/העשרה) תהנא $a,b,c,d\in D$ נקודות עם $a\neq b$ ו-$c\neq d$. מתי קיימת שקילות קונפורמית בין $D\setminus\{a,b\}$ ו- $D\setminus\{c,d\}$? מצאו תנאי הכרחי ומספיק. אם קיימת שקילות כזו - כמה שקילויות שונות יש? (מומלץ לעיין בתרגיל על המטריקה ההיפרבולית.)

(10) יהא U תחום שאינו פשוט קשר מישורי, $U^c=K\cup F$. תהא $z_0\in K$ כלשהי. בתרגיל זה נוכיח שלפונקציה $\frac{1}{z-z_0}$ אין קדומה גלובאלית ב-U: כלומר, פשטות קשר הולומורפית גוררת פשטות קשר מישורית.

(א) הוכיחו שקיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in K$ ו-$y\in\mathbb{C}$, $|y-x|<\delta$ גורר $y\in K\cup U$.

נתבונן בשריג ריבועי, המורכב מריבועים שצלעותיהם מקבילות לצירים ובעלות אורך $\frac{\delta}{2}$, וכך שהנקודה z_0 נמצאת בפנים של אחד הריבועים בשריג (כלומר, לא על צלע או קדקוד). כל צלע של השריג יכולה להיות מכוונת באחד משני כיוונים (מקדקוד אחד לשני או להפך). נסמן את קבוצת כל הקדקודים של השריג ב-V, ואת קבוצת הצלעות המכוונות שלו ב-E. נגדיר <u>מחלק</u> בתור סכום פורמלי סופי של איברי V, עם מקדמים שלמים, $D=\sum_{i=1}^k n_iv_i$ עם $n_i\in\mathbb{Z}$ ו-$v_i\in V$.[1]

נסמן ב-$\mathcal{D}$ את קבוצת כל המחלקים. נגדיר פונקציית <u>שפה</u> $\partial:E\to\mathcal{D}$ לפי $\partial([u,v])=-u+v$. <u>שרשרת פתוחה</u> הינה קבוצה סופית $C\subset E$. ניתן לחבר מחלקים על ידי סכימת המקדמים של כל v_i בנפרד, ונגדיר לכל שרשרת פתוחה את השפה שלה לפי $\partial(C)=\sum_{e\in C}\partial(e)$.

עבור פונקציה g שמוגדרת בכל V ומחלק $D=\sum_i n_iv_i\in\mathcal{D}$, נגדיר $D(g)=\sum_i n_ig(v_i)\in\mathbb{C}$. לשרשרת פתוחה C ולפונקציה גזירה f שמוגדרת בסביבה של C, נגדיר $\int_C f=\sum_{e\in C}\int_e f$.

(ב) נניח כי g גזירה בסביבה של C ונסמן $f=g'$. הראו כי לכל קשת $e\in C$ מתקיים $\int_e f=\partial(e)(g)$. הסיקו שגם $\int_C f=\partial(C)(g)$.

(ג) לכל ריבוע בשריג מתאימה מסילה אשר מקיפה את הריבוע נגד כיוון השעון, ומורכבת מ-4 צלעות מכוונות. נסמן ב-$\sigma\subset E$ את השרשרת בגודל 4 המתאימה למסילה זו. נגדיר את השרשרת C_0 בתור האיחוד על פני כל השרשראות σ עבור ריבועי שריג אשר נוגעים ב-K (בין אם בפנים הריבוע, בשפה או בקדקוד). הראו ש-C_0 אכן סופית, ומתקיים $\partial(C_0)=0$ ו-$\int_{C_0}\frac{1}{z-z_0}=\tau i$. כמו-כן הראו שלכל $e\in C_0$ מתקיים $e\subset K\cup U$.

(ד) נשים לב שכל צלע (לא מכוונת) ב-C_0 נלקחה פעם אחת בלבד, או בדיוק פעמיים ובכיוונים הפוכים. נסמן ב-C_1 את השרשרת המתקבלת מ-C_0 על ידי מחיקה של כל הצלעות שמופיעות בשני הכיוונים. הראו שגם היא מקיימת $\partial(C_1)=0$ ו-$\int_{C_1}\frac{1}{z-z_0}=\tau i$. כמו-כן הראו שלכל $e\in C_1$ מתקיים $e\subset U$.

(ה) מתוך (ב) + (ד), הראו שלא ייתכן שקיימת $g:U\to\mathbb{C}$ עבורה $g'=\frac{1}{z-z_0}$.

הערה: ניתן לראות גם ש-C_1 הינה סכום של לולאות סגורות שמוכלות ב-U, ושלפחות אחת מהן בעלת אינדקס שונה מ-0 ביחס ל-z_0.

---

[1] תיאור פורמלי יותר של D הוא כפונקציה $D:V\to\mathbb{Z}$ שמתאפסת בכל V למעט בקבוצה סופית; כאן $D=\sum_{i=1}^k n_iv_i$ מתאים לפונקציה שמקיימת $D(v_i)=n_i$ לכל $1\le i\le k$ ו-$D(v)=0$ לכל $v\notin\{v_1,\dots,v_k\}$.