תורת הפונקציות המרוכבות 1 - פתרון תרגיל בית מספר 6

(1) (א) נפרק לרציונליות אלמנטריות:

$$f(z) = \frac{3}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} = -\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

נשתמש בטורי לורן של $\frac{1}{1-w}$ בתחומים המתאימים – $\sum_{n=0}^{\infty} w^n$ עבור $|w| < 1$, ו-$-\sum_{n=-\infty}^{-1} w^n$ עבור $|w| > 1$. נקבל:

$$z \in B(0,1) \Rightarrow f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1+(-1/2)^{n+1})z^n$$

$$z \in A(0,1,2) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n$$

$$z \in A(0,2,\infty) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}(1-(-2)^{-n-1})z^n$$

(ב) נשתמש בטורים של $\frac{1}{1-w}$, בהצבה $w = z^2$:

$$z \in B(0,1) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1} = \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots$$

$$z \in A(0,1,\infty) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z(1+z^2)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=-\infty}^{-1}(-z^2)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}z^{2n-1} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^7} - \frac{1}{z^9} + \cdots$$

(ג) אפשר לפתח למשל לפי נוסחת המכפלה:

$$f(z) = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{-m}}{m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}z^{n-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!(m+|k|)!}\right)z^k$$

(ד)

$$f(z) = z\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{-2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{1-2n}}{(2n)!} = z - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24z^3} - \cdots$$

(2) (א) רדיוס ההתכנסות הוא בבירור 1, שכן המקדם 1 מופיע אינסוף פעמים ואין מקדמים גדולים יותר. בנוסף נשים לב שעבור $|z| < 1$ מתקיים $f(z) = \frac{1}{1-z^3}$ – ואגף ימין מתאר פונקציה אנליטית בכל $\mathbb{C}$ למעט בנקודות $\{1, \omega, \omega^2\}$, כאשר $\omega = e^{\tau i/3}$. עבור $z_0 = -1/2$, מתקיים $|z_0 - 1| = 3/2$, $|z_0 - \omega| = |z_0 - \omega^2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ולכן הטור הממורכז מחדש יתכנס ברדיוס $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (לפחות, מאנליטיות הפונקציה עד לנקודה זו, ולא יותר, שכן $f(z) \to \infty$ כאשר $z \to \omega$). בדומה, עבור $z_0 = -1$ נקבל $|z_0 - 1| = 2$, $|z_0 - \omega| = |z_0 - \omega^2| = 1$, ולכן הטור יתכנס ברדיוס בדיוק 1.

(ב) הפונקציה f אנליטית בכל $\mathbb{C}$ למעט באפסים של $\cos(z)$, כלומר בנקודות $z_k = \tau(\frac{1}{4} + \frac{k}{2})$, עבור k שלם, ובנקודות אלה מתקיים $f(z) \to \infty$ כאשר $z \to z_k$. לכן הדיסק המקסימלי עם מרכז 0 בו f אנליטית הוא $B(0, \frac{\tau}{4})$, ולכן $\frac{\tau}{4}$ הוא רדיוס ההתכנסות של טור טיילור המדובר. עבור $g(z) = f(z) + \frac{1}{z-\tau/4} - \frac{1}{z+\tau/4}$, נשים לב קודם כל שכמו f, מתקיים $g(z) \to \infty$ כאשר $z \to \pm\frac{3\tau}{4}$. ומצד שני ב-$\pm\frac{\tau}{4}$ הסינגולריות של g היא סליקה, ואפשר להמשיך אותה ברציפות (ולכן באנליטיות, ממשפט ההשלמה של רימן), ולכן נקבל שיש פונקציה אנליטית ב-$B(0, \frac{3\tau}{4})$ שמסכימה עם g בסביבה של 0, ולכן רדיוס ההתכנסות יהיה $\frac{3\tau}{4}$. ובכן, מדוע הגבול קיים? נשים לב ש-f היא כמובן פונקציה זוגית, ולכן מההגדרה נובע מיידית שגם g זוגית, ומספיק לבדוק למשל ב-$z_0 = \tau/4$. מכיוון ש-$\frac{1}{z+\tau/4}$ רציפה שם, מספיק לבדוק שקיים גבול של $h(z) = f(z) + \frac{1}{z-\tau/4}$

כאשר $z \to \tau/4$, או לחילופין, של $h(\tau/4 - z)$ כאשר $z \to 0$. כעת

$$h(\tau/4 - z) = \frac{1}{\cos(\tau/4 - z)} - \frac{1}{z} = \frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z} = \frac{z - \sin(z)}{z\sin(z)} = z \cdot \frac{z - \sin(z)}{z^3} \cdot \frac{z}{\sin z}$$

נשים לב שכל הגורמים בביטוי האחרון שואפים לגבול כאשר $z \to 0$: אכן, $\frac{z}{\sin z} \to 1$, ו-$\frac{z - \sin(z)}{z^3} \to \frac{1}{6}$ (ניתן לראות זאת מתוך טור הטיילור של $\sin(z)$), וכמובן $z \to 0$. לכן באמת מתקיים $\lim_{z\to 0} h(\tau/4 - z) = 0$, וניתן להמשיך את הפונקציה ברציפות, כפי שטענו.

(3) תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ אנליטית, חסומה על ידי M. נגדיר $f_n(z) = f(nz)$. כל הפונקציות האלה חסומות על ידי M, ולכן מטענת מונטל, זו משפחה נורמלית, ויש לה תת-סדרה שמתכנסת על קומפקטיות (לא יכולה להתפוצץ לאינסוף, כי כל הפונקציות חסומות). אך מצד שני ברור כי $f_n'(z) = nf'(nz)$ ובפרט $f_n'(0) = nf'(0)$, והנגזרת הזו שואפת לאינסוף כאשר $n \to \infty$ אלא אם $f'(0) = 0$ – ולכן זה חייב להיות המצב, שכן בתת-סדרה המתכנסת של f_n גם הנגזרות חייבות להתכנס. את אותו טיעון ניתן להחיל גם בכל נקודה אחרת: התבוננות בסדרה $f_n(z) = f(n(z - z_0) + z_0)$ מראה שבהכרח $f'(z_0) = 0$. לכן $f' \equiv 0$ בכל $\mathbb{C}$, ומכאן ש-f קבועה.

לחילופין, מהבנייה הראשונה אפשר להראות גם שמתקיים $f_n^{(m)}(z) = n^m f^{(m)}(nz)$ ובפרט $f_n^{(m)}(0) = n^m f^{(m)}(0)$ ולכן מאותו שיקול $f^{(m)}(0) = 0$, כלומר כל הנגזרות של f מתאפסות ב-0, וזה גם מראה שהפונקציה קבועה (כי שווה לטור טיילור של עצמה, שמכיל רק מקדם חופשי).

(4) (א) בדיסק היחידה בבירור מתקיים $f_n(z) \to 0$ לכל z, וההתכנסות היא במ"ש על כדורים $B(0, r)$ (שכן $|f_n(z)| \leq r^n \to 0$ לכל $|z| < r$) ולכן גם על קומפקטיות. אין אפילו צורך לעבור לת"ס, זה פשוט נכון בכל סדרה. בטבעת $2 > |z| > 1$ מתקיים $f_n(z) \to \infty$ כאשר $n \to \infty$ לכל z, וגם במ"ש על קומפקטיות (כי $|z| > r$ גורר $|f_n(z)| > r^n \to \infty$). שוב אין צורך אפילו לעבור לתת-סדרה.

מכיוון שההתנהגויות של הסדרה הזו בדיוק הפוכות בשני התחומים, בדיסק $B(0, 2)$ הסדרה לא נורמלית – נסתכל למשל על הקבוצה הקומפקטית $\overline{B}(0, 1.5)$. לא משנה איזה ת"ס נבחר, יתקיים $f_n(z) \to \infty$ לכל $1.5 > |z| > 1$, ו-$f_n(z) \to 0$ לכל $1 > |z| > 0$. לכן ברור שה-f_n לא יכולים להתכנס לפונקציה אנליטית כי מתפוצצים בחלק מהערכים, אך גם לא יכולים להתכנס לאינסוף, כי לא מתפוצצים בחלק מהערכים. לכן זו אינה משפחה נורמלית.

(ב) מתקיים $f_n(z_n + r_n z) = (1 + \frac{z}{n})^n \to e^z$ כאשר $n \to \infty$ (הגבול מתכנס נקודתית כפי שידוע מחדו"א, וכל הפונקציות חסומות במידה אחידה על קומפקטיות, לכן ההתכנסות היא במ"ש על קומפקטיות). זוהי אכן פונקציה שלמה לא קבועה, כפי שהעקרון הבטיח לנו. עבור $z_n = \lambda$ נקבל $f_n(z_n + r_n z) = (\lambda + \frac{z}{n})^n = \lambda^n(1 + \frac{z}{\lambda n})^n$. מתקיים $(1 + \frac{z}{\lambda n})^n \to e^{z/\lambda}$ כאשר $n \to \infty$. לכן על מנת שסדרת ה-f_n תתכנס, נרצה לעבור לת"ס בה גם λ^n מתכנס. אם λ הוא שורש יחידה מסדר N ניתן לקחת למשל תת סדרה חשבונית $n_m = a + N \cdot m$, ולקבל $f_{a+N\cdot m}(z) \to \lambda^a e^{z/\lambda}$. עבור λ שאינו שורש יחידה, ניתן לבחור תתי-סדרות כך ש-λ^{n_m} יתכנס לכל ערך μ על מעגל היחידה שנרצה, ונקבל $f_{n_m}(z) \to \mu e^{z/\lambda}$.

(5) (א) מכיוון ש-$G(f)$ אינה מתאפסת, נקבל בפרט ש-$f' \neq \pm 1$ בכל $\mathbb{C}$. אך f' פונקציה שלמה, ולכן מפיקארד הקטן בהכרח $f' \equiv a$ קבועה, ולכן $f(z) = az + b$ לינארית. אם $a \neq 0$ נקבל שב-$z = \frac{a-b}{a}$ מתקיים $f(z) = a = f'(z)$ ולכן $G(f)(z) = 0$, בסתירה; לכן בהכרח $a = 0$, כלומר $f \equiv b$ קבועה, כנדרש.

(ב) נתבונן בסדרה $f_n(z) = n \cdot z$, עבור $n \geq 2$. נשים לב שאכן $f_n \in \mathcal{F}$, שכן $f_n' = n \neq \pm 1$, וכן $|f(z)| = |n \cdot z| < n = |f'(z)|$ לכל $z \in D$. לסדרה f_n יש גבול נקודתי לפונקציה מוכללת f המקיימת $f(z) = \infty$ עבור $z \neq 0$ ו-$f(0) = 0$. לכן אם תת-סדרה של f_n הייתה מתכנסת במ"ש על קומפקטיות למשהו, זה בהכרח היה ל-f, אך זו אינו פונקציה במובן הצר, ואינה אינסוף (ובנוסף ההתכנסות אליה אינה במ"ש באף סביבה קומפקטית של 0). כלומר ל-$f_n \in \mathcal{F}$ אין אף תת-סדרה שמתכנסת במ"ש על קומפקטיות לפונקציה או לאינסוף, וזה מעיד על כך ש-$\mathcal{F}$ אינה נורמלית.

(6) (א) נשים לב שבמקרה זה ההעתקה $f(z) = e^z$ היא שקילות קונפורמית מ-U ל-$\mathbb{H}$, וההופכית לה $z \mapsto \operatorname{Log}(z)$ היא השקילות מ-$\mathbb{H}$ ל-$U = V$. השקילויות מ-$\mathbb{H}$ לעצמו הן העתקות המביוס $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ עם מקדמים ממשיים ו-$ad - bc = 1$ (כלומר המטריצה A שייכת ל-). לכן כל השקילויות הקונפורמיות מ-U ל-V הן מהצורה $\phi_A = \operatorname{Log} \circ T_A \circ f$, או בניסוח ישיר

$$\phi_A(z) = \operatorname{Log}(T_A(f(z))) = \operatorname{Log}\left(\frac{ae^z + b}{ce^z + d}\right), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1$$

(ב) שקילות קונפורמית $f:U\to\mathbb{H}$ נתונה על ידי $f(z)=z^3$, ושקילות $g:\mathbb{H}\to V$ נתונה על ידי $g(z)=-z^2$. לכן השקילויות מ-U ל-V נתונות על ידי $\phi_A=g\circ T_A\circ f$, כלומר

$$\phi_A(z)=g(T_A(f(z)))=-\left(\frac{az^3+b}{cz^3+d}\right)^2,\quad a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc=1$$

(7) הפתרונות לשאלה זו מופיעים במסמך "גן החיות של השקילויות הקונפורמיות" (מעודכן).

(8) (א) נחיל את קסורטי-ויירשטראס על על הנקודות z_0,∞. נשים לב שלאף אחת מהן לא תתכן האופציה שהתמונות של הסביבות שלהן הן קבוצות צפופות, שכן אז נקבל ש-$f(B(z_0+2,1))$, שהיא קבוצה פתוחה, נחתכת עם $f(B(z_0,1))$ או עם $f(\mathbb{C}\setminus\overline{B}(0,|z_0|+3))$, ובכל מקרה נקבל סתירה לחח"ע של f. לכן קיימים (במובן הרחב) גבולות $w_0=\lim_{z\to z_0}f(z)$, $w_1=\lim_{z\to\infty}f(z)$. נטען כעת ש-$w_0,w_1$ שונים זה מזה, וכן שונים מכל ערך שמתקבל על ידי f בנקודות $z\neq z_0$. על מנת לפשט את ההוכחה של עובדה זו, נשתמש בגרסה המוכללת הבאה של משפט ההעתקה הפתוחה:

תהנא $z_0,w_0\in\widehat{\mathbb{C}}$ נקודות על ספירת רימן, ונניח כי פונקציה f לא קבועה מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0, ומקיימת $\lim_{z\to z_0}f(z)=w_0$. אזי התמונה של f בכל סביבה מנוקבת של z_0 מכילה סביבה מנוקבת של w_0.

הוכחה: במקרה ש-$z_0,w_0\in\mathbb{C}$ סופיים, משפט ההשלמה של רימן מבטיח לנו שניתן להגדיר $f(z_0)=w_0$, והפונקציה תהיה אנליטית ב-z_0, והמשפט נובע ממשפט ההעתקה הפתוחה הרגיל. אם z_0 סופי ו-$w_0=\infty$, אז נצטמצם לסביבה של z_0 בה מתקיים $f(z)\neq 0$, ועבור הפונקציה $g(z)=1/f(z)$ ההנחות מתקיימות עבור $w_0'=0$. העובדה שהתמונות של g מכילות סביבות מנוקבות של 0 בדיוק גוררת שהתמונות של f מכילות סביבות מנוקבות של ∞. ולסיום, במקרה ש-$z_0=\infty$, נתבונן בפונקציה $g(z)=f(1/z)$ – היא מקיימת את הנחות המשפט עבור $z_0'=0$, ותמונות של סביבות מנוקבות של 0 על ידי g הן בדיוק התמונות של סביבות מנוקבות של ∞ על ידי f.

כעת, נשים לב שאם קיימות $z_1\neq z_2\in\widehat{\mathbb{C}}$ עם $w=\lim_{z\to z_1}f(z)=\lim_{z\to z_2}f(z)$, אז התמונות של f בכל שתי סביבות מנוקבות של z_1,z_2 יכילו סביבות מנוקבות של w, ובפרט תחתכנה; ומכיוון שהנקודות z_1,z_2 שונות, אפשר לבחור את הסביבות האלה כך שלא יהיה חיתוך ביניהן, בסתירה לחח"ע f. זה מיד מראה שבהכרח $w_0\neq w_1$ וכן שערכים אלה שונים מ-$f(z')=\lim_{z\to z'}f(z)$ לכל $z'\neq z_0$, כפי שטענו.

כעת, נגדיר פונקציה $g=T\circ f$ אשר מתקבלת על ידי הרכבה של העתקת מביוס אשר שולחת את w_1 לאינסוף על f: למשל, אם w_1 סופי, נגדיר $T(z)=\frac{1}{z-w_1}$, ואם $w_1=\infty$ אז $T(z)=z$. מכיוון ש-w_1 לא שייכת לתמונה של f, נקבל שהפונקציה החדשה גם מוגדרת ואנליטית בכל $\mathbb{C}\setminus\{z_0\}$, ובנוסף $\lim_{z\to z_0}g(z)=T(w_0)\neq\infty$, שכן גם $w_0\neq w_1$, ולכן ממשפט ההשלמה של רימן ניתן להמשיך את g לפונקציה אנליטית ב-z_0 עם הערך w_0, ולכן g אנליטית בכל $\mathbb{C}$. נשים לב ש-g נשארה חח"ע כשהרכבנו את T (כי העתקות מביוס הן חח"ע), וגם לאחר ההשלמה הנ"ל, לפי המשפט. וכמו כן מהגדרתנו מתקיים $\lim_{z\to\infty}g(z)=T(w_1)=\infty$, ולכן g היא פולינום חח"ע, כלומר לינארית, ובפרט העתקת מביוס. לכן גם $f=T^{-1}\circ g$ היא העתקת מביוס, בתור הרכבה של העתקות מביוס – כנדרש.

(ב) ההוכחה כאן זהה להוכחה לעיל: כאשר נחיל את קסורטי ויירשטראס על הנקודות z_1,z_2, ניווכח מיידית שהאופציה שאין גבול (והתמונות של כל סביבה הן צפופות) נותנות סתירה להיות f חח"ע, בדיוק כמו קודם. לכן בכל אחת מהנקודות z_1,z_2 קיים גבול ל-$f(z)$ במובן הרחב, ונסמן את הגבולות ב-w_1,w_2. הגרסה המוכללת של משפט ההעתקה הפתוחה לעיל שוב גורר שבהכרח $w_1\neq w_2$ וכן $w_i\notin f(U\setminus\{z_1,z_2\})$ – אחרת נקבל סתירה לחח"ע בחיתוך של תמונות של סביבות מנוקבות. בפרט, לא ייתכן $w_1=w_2=\infty$, ולכן לפחות אחת מ-w_1,w_2 סופיות. אם שתיהן סופיות, אז החלת משפט ההשלמה של רימן על כל אחת מ-z_i בנפרד מראה שאפשר להמשיך את f ברציפות (ואנליטיות) לכל U; ואם למשל $w_2=\infty$ אך w_1 סופי, אז ניתן להשלים את f לפונקציה אנליטית ב-z_1, ולכן בכל $U\setminus\{z_2\}$, שגם תקיים $\lim_{z\to z_2}f(z)=w_2=\infty$. וכמובן שבשני המקרים, ההשלמות שביצענו נותרו חח"ע.

הערה: את העובדה שאחרי ההשלמה הפונקציות נשארות חח"ע אפשר לראות גם כמסקנה מהטענה הבאה: תהא $f:U\to\mathbb{C}$ אנליטית לא קבועה. אזי לכל n טבעי, הקבוצה $W_n=\{w\in\mathbb{C}:\#f^{-1}(w)\geq n\}$ (כלומר, קבוצת כל הנקודות w להן לפחות n מקורות תחת f) היא קבוצה פתוחה. את הטענה הזו קל להוכיח מתוך משפט ההעתקה הפתוחה: אם $w\in W_n$, אזי קיימים $z_1,\ldots,z_n$ שונים כך ש-$f(z_i)=w$ (יכול להיות שיש עוד, אבל בטוח יש לפחות n). ניקח מסביב לכל z_i סביבה פתוחה קטנה $B(z_i,\varepsilon_i)$, כך שכל הסביבות יהיו זרות זו לזו. ממשפט ההעתקה הפתוחה, כל התמונות $f(B(z_i,\varepsilon_i))$ יכילו סביבות של w, ולכן גם החיתוך שלהן יכיל סביבה $B(w,\varepsilon)$. מכאן שלכל $w'\in B(w,\varepsilon)$ יש מקור אחד לפחות בכל אחת מהסביבות הזרות

$B(z_i,\varepsilon_i)$, ולכן לפחות n מקורות שונים, כלומר $w' \in W_n$ – כלומר הראנו שלכל $w \in W_n$ יש סביבה $B(w,\varepsilon)$ שמוכלת ב-W_n, כנדרש.

איך זה רלוונטי לשאלה? ברור שמתקיים ש-f חח"ע אם ורק אם $W_2=\emptyset$. אם נשלים את f באנליטיות למספר סופי של ערכים נוספים, הרי שנגדיל את W_2 למספר סופי של נקודות בלבד. אך קבוצה סופית יכולה להיות פתוחה רק כאשר היא ריקה, לכן W_2 נשארת ריקה ו-f נשארת חח"ע, מש"ל. הטיעון הזה גם מראה שאם היינו מניחים למשל במקום חח"ע שכל ערך של f מתקבל לכל היותר n פעמים, אז תכונה זו גם הייתה נשמרת אחרי השלמת f במספר סופי של נקודות (וקל לראות שגם תכונה זו מספיק בשביל לפסול את המקרה בו ל-f אין גבול בנקודה בקסורטי-ויירשטראס).

שימו לב גם שניסוח שקול לטענה הנ"ל הוא שהקבוצות $Z_n=\{w\in\mathbb{C} : \#f^{-1}(w)\le n\}$, הן קבוצות סגורות, לכל n טבעי.

(ג) תהא $\phi : \mathbb{C}\setminus A \to U$ שקילות קונפורמית, בפרט חח"ע. מהשיקולים של סעיף (א), ניווכח שבנקודות $z_0,z_1,\ldots,z_n$ של $A\cup\{\infty\}$ קיימים לפונקציה גבולות (במובן הרחב) $w_k=\lim_{z\to z_k}$, אשר כולם שונים זה מזה ומכל ערכי הפונקציה, ובפרט לכל היותר אחד מהם הוא אינסוף, ולכן ניתן להשלים את ϕ לפונקציה גזירה וחח"ע מ-$\mathbb{C}\setminus\{z_k\}$ (או מ-$\mathbb{C}$ כולו) ל-$\mathbb{C}$, ולכן מסעיף (א) זו בהכרח העתקת מביוס, ו-ϕ המקורית היא הצמצום שלה ל-$\mathbb{C}\setminus A$. נקבל שבהכרח אחד מתוך $w_0,\ldots,w_n$ הוא ∞, כי אחרת ϕ אמורה לקבל את הערך אינסוף בנקודה של $\mathbb{C}\setminus A$, בסתירה לכך שהיא מוגדרת וגזירה שם. נגדיר $B=\{w_0,\ldots,w_n\}\setminus\{\infty\}$ ונקבל שאכן $|B|=n=|A|$ ו-$\phi(A\cup\{\infty\})=B\cup\{\infty\}$, כנדרש.

בנוסף הכיוון ההפוך ברור: כל העתקת מביוס כנ"ל אכן מגדירה שקילות קונפורמית.

(ד) לפי הסעיף הקודם, מדובר בצמצומים של העתקות מביוס ϕ_A המקיימות $\phi(\{0,1,\infty\})=\{0,1,\infty\}$. נסמן $z_0=0, z_1=1, z_2=\infty$. כפי שראינו בשאלה (8ד) בתרגיל בית מספר 2, לכל סידור $\{w_0,w_1,w_2\}=\{0,1,\infty\}$, קיימת ויחידה העתקת מביוס עם $\phi(z_k)=w_k$ לכל k, ואלו הן:

$$\begin{array}{llllll}
z\mapsto z, & 0,1,\infty\mapsto 0,1,\infty \;; & z\mapsto \frac{-1}{z-1}, & 0,1,\infty\mapsto 1,\infty,0 \;; & z\mapsto\frac{z-1}{z}, & 0,1,\infty\mapsto\infty,0,1\\
z\mapsto 1-z, & 0,1,\infty\mapsto 1,0,\infty \;; & z\mapsto \frac{1}{z}, & 0,1,\infty\mapsto \infty,1,0 \;; & z\mapsto\frac{z}{z-1}, & 0,1,\infty\mapsto 0,\infty,1
\end{array}$$

(ה) לפי סעיף (ג), כל שקילות קונפורמית כזו חייבת להיות העתקת מביוס ϕ אשר שולחת את $\{0,1,3,\infty\}$ ל-$\{0,1,w,\infty\}$ (עבור $w=i,\frac{1}{3}$ בהתאמה). עבור $w=i$ אין אף העתקת מביוס כזו, שכן 4 הנקודות $0,1,3,\infty$ נמצאות על ישר אחד (הציר הממשי), והעתקות מביוס מעבירות ישרים ומעגלים לישרים ומעגלים, אך $0,1,\infty,i$ אינן נמצאות על ישר או מעגל אחד (למשל, כי היחיד דרך $0,1,\infty$ הוא הציר הממשי, ו-i לא עליו). לכן $\mathbb{C}\setminus\{0,1,i\}$ אינו שקול קונפורמית ל-$\mathbb{C}\setminus\{0,1,3\}$.

לעומת זאת, ההעתקות

$$\begin{array}{llll}
z\mapsto\frac{1}{z}, & 0,1,3,\infty\mapsto\infty,1,\frac{1}{3},0 \;; & z\mapsto\frac{z}{3}, & 0,1,3,\infty\mapsto 0,\frac{1}{3},1,\infty\\
z\mapsto\frac{z-3}{3z-3}, & 0,1,3,\infty\mapsto 1,\infty,0,\frac{1}{3} \;; & z\mapsto\frac{z-1}{z-3}, & 0,1,3,\infty\mapsto\frac{1}{3},0,\infty,1
\end{array}$$

הן שקילויות קונפורמית מ-$\mathbb{C}\setminus\{0,1,3\}$ ל-$\mathbb{C}\setminus\{0,1,\frac{1}{3}\}$. ניתן לראות שאלו כל השקילויות על ידי התבוננות ביחס הכפול (ראו שאלה 9 מתרגיל 2, ובפרט סעיף ד): אם $(z_0,z_1,z_2,z_3)=(0,1,3,\infty)$ ו-$\{w_0,w_1,w_2,w_3\}=\{0,1,\frac{1}{3},\infty\}$ מקיימים $w_k=\phi(z_k)$ לכל k אז גם $[w_0,w_3;w_2,w_1]=[0,\infty;3,1]=3$, ובמעבר על כל הסידורים האפשריים של w_k, ניווכח שזה מתקיים רק עבור ארבעת הסידורים שמתאימים להעתקות לעיל (היחסים הכפולים האחרים שנקבל הם $\frac{1}{3},-2,-\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{2}{3}$, שכל אחד מתאים ל-4 סידורים שונים של w_k). לבסוף כל בחירה של w_k שמקיימת את אילוץ היחס הכפול אכן מגדירה העתקת מביוס יחידה המתאימה לה, והן ההעתקות לעיל.

(9) (א) נתבונן בשקילות הקונפורמית $\phi_a : D\to D$ של D לעצמו, ששולחת את a ל-0. אזי גם $\phi_a|_{D\setminus\{a\}}$ היא אנליטית, חח"ע, והתמונה שלה היא $D\setminus\{\phi_a(a)\}=D^*$, ולכן היא שקילות קונפורמית מ-$D\setminus\{a\}$ ל-D^*, כנדרש.

(ב) ממשפט ההעתקה של רימן, אנו יודעים שקיימת העתקה קונפורמית $f : U\to D$ ששולחת את a ל-0. לכן כמו בסעיף הקודם, $f|_{U_a}$ היא שקילות קונפורמית מ-U_a ל-D^*, כנדרש. מצד שני, משפט ההשלמה של רימן מראה לנו שכל שקילות קונפורמית בין U_a ו-D^* היא מהצורה הזו, שכן אם $f : U_a\to D^*$ אנליטית, חח"ע ועל, אז בפרט f חסומה בסביבה מנוקבת של a (ע"י 1), ולכן ניתן להגדיר אותה גם ב-a ברציפות, והערך החדש גם יהיה בעל $|f(a)|<1$ (אחרת הוא מקסימום מקומי, בסתירה לעקרון המקסימום), ולאחר ההשלמה הפונקציה תשאר חח"ע, כפי שראינו בשאלה (6) בתרגיל 10. לכן האפשרות היחידה היא ש-$f(a)=0$, ולכן למעשה השלמנו את f לשקילות קונפורמית מ-U ל-D ששולחת את a ל-0, כפי שטענו. נובע מכאן מיידית שאם f,g שתי שקילויות כנ"ל, אז $f\circ g^{-1} : D\to D$ היא שקילות קונפורמית ששולחת את 0 ל-0, ולכן

היא מהצורה $f(g^{-1}(z)) = \lambda z$ לכל $z \in D$, עבור $|\lambda| = 1$ קבוע. בפרט אם נסמן $w = g^{-1}(z)$ נקבל $f(w) = \lambda g(w)$ לכל $w \in U$, כפי שטענו.

(ג) ההעתקה $z \mapsto \frac{1}{z}$ היא אנליטית ב-D^*, חח"ע, ועל התמונה $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, כלומר שקילות קונפורמית בין התחומים הנתונים.

(ד) ראשית ברור כי ההעתקה $f(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ היא אכן אנליטית בכל D^*. נבדוק חח"ע ועל: יהא $w \in \mathbb{C}$. מהם הפתרונות ל-$f(z) = w$? זה שקול למשוואה ריבועית $z^2 - 2wz + 1 = 0$. זו משוואה ריבועית, לכן יש לה תמיד שני פתרונות, z_1, z_2 (ייתכן שורש כפול ואז $z_1 = z_2$). פתרונות אלה תמיד מקיימים $z_1 + z_2 = 2w$, $z_1 \cdot z_2 = 1$. מהנוסחה האחרונה נובע שאם אחד הפתרונות מקיים $|z_1| < 1$ אז השני מקיים $|z_2| > 1$ ולהיפך; וכן שמתקיים $|z_1| = 1$ אם ורק אם $|z_2| = 1$. במקרה הראשון נקבל שבדיוק אחד מהפתרונות נמצא בתוך D^*, והשני נמצא במשלים של הדיסק הסגור. במקרה השני נקבל $z_2 = 1/z_1 = \overline{z_1}$ ולכן $w = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) \in [-1,1]$ (ולהפך – אם $w \in [-1,1]$ אז פתרונות המשוואה הם אכן מספרים צמודים על מעגל היחידה, ספציפית $z_i = e^{\pm i\theta}$ עבור $\theta = \arccos(w)$). מחישובים אלה אנו למדים שלכל $w \notin [-1,1]$ קיים ויחיד $z \in D^*$ עם $f(z) = w$, ולהפך, לכל $z \in D^*$ מתקיים $f(z) \notin [-1,1]$. שתי טענות אלה בדיוק מראות ש-$f : D^* \to \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ היא חח"ע ועל.

(ה) תהא ρ המטריקה ההיפרבולית על מעגל היחידה (ראו את התרגיל על מטריקה היפרבולית). אנו טוענים שקיימת שקילות כזו אם ורק אם $\rho(a,b) = \rho(c,d)$, ובמקרה הזה יש בדיוק שתי שקילויות – אשר נתונות על ידי העתקות מביוס $\phi_{1,2} : D \to D$ אשר אחת שולחת את הזוגות (a,b) לזוג (c,d), והשנייה שולחת את הזוג (a,b) לזוג (d,c) (בסדר ההפוך).

מדוע? ובכן, מאותם שיקולים כמו בסעיף (ב), אנו רואים שכל שקילות קונפורמית בין שני תחומים כנ"ל ניתנת להשלמה אנליטית לשקילות קונפורמית מ-D לעצמו, כלומר להעתקת מביוס ϕ ששומרת על D. על מנת שההעתקה הזו תצטמצם חזרה לשקילות בין $D \setminus \{a,b\}$ ו-$D \setminus \{c,d\}$, היא חייבת כמובן לשלוח את הזוג $\{a,b\}$ לזוג $\{c,d\}$ (בסדר כלשהו).

מצד שני, כפי שמראים בתרגיל על המטריקה ההיפרבולית, המטריקה נשמרת תחת ϕ, ולמעשה המטריקה בדיוק מחזיקה את המידע לגבי אילו זוגות נקודות יכולים לעבור לאילו זוגות תחת העתקת מביוס – ראו את החצי השני של שאלה (3) בתרגיל על המטריקה. לכן, אם $\rho(a,b) \neq \rho(c,d)$, אז אין בכלל העתקת מביוס שמחליפה בין הזוגות; ואילו אם $\rho(a,b) = \rho(c,d)$, אז קיימת ויחידה ϕ_1 ששולחת את (a,b) ל-(c,d), וקיימת ויחידה ϕ_2 ששולחת את (a,b) ל-(d,c) (ומעצם האילוצים הן כמובן שונות זו מזו), וכל אחת מהשתיים משרה שקילות קונפורמית בין $D \setminus \{a,b\}$ ו-$D \setminus \{c,d\}$, כנדרש.

(10) (א) נגדיר $\delta = (K,F) = \min\{|y-x| : x \in K, y \in F\}$. הוא מוגדר היטב כי שתי הקבוצות סגורות, וחיובי כי הן זרות (וסופי אם ורק אם F לא ריקה). ואכן על פי הגדרה בהכרח מתקיים שאם $|x-y| < \delta$ ו-$x \in K$, אז $y \notin F$, כלומר $y \in K \cup U$, כנדרש.

(ב) אכן, מניוטון-לייבניץ (או מהגדרה), מתקיים עבור $e = [u,v]$

$$\int_e f = \int_u^v g' = g(v) - g(u) = (-u+v)(g) = \partial(e)(g)$$

ולכן באופן כללי נקבל מאדיטיביות של הביטויים

$$\int_C f = \sum_{e \in C} \int_e f = \sum_{e \in C} (\partial(e)(g)) = \left(\sum_{e \in C} \partial(e)\right)(g) = \partial(C)(g)$$

כנדרש.

(ג) לכל מסילת ריבוע σ כנ"ל, נקבל $\delta(\sigma) = 0$ כי כל קדקוד של הריבוע מופיע פעם אחת עם מקדם 1 ופעם אחת עם מקדם -1, וכל קדקוד אחר לא מופיע בכלל במחלק. בנוסף נקבל $\int_\sigma \frac{1}{z-z_0} = 0$ עבור כל ריבוע שריג מלבד הריבוע היחיד אשר מקיף את z_0, ועבור σ_0 אשר מתאים לריבוע זה נקבל $\int_{\sigma_0} \frac{1}{z-z_0} = \tau i$, ונשים לב ש-$\sigma_0 \subset C_0$, שכן מהגדרתו הריבוע שהוא מקיף נוגע ב-K (בנקודה z_0). לסיום כל הקשתות המכוונות שמופיעות ב-σות שונות הן שונות זו מזו (אותה קשת יכולה להופיע פעמיים באוריינטציות שונות, אך לא באותה אוריינטציה), ולכן נקבל מאדיטיביות

$$\partial(C_0) = \sum_{\sigma \subset C_0} \partial(\sigma) = \sum_{\sigma \subset C_0} 0 = 0$$

$$\int_{C_0} \frac{1}{z-z_0} = \sum_{\sigma \subset C_0} \frac{1}{z-z_0} = \tau i + \sum_{\sigma_0 \neq \sigma \subset C_0} 0 = \tau i$$

כנדרש. כמו כן, אם $e \in C_0$ אז היא צלע של ריבוע בעל אורך צלע $\frac{\delta}{2}$ אשר מכיל נקודה $x \in K$ כלשהי, ולכן לכל $y \in e$ מתקיים $|y - x| \leq \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$, ולכן מסעיף (א) מתקיים $y \in K \cup U$; כלומר, $e \subset K \cup U$, כנדרש.

(ד) נשים לב שכל פעם שמחקנו זוג צלעות הפוכות $e = [u, v], \bar{e} = [v, u]$, התקיים מהגדרה $\partial(\{e, \bar{e}\}) = (-u + v) + (-v + u) = 0$ וכן $\int_{\{e,\bar{e}\}} \frac{1}{z-z_0} = \int_u^v \frac{1}{z-z_0} + \int_v^u \frac{1}{z-z_0} = 0$ ולכן לא שינינו את ה-∂ או ה-$\int$ הכולל, ובסוף יתקבל $\int_{C_1} = \int_{C_0} = \tau i$ ו-$\partial(C_1) = \partial(C_0) = 0$, כנדרש.

כמו כן, אם $e \in C_1$, אז $e \cap K = \emptyset$, שכן אחרת היינו מקבלים ששני הריבועים שחולקים את הקשת e נוגעים ב-K (בנקודות של $e \cap K$), ולכן e הופיעה ב-C_0 בשתי האוריינטציות, והיינו אמורים לזרוק אותה במעבר ל-C_1. לפי הסעיף הקודם מתקיים $e \subset U \cup K$, כלומר $e \subset (U \cup K) \setminus K = U$, כנדרש.

(ה) לו הייתה g כזו, היות שהיא מוגדרת בסביבה U של C_1, הרי שהיה מתקיים

$$\tau i = \int_{C_1} \frac{1}{z - z_0} = \int_{C_1} g' = \partial(C_1)(g) = 0(g) = 0$$

וזו כמובן סתירה. $\square$