תורת הפונקציות המרוכבות 1 - תרגיל בית מספר 7
תאריך הגשה: 30.8.2018

(1) אפיינו את כל האפסים והסינגולריויות של הפונקציות הבאות בכל $\mathbb{C}$ וכן באינסוף (אפס מסדר n, קוטב מסדר n, סינגולריות עיקרית, סינגולריות סליקה, או סינגולריות לא מבודדת):

(א) $e^{z^2+\frac{1}{z}}$

(ב) $\frac{1}{e^{1/z}-1}$

(ג) $\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$

(ד) $\frac{p(z)}{q(z)}$, באשר p, q פולינומים זרים ממעלות n, m.

(2) (א) יהא $U \subset \mathbb{C}$ תחום, ו-$w_0 \in \mathbb{C}$. הראו כי משפחת הפונקציות הגזירות החח"ע $f : U \to \mathbb{C}$ המקיימות $w_0 \notin f(U)$ היא נורמלית.

(ב) הראו כי משפחת הפונקציות הגזירות החח"ע $f : D \to \mathbb{C}$ המקיימות $f(0) = 0$ ו-$|f'(0)| = 1$ היא נורמלית, והגבולות הם תמיד פונקציות (ולא אינסוף). הסיקו שלכל n קיים M_n כך שלכל פונקציה כנ"ל מתקיים $|f^{(n)}(0)| \le M_n$. באופן שקול, אם טור חזקות $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ מתכנס ברדיוס 1 לפונקציה חח"ע ומקיים $a_0 = 0, |a_1| = 1$ אז $|a_n| \le \frac{M_n}{n!}$.

(ג) בדקו שהפונקציה $f : D \to 1$ המוגדרת לפי $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ היא פונקציה חח"ע ומקיימת $a_n = n$ לכל n.

(3) תהא f פונקציה אנליטית לא-קבועה בטבעת $\{0 < |z| < 1\}$, המקיימת $|f(\frac{1}{n})| \le \frac{1}{n!}$ לכל n טבעי. הראו כי ל-f בהכרח יש סינגולריות עיקרית ב-0. מצאו דוגמה לפונקציה f כזו.

(4) תהא $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים, ונניח שקיים קבוע $C > 0$ עבורו $|f^{(n)}(x)| \le C^n n!$ לכל $x \in (0,1)$ ולכל $n \ge 0$. הראו כי קיים תחום $U \supset [0,1]$ בו ל-f יש הרחבה אנליטית.

(5) פונקציית גאמא מוגדרת כך: $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$. (הענף של x^{s-1} הוא הראשי: $e^{(s-1)\operatorname{Log}(x)}$)

(א) הראו כי האינטגרל הנ"ל מתכנס (בהחלט) לכל $s \in \mathbb{C}$ עם $\operatorname{Re}(s) > 0$. מה קורה עבור $s = 0$?

(ב) באמצעות אינטגרציה בחלקים, הראו כי מתקיים $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ לכל $\operatorname{Re}(s) > 0$. וודאו כי מתקיים $\Gamma(1) = 1$, והסיקו שמתקיים $\Gamma(n+1) = n!$ לכל n טבעי.

(ג) יהא $m \ge 1$ טבעי, ונגדיר $\Gamma_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{s\cdot(s+1)\cdot(s+2)\cdots(s+m-1)}$, לכל s עם $\operatorname{Re}(s) > -m$ שאינו שלם אי-חיובי. הראו ש-Γ_m הינה המשכה אנליטית של Γ לתחום ההגדרה שלו.

(ד) הסיקו מהסעיף הקודם שניתן להמשיך אנליטית את Γ לפונקציה אנליטית בתחום $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, אותה גם נסמן ב-$\Gamma$, ושמקיימת את המשוואה הפונקציונלית $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ בכל תחום ההגדרה.

(ה) הראו כי Γ היא למעשה פונקציה מרומורפית ב-$\mathbb{C}$: ספציפית, הוכיחו כי לכל $m \ge 0$ שלם, ל-$\Gamma(s)$ יש קוטב פשוט ב-$s = -m$, עם שארית $\operatorname{Res}(\Gamma, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}$. (רמז: השתמשו במשוואה הפונקציונלית, או בנוסחה של Γ_{m+1}). איזה סוג סינגולריות יש ל-Γ באינסוף?

(6) לכל אחת מהפונקציות הבאות, ולכל $z \in \mathbb{C}$, בדקו האם הפונקציות מקיימות את משוואת קושי-רימן ב-z, והאם הן גזירות ב-z.

(א) $f(x+iy) = \sqrt{|xy|}$

(ב) $f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$

(7) (א) תהא $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ פונקציה מרוכבת גזירה. נייצג אותה בקואורדינטות פולאריות בתור

$$f(r \cdot e^{i\theta}) = u(r,\theta) + i \cdot v(r,\theta),$$

באשר u, v הן פונקציות ממשיות. הראו כי משוואות קושי רימן בייצוג זה הן

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

(ב) הציגו את הענף הראשי של הפונקציה $z \mapsto z^\alpha$ בקואורדינטות פולאריות, וודאו שהיא מקיימת את משוואות קושי-רימן בגרסה הנ"ל.

(8) תהא $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ מוגדרת לפי $u(z) = \log|z|$. הראו כי לא קיימת פונקציה אנליטית $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ כך ש-$u = \mathrm{Re}(f)$.

(9) מצאו צמודה הרמונית לפונקציות הבאות:
(א) $u(z) = (z)$ בתחום $C \setminus (-\infty, 0]$.
(ב) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ בתחום $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(ג) $u(x,y) = e^x \cos(y)$ בכל $\mathbb{C}$.

(10) הוכיחו את עקרון השיקוף לפונקציות הרמוניות: יהא $\mathbb{H}$ חצי המישור העליון, ופונקציה רציפה $u : \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ אשר הרמונית ב-$\mathbb{H}$ ומקיימת $u(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$. אזי הפונקציה $\widetilde{u} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ המוגדרת לפי

$$\widetilde{u}(z) = \begin{cases} u(z), & z \in \overline{\mathbb{H}} \\ -u(\overline{z}), & z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{H} \end{cases}$$

היא הרמונית בכל $\mathbb{C}$. רמז: השתמשו בעובדה שכל פונקציה המקיימת את תכונת הערך הממוצע היא הרמונית.

שאלות רשות והעשרה בנושא גרעין פואסון

(1) יהא $n \geq 1$. הוכיחו את ההכללה הבאה של גרעין פאסון: תהא f פונקציה אנליטית המוגדרת בתחום אשר מכיל את $\overline{D}$. הראו כי לכל $w \in D$ מתקיים

$$f^{(n)}(w) = \frac{2n!}{\tau} \int_0^\tau f(e^{it}) \,\mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}}{(e^{it} - w)^{n+1}} \right) dt.$$

הסיקו שהנוסחה נכונה גם עבור פונקציה הרמונית u עם אותו תחום הגדרה, באשר $f^{(n)}$ מוחלף ב-$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(w)$.
רמז: העזרו בנוסחת קושי עבור הנגזרת, ובהוכחה של גרעין פואסון.

(2) תהא u פונקציה הרמונית המוגדרת בסביבה של $\overline{D}$. הראו כי הצמודות ההרמוניות של u בתוך D נתונות על ידי הנוסחה

$$v(w) = C + \frac{1}{\tau} \int_0^\tau u(e^{it}) \,\mathrm{Im}\left(\frac{e^{it} + w}{e^{it} - w} \right) dt$$

לכל $w \in D$, עבור C קבוע. רמז: מה מקבלים כאשר מחליפים את u ב-$f = u + iv$?

(3) תהא $h : \partial D \to \mathbb{R}$ רציפה. נניח שלכל פונקציה הרמונית u המוגדרת בסביבה של $\overline{D}$ מתקיים

$$\int_0^\tau u(e^{it}) h(e^{it}) dt = 0.$$

הסיקו ש-h היא בהכרח זהותית 0. רמז: הזכרו שכל פונקציה רציפה על המעגל ניתנת להשלמה לפונקציה הרמונית.
הסיקו מכאן שאת הפונקציות המופיעות בגרעין פואסון, או בשאלות (1) ו-(2), לא ניתן להחליף באף פונקציה רציפה ממשית אחרת.