תורת הפונקציות המרוכבות 1 - פתרון תרגיל בית מספר 7

(1) (א) הפונקציה מוגדרת וגזירה בכל המישור למעט $z=0$, ולא מתאפסת בכל התחום הזה. ב-$z=0,\infty$ יש לה סינגולריות עיקרית: למשל כי ניתן לכתוב אותה בתור $e^{z^2}\cdot e^{\frac{1}{z}}$, שלהן בהצלבה סינגולריויות עיקרית/סליקה באינסוף ובאפס; או כי הפיתוח לטור לורן הוא

$$e^{z^2}\cdot e^{\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{-m}}{m!}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{2n-m=k}\frac{1}{n!m!}\right)z^k$$

מתכנס בכל $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ובעל אינסוף חזקות שליליות של z (ולכן עיקרי ב-0) ואינסוף חזקות חיוביות של z (ולכן עיקרי באינסוף); או כי לפונקציה $z^2+\frac{1}{z}$ יש קטבים באפס ואינסוף (מסדר 1 ו-2 בהתאמה), ולכן בסביבות שלהם התמונה שלה מכילה סביבה פתוחה של אינסוף, ובפרט אינסוף כפולות שלמות של τi, ולכן $e^{z^2+\frac{1}{z}}$ מקבלת את הערך 1 אינסוף פעמים בכל סביבה של 0 או ∞ – וזה גורר שזו סינגולריות עיקרית.

(ב) הפונקציה אף פעם לא מתאפסת. היא מוגדרת וגזירה כל עוד המכנה מוגדר ושונה מאפס, כלומר בכל הנקודות $z\notin\{0\}\cup\{\frac{1}{n\tau i}:n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$. בנקודות $z_n=\frac{1}{n\tau i}$, לפונקציה יש קוטב פשוט, שכן ל-$e^{1/z}-1$ יש שם אפס פשוט, שקל לראות מתוך גזירת הפונקציה, או לחילופין מתוך כך של-e^z-1 יש אפס פשוט ב-$z=n\tau i$ והנגזרת של הפונקציה $z\mapsto\frac{1}{z}$ אינה מתאפסת ב-$z=z_n$.

מכיוון שמתקיים $z_n\to 0$ כאשר $n\to\pm\infty$, הנקודה 0 היא סינגולריות לא מבודדת של הפונקציה. שימו לב שבמקרה הזה היא מקיימת כל מיני תכונות שמזכירות סינגולריות עיקרית, למשל שבכל סביבה שלה כל הערכים למעט 0 מתקבלים אינסוף פעמים, אך מכיוון שאינה מבודדת, לא נכון להסיק מכאן שהיא סינגולריות עיקרית! דוגמה נוספת היא שאם ננסה לפתח את הפונקציה לטור לורן (על ידי שימוש בטור של $e^{1/z}$), בטור שנקבל אכן יהיו אינסוף מקדמים שליליים, אך הוא לא יהיה רלוונטי כי הוא לא יתכנס בסביבה מנוקבת של 0, אלא בטבעת אינסופית עם רדיוס פנימי $r=\frac{1}{\tau i}$ (כי $z_{\pm 1}$ הם הסינגולריויות עם ערך מוחלט מקסימלי).

באינסוף גם יש לפונקציה קוטב פשוט, שכן ל-$\frac{1}{e^z-1}=\frac{1}{e^{1/z}-1}\circ\frac{1}{z}$ יש קוטב פשוט ב-$z=0$. לחילופין ניתן לראות זאת מכך שטור לורן שתואר לעיל, שמתכנס בסביבה של אינסוף, הוא

$$\frac{1}{e^{1/z}-1}=\frac{1}{\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots}=z\frac{1}{1+\frac{1}{2z}+\cdots}=z\left(1-\frac{1}{2z}+\cdots\right)=z-ac12+\cdots$$

והוא מכיל מקדם של z, וכל שאר החזקות הן אי-חיוביות.

(ג) בנקודות $\frac{n}{2}\tau i$, עבור $n\in\mathbb{Z}$, למכנה $\sin(z)$ יש אפס פשוט, והמונה לא מתאפס, לכן לפונקציה יש קוטב פשוט. בדומה, בנקודות $(\frac{n}{2}+\frac{1}{4})\tau i$ עבור $n\in\mathbb{Z}$, למונה יש אפס פשוט והמכנה לא מתאפס, ולכן לפונקציה כולה יש אפס פשוט. בכל שאר המישור הפונקציה גזירה ולא מתאפסת. באינסוף שוב מפתה להגיד שאמורה להיות סינגולריות עיקרית – הרי לכל אחד מ-$\cos,\sin$ יש שם סינגולריות עיקרית – אך מכיוון שהקטבים $\frac{n}{2}\tau i$ שואפים לאינסוף כאשר $n\to\pm\infty$, למעשה אינסוף היא סינגולריות לא מבודדת. "סיבה" מסויימת לכך שלפונקציה אין סינגולריות עיקרית בכלל היא משפט פיקארד הגדול: הפונקציה לא מקבלת באף מקום את הערכים $\pm i$ (בדקו!).

(ד) מכיוון שהפולינומים זרים, קבוצות השורשים שלהם זרות. לכן בכל שורש של p מריבוי k, q לא תתאפס, ולפונקציה הרציונלית יהיה אפס מסדר k; ובדומה לכל שורש של q מריבוי k, לפונקציה יהיה קוטב מסדר k. הסינגולריות באינסוף היא בכל מקרה מבודדת, וההתנהגות של תלויה בהפרש $n-m$: אם הוא חיובי, זהו אפס מסדר $n-m$; אם שלילי, זהו קוטב מסדר $m-n$; ואם שווה ל-0, אז זו סינגולריות סליקה שאינה אפס, וניתן להמשיך ברציפות את הפונקציה הרציונלית באינסוף, וערכה יהיה היחס בין המקדמים המובילים של p,q.

שימו לב שעבור $f=\frac{p}{q}$, סכום השאריות של $\frac{f'}{f}$ בשורשים של p,q ואינסוף, שהוא סכום הסדרים (המסומנים) של האפסים והקטבים של f, אכן שווה ל-0.

(2) (א) נשתמש בלמה של זלצמן: נניח בשלילה שהמשפחה אינה נורמלית, אזי קיימת סדרת פונקציות מהמשפחה f_n, סדרת נקודות $z_n\in U$ ורדיוסים $r_n\to 0$, כך ש-$f_n(z_n+r_nz)\to f(z)$ במ"ש על קומפקטיות, באשר f פונקציה שלמה לא קבועה. נשים לב שמכיוון ש-$w_0\notin\operatorname{Im}(f_n)$, מהורוויץ נקבל ש-$w_0\notin\operatorname{Im}(f)$; ובדומה, מכיוון שכל f_n חח"ע, מהורוויץ נקבל ש-f חח"ע. אך זו סתירה, שכן כפי שראינו כל פונקציה חח"ע שלמה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ היא בהכרח לינארית, ולכן על, כלומר לא מפספסת את w_0, בסתירה.

(ב) תהא f_n סדרת פונקציות מהמשפחה הזו. בתרגול ראינו שמההנחות על $f(0),f'(0)$ נובע שאם ל-n כלשהו מתקיים $f_n(D)\supset D$, אז בהכרח $f_n(D)=D$, ובפרט לא ייתכן $f_n(D)\supset 2D$, ולכן קיימים $w_n\in 2D$

שאינם בתמונה של f_n. על ידי מעבר לת"ס ניתן להניח $w_n \to w_0 \in 2\overline{D}$. לכן הפונקציות: $f_n + w_0 - w_n$ $D \to \mathbb{C}$ הן חח"ע ומפספסות כולן את w_0, ולכן מהסעיף הקודם יש להן ת"ס שמתכנסת במ"ש ל-f על קומפקטיות. היות ש-$w_0 - w_n \to 0$ כאשר $n \to \infty$, נקבל שגם $f_n \to f$ במ"ש על קומפקטיות.
לסיום f אכן חייבת להיות פונקציה ולא אינסוף, כי $f_n(0) = 0 \to 0$ ובפרט נקבל $f(0) = 0$ (ובדומה גם $|f'(0)| = 1$).

נניח בשלילה שעבור n מסוים לא קיים M_n כזה, כלומר הקבוצה $|f^{(n)}(0)|$ עבור f במשפחה אינה חסומה, וניתן לבחור סדרה f_m במשפחה עם $|f_m^{(n)}(0)| > m$. מהנורמליות, יש ל-f_m ת"ס שמתכנסת במ"ש על קומפקטיות לפונקציה אנליטית f. אך התכנסות כזו גוררת גם התכנסות של כל הנגזרות, כלומר $f^{(n)}(0) = \lim_{k\to\infty} f_{m_k}^{(n)}(0) = \infty$, בסתירה לאנליטיות של f. לכן אוסף הנגזרות בהכרח חסום.

(ג) אכן, לפי טור החזקות המוכר של $\frac{1}{(1-z)^2}$ (שהוא הנגזרת של הטור הגיאומטרי), נקבל

$$\frac{z}{(1-z)^2} = z\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^n$$

ואכן $a_n = n$ לכל n. נותר לבדוק רק ש-f אכן חח"ע: ואכן, אם $\frac{z}{(1-z)^2} = \frac{w}{(1-w)^2}$, אז אחרי העברת אגפים נקבל $z(1-w)^2 = w(1-z)^2$, כלומר $z - 2zw + zw^2 = w - 2wz + wz^2$ או לחילופין $(z-w)(1-zw) = 0$, כלומר $z = w$ או $zw = 1$. אך אם $z, w \in D$ אז בהכרח $|zw| < 1$, לכן $1 - zw \neq 0$ ו-$z = w$, כנדרש.

הערות: הראנו ש-$M_n \geq n$ לכל n. נשים לב שגם הפונקציות $f_\lambda(z) = \frac{1}{\lambda} f(\frac{z}{\lambda}) = \frac{z}{(1-\lambda z)^2}$, אשר נקראות פונקציות Koebe מסובבות, הן חח"ע ומקיימות $a_0 = 0, a_1 = 1$ ו-$|a_n| = n$ לכל n. השערת ביברבאך גורסת שאכן מתקיים בדיוק $M_n = n$, כלומר $|a_n| \leq n$ לכל n, ויותר על כן אם פונקציה חח"ע כלשהי מקיימת $a_0 = 0, a_1 = 1$ ו-$|a_n| = n$ עבור n אחד לפחות כלשהו, אז f בהכרח אחת מ-f_λ. ההשערה שוערה ב-1916 על ידי המתמטיקאי הנאצי לודוויג ביברבאך, שגם הוכיח אותה עבור $n = 2$. מקרים פרטיים שלה הוכחו בהדרגה על ידי מתמטיקאים שונים: עבור $n = 3$ ב-1923, עבור $n = 4$ ב-1955, עבור $n = 6$ ב-1968, עבור $n = 5$ ב-1972. היא הוכחה בשלמותה על ידי המתמטיקאי הצרפתי לואי דה ברנז' ב-1985. סיפור ההוכחה, וכן סיפורים של הוכחות אחרות של דה ברנז', הם מעניינים מאוד, ומומלץ לקרוא על אודותם.
https://en.wikipedia.org/wiki/De_Branges%27s_theorem

(3) נניח בשלילה של-f אין סינגולריות עיקרית, כלומר קיים גבול $\lim_{z\to 0} f(z)$ במובן הרחב. לאורך הסדרה $z_n = \frac{1}{n}$ ברור כי מתקיים $f(z_n) \to 0$ מהנתון, כלומר הגבול הנ"ל הוא בהכרח 0, וניתן להשלים את f אנליטית עם $f(0) = 0$. מכיוון ש-f לא-קבועה, היא מתאפסת ב-0 מסדר סופי כלשהו k, כלומר $f(z) = z^k g(z)$, עבור g אנליטית ב-$B(0,1)$ שמקיימת $g(0) \neq 0$. בפרט, עבור $r > 0$ קטן מספיק מתקיים $|g(z)| > \frac{|g(0)|}{2}$ לכל $z \in B(0,r)$, ולכן $|f(z)| \geq \frac{|g(0)|}{2}|z|^k$, וכשנציב $z = \frac{1}{n}$ עם $n > \frac{1}{r}$ נקבל $\frac{1}{n!} \geq |f(\frac{1}{n})| \geq \frac{g(0)}{2n^k}$. וזה כמובן לא נכון עבור n גדול מספיק, שכן עצרת גדלה מהר יותר מכל פולינום. סתירה! לכן בהכרח יש סינגולריות עיקרית.
דוגמה לפונקציה כזו היא למשל $f(z) = e^{-1/z^2}$. כשנציב $z = 1/n$ נקבל

$$f(z) = e^{-n^2} = (e^n)^{-n} < n^{-n} < \frac{1}{n!}$$

כנדרש. (השתמשנו בכך ש-$x < e^x$ לכל x.) לפונקציה זו כמובן יש סינגולריות עיקרית ב-0.

(4) נסמן $r = \frac{1}{C}$. נשים לב שמהנתון, לכל $x \in (0,1)$ מתקיים שטור טיילור $g_x(x+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} z^n$ הוא טור חזקות אשר מתכנס ברדיוס r (כי המקדם ה-n חסום בערך מוחלט על ידי C^n); בפרט הוא באמת מתכנס ל-$f(x+z)$ עבור $z \in (-r,r) \cap [-x, 1-x]$ (אפשר לראות זאת למשל משימוש בשארית לגראנז' ובחסמים הגלובאליים על הנגזרות). מכאן שהטור הזה למעשה מהווה המשכה אנליטית של f ל-$B(x,r)$. כמובן שלכל $x_1 < x_2$ עבורם הכדורים $B(x_1,r), B(x_2,r)$ נחתכים, הפונקציות g_{x_1}, g_{x_2} מסכימות על חיתוך הכדורים מיחידות ההמשכה האנליטית (ספציפית, כי מסכימות זו עם זו ועם f על הקטע $(x_2 - r, x_1 + r)$). לכן אפשר להגדיר פונקציה אנליטית g על התחום $U = \bigcup_{x\in(0,1)} B(x,r) \supset [0,1]$, על ידי $g(z) = g_x(z)$ לנקודה שרירותית $x \in (0,1)$ עבורה $z \in B(x,r)$. זו אכן תהיה המשכה אנליטית של f ל-U, כנדרש.

(5) (א) אכן, לאינטגרל הלא-אמיתי $\int_0^\infty |x^{s-1}| e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{\mathrm{Re}(s)-1} e^{-x} dx$ יכולות להיות בעיות רק ב-0 ואינסוף. באינסוף אף פעם אין בעיה, שכן האקספוננט דועך הרבה יותר מהר מכל חזקה $x^{\mathrm{Re}(s)-1}$. בסביבת 0, מתקיים

$e^{-x} \approx 1$, ולכן ההתכנסות שקולה להתכנסות של $\int_0^1 x^{\mathrm{Re}(s)-1}dx$ – ואינטגרל זה כידוע מתכנס אם ורק אם $\mathrm{Re}(s)-1>-1$, כלומר $\mathrm{Re}(s)>0$, כנדרש.

עבור $s=0$, ספציפית, מקבלים שהאינטגרל $\Gamma(0)=\int_0^\infty x^{-1}e^{-x}dx$ מתנהג כמו $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ בסביבת 0, ואינטגרל זה מתבדר לאינסוף – כלומר האינטגרל לא מתכנס, לא בהחלט וגם לא בתנאי.

(ב) יהא $\mathrm{Re}(s)>0$, נגזור את הפונקציה $f_s(x)=x^se^{-x}$: מלייבניץ, הנגזרת שלה היא $f_s'(x)=sx^{s-1}e^{-x}-x^se^{-x}$. מצד שני, ברור שהפונקצייה מקיימת $f_s(x)\to 0$ כאשר $x\to 0^+$ (בגלל $\mathrm{Re}(s)>0$) או $x\to\infty$ (תמיד), ולכן

$$0=f_s(x)|_0^\infty=\int_0^\infty f_s'(x)dx=\int_0^\infty (sx^{s-1}-x^s)e^{-x}dx=s\Gamma(s)-\Gamma(s+1)$$

וזו בדיוק הנוסחה הדרושה. עבור $s=1$ מקבלים

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty x^0e^{-x}dx=(-e^{-x})\big|_0^\infty=1=0!$$

ובאינדוקציה נקבל $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\cdot(n-1)!=n!$, כנדרש.

(ג) ראשית נעיר ש-Γ_m אכן אנליטי בתחום ההגדרה שלו: $\mathrm{Re}(s)>-m$ גורר $\mathrm{Re}(s+m)>0$ ולכן $\Gamma(s+m)$ מוגדר ואנליטי. המכנה $s\cdot(s+1)\cdot(s+2)\cdots(s+m-1)$ אנליטי בכל $\mathbb{C}$, ולא מתאפס כל עוד s אינו שלם אי-חיובי (ספציפית בקבוצה $\{0,-1,\dots,-m+1\}$), ולכן גם המנה ביניהם אנליטית בתחום הנ"ל. כעת נותר רק לבדוק שאכן מתקיים $\Gamma_m(s)=\Gamma(s)$ לכל $\mathrm{Re}(s)>0$, וזה נובע באינדוקציה מהמשוואה הפונקציונלית של הסעיף הקודם: ואכן

$$\Gamma(s+m)=(s+m-1)\Gamma(s+m-1)=(s+m-1)(s+m-2)\Gamma(s+m-2)=\cdots=(s+m-1)\cdots(s+1)\cdot s\Gamma(s)$$

והזהות תכפה לכל $\mathrm{Re}(s)>0$; אחרי חלוקה ב-$(s+m-1)\cdots(s+1)\cdot s$ נקבל בדיוק $\Gamma(s)=\Gamma_m(s)$, כנדרש.

(ד) לכל $s\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$, נבחר $m>-\mathrm{Re}(s)$ שלם שרירותי כלשהו, ונגדיר $\Gamma(s)=\Gamma_m(s)$. ההגדרה אכן לא תהיה תלויה ב-m שנבחר, שכן לכל $m_1>m_2$, הפונקציה Γ_{m_1} היא המשכה אנליטית של Γ_{m_2} – מכיוון ששתיהן ממשיכות אנליטית את Γ המקורית, הן מזדהות על חיתוך תחומי ההגדרה שלהן, אך תחום ההגדרה של Γ_{m_1} מכיל את של Γ_{m_2}, ולכן היא פשוט המשכה שלה. הפונקציה המתקבלת היא אכן אנליטית בתחום הנ"ל. על מנת להוכיח שהמשוואה הפונקציונלית מתקיימת בכל תחום ההגדרה, נסמן $g(s)=\Gamma(s+1)-s\Gamma(s)$. נשים לב שגם $g(s)$ פונקציה אנליטית בתחום הקשיר $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$, ויתר על כן מקיימת $g(s)=0$ לכל $\mathrm{Re}(s)>0$, על פי סעיף (ב). לכן ממשפט היחידות, $g(s)=0$ בכל תחום ההגדרה, כלומר $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ בכל תחום ההגדרה, כנדרש.

(ה) נוכיח באינדוקציה על m. עבור $m=0$, נשים לב שמהמשוואה הפונקציונלית מתקיים לכל s בסביבה מנוקבת של 0, $s\Gamma(s)=\Gamma(s+1)$, ולכן $\lim_{s\to 0}s\Gamma(s)=\lim_{s\to 0}\Gamma(s+1)=\Gamma(1)=1$. מכאן נובע בדיוק של-$\Gamma$ קוטב פשוט ב-0 עם שארית 1, כידוע. (לחילופין, ניתן לכתוב $\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}$, באשר $\Gamma(s+1)$ פונקציה אנליטית ולא מתאפסת בסביבה של $s=0$.) כעת, נשים לב שבסביבה מנוקבת של $-m$ מתקיים $\Gamma(s)=\frac{\Gamma(s+1)}{s}$. מהאינדוקציה, ב-$-m+1$ יש קוטב פשוט עם שארית $\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$, כלומר

$$\lim_{s\to -m+1}(s+m-1)\Gamma(s)=\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{s\to -m}(s+m)\Gamma(s)&=\lim_{s\to -m}(s+m)\frac{\Gamma(s+1)}{s}=\lim_{s\to -m+1}\frac{(s+m-1)\Gamma(s)}{s-1}\\&=\frac{-1}{m}\lim_{s\to -m+1}(s+m-1)\Gamma(s)=\frac{-1}{m}\frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}=\frac{(-1)^m}{m!}\end{aligned}$$

ומכאן נובע שב-$-m$ יש קוטב פשוט מהשארית הנ"ל, כנדרש. השאלה לגבי אינסוף הייתה קצת מכשילה – לא הגדרנו את סוג הסינגולריות הזה, שכן זוהי אינה סינגולריות מבודדת (הרי $-m\to\infty$). לכן לא מדויק להגיד שיש שם סינגולריות עיקרית, אף על פי שהיא חולקת הרבה מאפיינים של סינגולריות עיקרית. סוג זה נקרא סינגולריות גבול או סינגולריות הצטברות.

(6) (א) $u=\sqrt{|xy|}, v=0$, לכן $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$. אם $x\neq 0$ אז $\frac{\partial u}{\partial y}=\operatorname{sgn}(y)\frac{1}{2}\sqrt{|x|/|y|}$ אם $y\neq 0$ או לא מוגדר אם $y=0$, ובכל מקרה $\frac{\partial u}{\partial y}\neq 0$, ומשוואות C-R לא מתקיימות ובפרט הפונקציה לא גזירה. בדומה עבור $\frac{\partial u}{\partial x}$ אם $y\neq 0$. עבור $z=0$ קל לראות שאכן $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$ מתאפסות (כי הפונקציה זהותית אפס על הצירים), ולכן משוואות C-R מתקיימות (בקואורדינטות קרטזיות). אך הפונקציה עדיין לא גזירה בנקודה, כי u איננה דיפרנציאבילית בנקודה $z=0$, למשל $u(t,t)=|t|$ אינה גזירה ב-0.

(ב) קל לראות שלכל $z\neq 0$ הפונקציה f גזירה ב-z, כהרכבה של פונקציות גזירות, ובפרט משוואות C-R מתקיימות. גם בנקודה $z=0$ המשוואות מתקיימות: ואכן, נשים לב שלאורך הצירים $\mathbb{R}, i\mathbb{R}$, תמיד מתקיים $z^4\in\mathbb{R}_+$ חיובי, לכן e^{-1/z^4} הוא ממשי ששואף ל-0 מהר כאשר $|z|\to 0$. יותר פורמלית, אם $z=i^k x$ באשר $x>0$ ו-$k=0,1,2,3$, אז $\frac{1}{z}e^{-1/z^4}=i^{-k}\frac{1}{x}e^{-1/x^4}\xrightarrow[x\to 0^+]{}0$ ולכן $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ בנקודה $z=0$. מצד שני, הפונקציה בבירור אינה גזירה ב-$z=0$, שכן היא אפילו אינה רציפה בה, או חסומה בסביבתה: למשל עבור $z=(1+i)x$ כאשר $x>0$, נקבל $z^4<0$ ולכן $f((1+i)x)\xrightarrow[x\to 0^+]{}\infty$.

(7) (א) נסמן $z=re^{i\theta}$. נגזור את f לפי r ולפי θ לפי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial r}=f'(z)\frac{\partial(re^{i\theta})}{\partial r}=f'(z)e^{i\theta}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial \theta}=\frac{\partial f(re^{i\theta})}{\partial \theta}=f'(z)\frac{\partial(re^{i\theta})}{\partial \theta}=f'(z)ire^{i\theta}$$

מהשוואת אגפי ימין, אנו רואים כי $\frac{\partial f}{\partial\theta}=ir\frac{\partial f}{\partial r}$, ובמונחים של u,v נקבל

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial \theta}=ir\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=-r\frac{\partial v}{\partial r}+ir\frac{\partial u}{\partial r}$$

כשנפריד את הזהות לחלקים ממשיים ומדומים, נקבל את משוואות קושי רימן כפי שנטען.

(ב)

(8) מקומית, מתקיים $u=\operatorname{Re}(\log z)$, לכל בחירה של ענף רציף של log. כפי שהראנו בשיעור (בהוכחת קיום פונקציה אנליטית מתאימה), פונקציה f אשר מקיימת $u=\operatorname{Re}(f)$ מוגדרת ביחידות מקומית עד כדי קבוע חיבורי מדומה, ולכן אם יש f כזו אזי מקומית $f(z)=\log(z)+C$, עבור C מדומה ו-log ענף רציף כלשהו. אולם אז $f-C$ פשוט תגדיר ענף גלובאלי של log, ואין דבר כזה. סתירה.

הוכחה (קצת) אחרת: נניח ש-$f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ מקיימת $\operatorname{Re}(f)=\log|z|$. נגדיר $g(z)=e^{f(z)}$, אזי $g:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ אנליטית ומקיימת $|g(z)|=|z|$ לכל z. בפרט $g(z)\to 0$ כאשר $z\to 0$, ולכן ניתן להשלים את g לאנליטית ב-0 עם הערך 0, ואז היא אנליטית בכל המישור; וכן $g(z)\to\infty$ כאשר $z\to\infty$, ולכן g בהכרח פולינום. הפולינומים היחידים שיקיימו $|g(z)|=|z|$ לכל z הם $g(z)=\lambda z$ עם $\lambda=e^{it}$ על מעגל היחידה. אך אז נקבל ש-$f(z)-it$ הוא ענף גלובאלי של לוגריתם ב-$\mathbb{C}\setminus\{0\}$, בסתירה.

(9) (א) נשים לב ש-$u=\operatorname{Im}(\operatorname{Log}(z))$, או לחילופין, $u=\operatorname{Re}(-i\operatorname{Log}(z))$. לכן $v=\operatorname{Im}(-i\operatorname{Log}(z))=-\operatorname{Re}(\operatorname{Log}(z))=-\log|z|$ היא צמודה הרמונית לה.

(ב) נשים לב שעבור $z=x+iy$ מתקיים $\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$, ולכן $u(x,y)=u(z)=\operatorname{Re}(1/z)$. לכן הצמודה ההרמונית לה היא $v=\operatorname{Im}(1/z)=\frac{-y}{x^2+y^2}$.

(ג) נשים לב ש-

$$u(x,y)=e^x\cos(y)=e^x\cdot\operatorname{Re}(e^{iy})=\operatorname{Re}(e^x\cdot e^{iy})=\operatorname{Re}(e^{x+iy})=\operatorname{Re}(e^z)$$

ולכן הצמודה ההרמונית היא

$$v(z)=\operatorname{Im}(e^z)=e^x\operatorname{Im}(e^{iy})=e^x\sin(y)$$

(10) על פי הרמז, מספיק לבדוק ש-$\widetilde{u}$ אכן מקיימת את תכונת הערך הממוצע, ולמעשה מספיק שהיא מתקיימת בכל נקודה ברדיוס קטן מספיק, שכן בהוכחה שתכונת הערך הממוצע גוררת הרמוניות השתמשנו רק בכך שמתכונת הערך הממוצע נובע שכל מקסימום/מינימום מקומי גורר שהפונקציה קבועה מקומית, וזה דורש רק מעגלים קטנים.

ואכן, לכל נקודה $z\in\mathbb{H}$, אם ניקח r מספיק קטן עבורו $B(z,r)\subset\mathbb{H}$, אז מתוך כך ש-$\widetilde{u}=u$ הרמונית ב-$\mathbb{H}$ נקבל שהיא מקיימת את תכונת הערך הממוצע ב-$B(z,r)$ ובפרט לכל מעגל עם מרכז z ורדיוס קטן מ-r. בדומה אם z בחצי המישור התחתון, אז בכדור בו $B(z,r)$ כולו מוכל בחצי המישור התחתון יתקיים $\widetilde{u}(w)=-u(\overline{w})$ לכל w, ולכן גם האינטגרלים על פני מעגלים וגם הערכים במרכזיהם יהיו פשוט מינוס האינטגרלים / ערכים של השיקופים

שלהם בחצי המישור העליון, ותכונת הערך הממוצע תנבע מהתכונה עבור u. לסיום עבור $z \in \mathbb{R}$, נשים לב שמתקיים $\widetilde{u}(z) = 0$ על פי שתי ההגדרות, ולכל רדיוס R, מתקיים

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau} \widetilde{u}(z+Re^{i\theta})d\theta &= \int_{-\tau/2}^{0} \widetilde{u}(z+Re^{i\theta})d\theta + \int_0^{\tau/2} \widetilde{u}(z+Re^{i\theta})d\theta \\
&= \int_{-\tau/2}^{0} -u(z+Re^{-i\theta})d\theta + \int_0^{\tau/2} u(z+Re^{i\theta})d\theta \\
&= \int_0^{\tau/2} -u(z+Re^{i\theta})d\theta + \int_0^{\tau/2} u(z+Re^{i\theta})d\theta = 0 = \tau\widetilde{u}(z)
\end{aligned}$$

כנדרש.