תורת הפונקציות המרוכבות 1 – נספח על מטריקה היפרבולית בדיסק היחידה

בתרגול האחרון ראינו את ההכללה הבאה של הלמה של שוורץ: אם $f : D \to D$ מקיימת $f(a) = b$, אז לכל $z \in D$ מתקיים $|\phi_b(f(z))| \leq |\phi_a(z)|$, ושיוויון בנקודה $z_0 \neq a$ כלשהי גורר ש-f היא בהכרח מהצורה $\phi_b^{-1} \circ \phi_{\lambda,a}$. ציינו בקצרה שביטויים מהצורה $\phi_a(z)$ קשורים למושג של <u>המרחק ההיפרבולי</u> בין a ו-z. בתרגיל המודרך הבא נגדיר את מושג המרחק הזה, נראה מספר תכונות מעניינות שלו, וננסח את הלמה של שוורץ במונחים שלו. התרגיל הינו להעשרה בלבד, ואינו להגשה.

(1) נגדיר $L : [0,1) \to [0,\infty)$ לפי $L(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. ודאו ש-$L$ מונוטונית עולה, חח"ע ועל. וודאו גם את המשוואה הפונקציונלית $L(x) + L(y) = L(\frac{x+y}{1+xy})$ לכל $0 \leq x, y < 1$.

(2) נגדיר $\rho(a,b) = L(|\phi_{\lambda,a}(b)|)$. הראו שההגדרה לא תלוייה בערך של λ. שימו לב שמתקיים $\rho(0,z) = L(|z|)$ ולכן $|z_1| \leq |z_2| \iff \rho(0,z_1) \leq \rho(0,z_2)$. בסעיפים הבאים נוכיח ש-$\rho$ היא מטריקה, ותכונות נוספות שלה.

(3) הראו ש-ρ נשמרת על ידי העתקות המביוס שמשמרות את D (אומרים גם שהעתקות אלה הן <u>איזומטריות</u> של המטריקה), כלומר: לכל $\psi : D \to D$ מביוס חח"ע ועל, ולכל $a, b \in D$, מתקיים $\rho(\psi a, \psi b) = \rho(a,b)$. רמז: שימו לב ש-$\phi_{\psi a} \circ \psi$ היא העתקת מביוס ששולחת את a ל-0, ולכן בהכרח מהצורה $\phi_{\lambda,a}$.

וודאו גם את הכיוון ההפוך: אם $a, b, c, d \in D$ נקודות כך ש-$\rho(a,b) = \rho(c,d) \neq 0$, אז קיימת ויחידה העתקת מביוס $\psi : D \to D$ חח"ע ועל עם $\psi(a) = c, \psi(b) = d$.

(4) הראו מהגדרה ש-$\rho(0,z) \geq 0$ לכל $z \in D$ ושיוויון מתקיים אמ"מ $z = 0$. באמצעות סעיף (3) הסיקו שלכל $z, w \in D$ מתקיים $\rho(z,w) \geq 0$ ושיוויון מתקיים אם ורק אם $z = w$ (המטריקה ρ לא מנוונת).

(5) שימו לב ש-$\phi_{-1,a}$ מחליפה את a ו-0, ולכן מסעיף (3) נובע ש-$\rho(0,a) = \rho(a,0)$ לכל $a \in D$. השתמשו שוב בסעיף (ג) על מנת להסיק $\rho(a,b) = \rho(b,a)$ לכל $a, b \in D$ (המטריקה ρ סימטרית).

(6) יהיו $x, y > 0$. שימו לב ש-$\phi_{-x}(y) = \frac{x+y}{1+xy}$, והסיקו (באמצעות סעיף (1)) שמתקיים $L(-x,0) + L(0,y) = L(-x,y)$. וודאו שהשיוויון מתקיים גם אם x או y שווים 0.

(7) הראו כי עבור $|\lambda| = 1$, מתקיים $\rho(-\lambda x, y) \leq \rho(-x,y)$, והמקסימום מתקבל אך ורק ב-$\lambda = 1$. (מומלץ להשתמש במונוטוניות L על מנת להמנע מלהפעיל אותה בכלל...)

(8) מתוך סעיפים (3,6,7), הסיקו את אי-שיוויון המשולש עבור ρ: לכל $a, b, c \in D$ מתקיים $\rho(a,b) + \rho(b,c) \geq \rho(a,c)$ ושיוויון מתקיים אם ורק אם העתקת המביוס היחידה $\phi_{\lambda,b}$ ששולחת את b ל-0 ואת c למספר חיובי שולחת את a למספר שלילי (או במקרים מנוונים $a = b$ או $b = c$).

(זו השיטה הקלה ביותר שהצלחתי למצוא להוכחת אי-שיוויון המשולש, אך טכנית מאוד, לצערי – אם מצאתם או הכרתם הוכחה יפה יותר, אשמח לשמוע!)

כעת ניתן לנסח את הלמה של שוורץ במונחי ρ: מתוך המונוטוניות של L, נקבל ש-$|\phi_b(f(z))| \leq |\phi_a(z)|$ שקול לכך ש-$\rho(b, f(z)) \leq \rho(a,z)$ (ושיוויון אם ורק אם שיוויון). אך a הייתה שרירותית לחלוטין, וההנחה היחידה היא ש-$b = f(a)$. מכאן נקבל את הלמה הבאה:

תהא $f : D \to D$ אנליטית. אזי $\rho(f(z), f(w)) \leq \rho(z,w)$ לכל $z, w \in D$. בנוסף, אם מתקיים שיוויון עבור זוג $z_0 \neq w_0$ כלשהו, אז f היא בהכרח מביוס (ואז השיוויון מתקיים לכל z, w). כלומר, כל $f : D \to D$ שאינה מביוס מקטינה ממש את כל המרחקים (מכווצת).