<u>טענה:</u> יהא $U \subset \mathbb{C}$ תחום חסום. לא ייתכן ששפת U מוכלת בקשת, כלומר בתמונה של פונקציה חח"ע ורציפה $\alpha : [0,1] \to \mathbb{C}$.

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שזה ייתכן, ונסמן את הקשת ב-$A = \mathrm{Im}(\alpha)$. נגדיר $f : A \to [0,1]$ רציפה לפי $f = \alpha^{-1}$. לפי שאלה 9 מתרגיל בית 3, ניתן להרחיב את f להעתקה $F : \mathbb{C} \to [0,1]$, רציפה, עם $F|_A = f$. נגדיר $g = \alpha \circ F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, אזי g רציפה ומקיימת $g|_A = \alpha \circ f = \mathrm{Id}_A$. תהא $z_0 \in U$ כלשהי, ויהא R גדול מספיק כך ש-$U \cup A \subset B(z_0, R)$ (קיים כי U חסומה ו-A קומפקטית), ונסמן $D = \overline{B}(z_0, R)$. כעת נגדיר $h : D \to D$ לפי

$$h(z) = \begin{cases} z, & z \in D \setminus U \\ g(z), & z \in \overline{U} \end{cases}$$

ברור מההגדרה כי h רציפה על כל אחד מהתחומים הסגורים $D \setminus U, \overline{U}$, ומוגדרת בעקביות על החיתוך שלהם, שהוא $(D \setminus U) \cap \overline{U} = \partial U \subset A$, ועליו $\mathrm{Id} \equiv g$. לכן h רציפה בכל D. בנוסף ברור מההגדרה שתמונת h מוכלת ב-$(D \setminus U) \cup A$, ובפרט זרה ל-U, ובפרט מוכלת ב-$D \setminus \{z_0\}$. כמו כן לכל $z \in \partial D$ מתקיים $z \notin U$ ולכן $h(z) = z$.
לסיכום $h : D \to D \setminus \{z_0\}$ רציפה ושווה לזהות על השפה ∂D – אך בהרצאה ראינו שאין פונקציות כאלה, בסתירה.