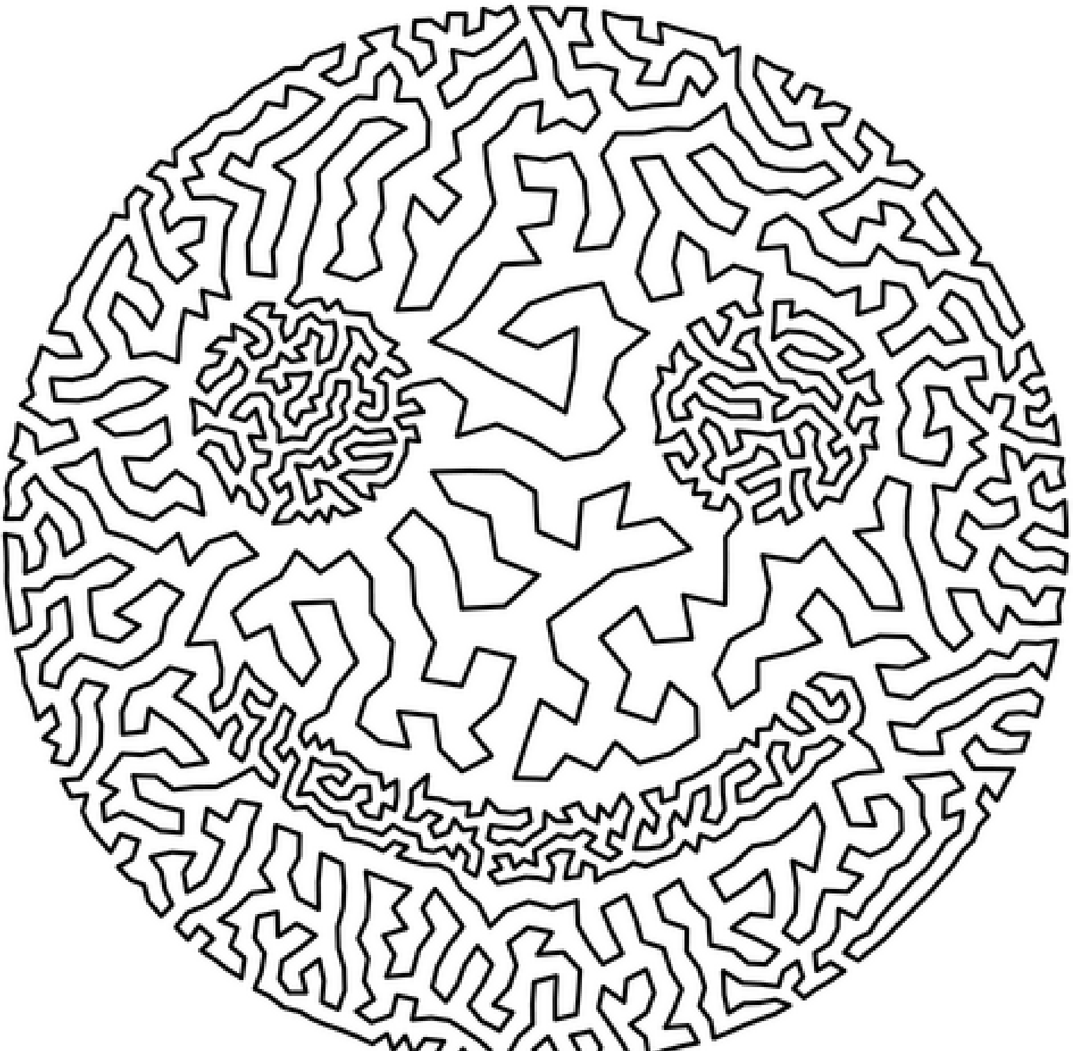
משפט ז'ורדן: תהא $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ רציפה וחח"ע למעט $\gamma(0)=\gamma(1)$. מסילה כזו נקראת לולאת ז'ורדן. אזי:

(1) $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ מורכב מבדיוק שני רכיבי קשירות – רכיב חסום ורכיב לא-חסום.

(2) השפה של כל אחד מרכיבי הקשירות של $\mathbb{C}\setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ היא כל $\mathrm{Im}(\gamma)$.

(3) ברכיב הקשירות הלא-חסום, מתקיים $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=0$ לכל z. ברכיב הקשירות החסום, מתקיים $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=1$ לכל z או $\mathrm{Ind}_\gamma(z)=-1$ לכל z.

המשפט נשמע אינטואיטיבי מאוד, אך הוא לא טריוויאלי כלל, והוכחתו לא קלה. נוכיח אותו בשלבים, עם הרבה טענות ביניים. להמחשת חוסר הטריוויאליות של המשפט, התבוננו בעקומת ז'ורדן הבאה. האם בהתבוננות בתמונה אכן ברור שישנם רק שני רכיבי קשירות? בהנתן נקודה כלשהי במישור, האם קל לזהות מיידית האם היא "בתוך" הלולאה או מחוץ לה?



מקור: http://www2.oberlin.edu/math/faculty/bosch/making-tspart-page.html

<u>טענה 1:</u> יהא U רכיב קשירות חסום של $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. אזי $\partial U = \mathrm{Im}(\gamma)$.

<u>הוכחה:</u> בתרגיל 1, שאלה (7ב), הוכחנו כי $\partial U \subseteq \mathrm{Im}(\gamma)$, לכן מספיק להוכיח הכלה בכיוון ההפוך. נניח בשלילה שקיים $z_0 \in \mathrm{Im}(\gamma) \setminus \partial U$. ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות ש-$z_0 = \gamma(0) = \gamma(1)$. מכיוון ש-$\partial U$ קבוצה סגורה, גם $I = \gamma^{-1}(\partial U)$ סגורה, ומכיוון ש-$\gamma^{-1}(z_0) = \{0,1\}$ ו-$z_0 \notin \partial U$, נקבל $I \subset (0,1)$. נסמן $a = \min I, b = \max I$, ונגדיר $J = [a,b]$, שהוא קטע סגור המוכל ב-$(0,1)$ ומכיל את I. בפרט נקבל ש-$\partial U \subseteq \gamma(J)$. אך $\gamma(J)$ היא קשת, ו-U הוא תחום חסום, והוכחנו שזה לא אפשרי בתרגול 3. סתירה! לכן $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq \partial U$, ולכן הקבוצות שוות, כנדרש. $\square$

<u>טענה 2:</u> אם ל-$\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ יש לפחות שני רכיבי קשירות, אז השפה של כל אחד מהם היא $\mathrm{Im}(\gamma)$.

<u>הוכחה:</u> בתרגיל 1, שאלה (7א), הוכחנו כי יש ל-$\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ בדיוק רכיב קשירות לא-חסום אחד, ולכן יש גם לפחות רכיב קשירות חסום אחד. יהא V רכיב הקשירות הלא חסום. על פי טענה 1, יש להוכיח רק ש-$\mathrm{Im}(\gamma) = \partial V$. יהא U רכיב קשירות חסום כלשהו, ותהא $z_0 \in U$. נתבונן בהעתקת מביוס $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ לפי $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$, ונגדיר לולאת ז'ורדן חדשה $\beta = f \circ \gamma$. נשים לב שמהרציפות וההפיכות של f נקבל שרכיבי הקשירות של $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\beta)$ הם התמונות של רכיבי הקשירות של $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ על ידי f, וכן ש-$f(U)$ הוא רכיב הקשירות הלא-חסום שלו, ו-$f(V)$ הוא רכיב קשירות כן חסום. בפרט $\partial f(V) = \mathrm{Im}(\beta)$ על פי טענה 1, ובהפעלת f^{-1} נקבל $\partial V = f^{-1}(\partial f(V)) = f^{-1}(\mathrm{Im}(\beta)) = \mathrm{Im}(\gamma)$, כנדרש. $\square$

<u>הגדרה:</u> לולאת ז'ורדן γ תקרא קוואזי-פוליגונאלית אם תמונתה מכילה קטע ישר; לחילופין, אם קיים קטע $I \subset [0,1]$ כך ש-$\gamma|_I$ לינארית.

<u>טענה 3 (משפט הקפיצה למסילה קוואזי-פוליגונאלית):</u> תהא γ מסילה קוואזי-פוליגונאלית. קיימות נקודות $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ עם $\mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_1) + 1$.

<u>הוכחה:</u> נכתוב $\gamma = \ell + \beta$, באשר ℓ מסילת קטע ישר שתמונתו $[a,b]$, ו-β מסילה רציפה וחח"ע מ-b ל-a שלא נחתכת עם (a,b). נסמן $z_0 = \frac{a+b}{2} \in (a,b)$, אזי $z_0 \notin \mathrm{Im}(\beta)$. מכיוון ש-$\mathrm{Im}(\beta)$ סגורה, נקבל שקיים מרחק חיובי $d = d(z_0, \mathrm{Im}(\beta)) = \min_{z \in \mathrm{Im}(\beta)} |z_0 - z| > 0$ (ובפרט $d \leq \frac{|b-a|}{2}$), כלומר הכדור הפתוח $B(z_0,d)$ זר ל-$\mathrm{Im}(\beta)$. נגדיר $z_1 = z_0 - i\frac{b-a}{|b-a|}\frac{d}{2}$ ו-$z_2 = z_0 + i\frac{b-a}{|b-a|}\frac{d}{2}$. נגדיר α בתור המסילה הפוליגונאלית מ-b ל-a כך ש-$\rho = \ell + \alpha$ היא מסילת ריבוע, אשר $\mathrm{Im}(\ell)$ היא אחת מצלעותיו, ומכוון נגד כיוון השעון. נשים לב שריבוע זה מקיף את z_2 אך לא את z_1, ולכן מתקיים $\mathrm{Ind}_\rho(z_2) = 1$ ו-$\mathrm{Ind}_\rho(z_1) = 0$. כעת, נתבונן בלולאה $\delta = -\alpha + \beta$ (שהיא לאו דווקא לולאת ז'ורדן). נשים לב ש-$\mathrm{Im}(\delta)$ זר ל-$B(z_0,d)$, לכן כל $B(z_0,d)$ מוכל ברכיב קשירות אחד של $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\delta)$. מכיוון שהאינדקס קבוע על רכיבי קשירות ו-$z_1, z_2 \in B(z_0,d)$, נקבל $\mathrm{Ind}_\delta(z_2) = \mathrm{Ind}_\delta(z_1)$. לסיום, נשים לב ש-$\rho + \delta = (\ell + \alpha) + (-\alpha + \beta)$ הומוטופי ל-$\gamma = \ell + \beta$ ב-$\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$, ולכן לכל $j = 1,2$ מתקיים $\mathrm{Ind}_\gamma(z_j) = \mathrm{Ind}_\rho(z_j) + \mathrm{Ind}_\delta(z_j)$. מאיחוד המידע על האינדקסים שחישבנו עד כה, נקבל שמתקיים $\mathrm{Ind}_\gamma(z_2) = \mathrm{Ind}_\gamma(z_1) + 1$, כנדרש. $\square$

<u>טענה 4:</u> משפט ז'ורדן נכון לכל מסילה קוואזי-פוליגונאלית.

<u>הוכחה:</u> ננתח את רכיבי הקשירות של $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. תמיד יש רכיב קשירות לא-חסום, ובו מתקיים $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$: אכן, מכיוון שהאינדקס קבוע על רכיבי קשירות, מספיק לבדוק זאת עבור z-ים רחוקים מאוד: ועבורם זה יהיה נכון, כי כל $\mathrm{Im}(\gamma)$ יהיה מוכל בתוך זווית קטנה (למשל, חצי מישור). ממשפט הקפיצה (טענה 3), לא ייתכן ש-$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$ לכל $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$, ולכן בהכרח קיים עוד לפחות רכיב קשירות אחד, שהוא בהכרח חסום. מטענה 2 נקבל עתה ש-$\mathrm{Im}(\gamma)$ היא השפה של כל רכיבי הקשירות. נראה שחייבים להיות בדיוק שני רכיבי קשירות: נניח בשלילה שיש לפחות שלושה רכיבים שונים, U_1, U_2, U_3. יהא $B(z_0,d)$ כדור כמו בהוכחה של טענה 3, כך ש-$\mathrm{Im}(\gamma) \cap B(z_0,d)$ הוא קטע ישר, ולכן $B(z_0,d) \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ מכיל בדיוק שני רכיבי קשירות. מכיוון ש-$z_0 \in \mathrm{Im}(\gamma)$, נקבל שהוא נקודת שפה של כל אחד מה-U_j, כלומר קיימים $u_j \in U_j \cap B(z_0,d)$ לכל j. אך אז בהכרח לפחות שניים מתוך u_1, u_2, u_3 נמצאים באותו רכיב קשירות של $B(z_0,d) \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$ – ובפרט באותו רכיב קשירות של $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}(\gamma)$. אך זאת סתירה לכך ש-$U_1, U_2, U_3$ רכיבי קשירות שונים! לכן יש לכל היותר שני רכיבי קשירות, כלומר בדיוק שני רכיבי קשירות, הרכיב החסום U והרכיב הלא-חסום V. כשנפעיל שוב את משפט הקפיצה, נקבל שהנקודות z_1, z_2 שייכות לרכיבים שונים, כלומר אחת שייכת ל-U והשנייה ל-V. אם $z_1 \in V$, נקבל $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1$ לכל $z \in U$, ואילו אם $z_2 \in V$ נקבל ש-$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = -1$ לכל $z \in U$. זה מסיים את הוכחת משפט ז'ורדן. $\square$

<u>טענה 5 (למת הקירוב):</u> תהא γ לולאת ז'ורדן כלשהי, תהא $z_0 = \gamma(t_0) \in \mathrm{Im}(\gamma)$ נקודה על הלולאה (בלי הגבלת הכלליות נניח $t_0 \in (0,1)$), ויהא $\varepsilon > 0$. אזי קיימת לולאת ז'ורדן קוואזי-פוליגונאלית $\beta : [0,1] \to \mathbb{C}$ כך שלכל $t \in [0,1]$ מתקיים: אם $\gamma(t) \notin B(z_0,\varepsilon)$ אז $\beta(t) = \gamma(t)$, ואם $\gamma(t) \in B(z_0,\varepsilon)$ אז גם $\beta(t) \in B(z_0,\varepsilon)$.

הוכחת הלמה היא תרגיל מודרך בתרגיל בית מספר 4. $\square$

טענה 6: ללולאת ז'ורדן γ כלשהי יש לפחות שני רכיבי קשירות, אשר השפה של כל אחד מהם היא $\mathrm{Im}(\gamma)$, וקבוצת כל האינדקסים $\{\mathrm{Ind}_\gamma(z) : z\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma)\}$ היא $\{0,1\}$ או $\{0,-1\}$.

הוכחה: תהנא $w_0,w_1\in\mathrm{Im}(\gamma)$ שתי נקודות שונות על הלולאה. נגדיר $\varepsilon=\frac{|w_1-w_0|}{2}>0$, כך שהכדורים $B(w_0,\varepsilon)$, $B(w_1,\varepsilon)$ זרים. תהא β המסילה שמתקבלת מלמת הקירוב עבור $B(w_1,\varepsilon)$. נשים לב שלכל $z\in B(w_0,\varepsilon)\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$, הלולאות γ,β הומוטופיות זו לזו-$\mathbb{C}\setminus\{z\}$ על ידי הומוטופיה קמורה $F(t,s)=s\beta(t)+(1-s)\gamma(t)$: אכן, אם $\gamma(t)\notin B(w_1,\varepsilon)$ אז $F(t,s)=\gamma(t)\neq z$ לכל s, ואילו אם $\gamma(t)\in B(w_1,\varepsilon)$ אז גם $[\gamma(t),\beta(t)]\subset B(w_1,\varepsilon)$ ולכן $F(t,s)\in B(w_1,\varepsilon)$ לכל s ובפרט $F(t,s)\neq z$.

נשתמש במשפט ז'ורדן המלא במסילה הקוואזי-פוליגונאלית β: מכיוון ש-$w_0\in\mathrm{Im}(\beta)$ שייכת לשפה של שני רכיבי הקשירות של $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\beta)$, נקבל שבסביבה $B(w_0,\varepsilon)$ חייבות להמצא נקודות $z_1,z_2\in B(w_0,\varepsilon)\setminus\mathrm{Im}(\beta)$ משני הרכיבים, ואז קבוצת האינדקסים $I=\{\mathrm{Ind}_\beta(z_1),\mathrm{Ind}_\beta(z_2)\}$ היא $\{0,1\}$ או $\{0,-1\}$. מכיוון ש-β הומוטופית ל-γ ב-$\mathbb{C}\setminus\{z_j\}$, הרי שגם $\mathrm{Ind}_\gamma(z_j)=\mathrm{Ind}_\beta(z_j)$ ולכן $I=\{\mathrm{Ind}_\gamma(z_1),\mathrm{Ind}_\gamma(z_2)\}$. בפרט קיבלנו ש-$z_1,z_2$ ברכיבי קשירות שונים של $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$, כלומר יש לפחות שני רכיבי קשירות, ומטענה 2 נקבל שהשפה של כל אחד מהרכיבים שווה בדיוק ל-$\mathrm{Im}(\gamma)$, כנדרש. בנוסף ברור שקבוצת האינדקסים מכילה את I, ונותר רק להוכיח שהיא שווה בדיוק ל-I, כלומר הכלה בכיוון ההפוך.

יהא $a=\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ אינדקס של γ, $z\in\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$. יהא U רכיב הקשירות של z. הראנו כי $\partial U=\mathrm{Im}(\gamma)$, ובפרט קיים $z'\in U\cap B(w_0,\varepsilon)$. מכיוון שהאינדקס קבוע על רכיבי קשירות, נקבל גם $\mathrm{Ind}_\gamma(z')=a$. מצד שני, כמקודם נקבל ש-$\mathrm{Ind}_\gamma(z')=\mathrm{Ind}_\beta(z')$, וממשפט ז'ורדן המלא עבור β נקבל $a=\mathrm{Ind}_\beta(z')\in I$, כנדרש.

מה נותר להוכיח? נותר להסביר מדוע ישנו בדיוק רכיב קשירות חסום אחד. ייתכן תאורטית שישנם מספר רכיבי קשירות חסומים שונים, שבכולם מתקבל אותו אינדקס ביחס ל-γ (ששווה לפלוס או מינוס 1), וכולם מופיעים בסביבה של כל נקודה על $\mathrm{Im}(\gamma)$. במקרה הקוואזי-פוליגונאלי, השתמשנו בכך שקטע חייב לחלק את הסביבה שלו ללא יותר משני רכיבים; אך אם המסילה מתפרעת, ייתכן שבנקודה מסוימת (או אולי אפילו בכל נקודה) יתקיים ש-$B(z_0,\varepsilon)\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$ מכיל יותר מ-2 רכיבי קשירות לכל ε קטן מספיק. נצטרך גישה שונה לחלוטין על מנת לפסול את האפשרות שיש יותר מרכיב חסום אחד.

טענה 7: ללולאת ז'ורדן כללית γ, ל-$\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$ יש רכיב קשירות חסום יחיד.

הוכחה: מכיוון ש-$\mathrm{Im}(\gamma)$ קומפקטית, קיים לה קוטר סופי $d=\max\{|z-w| : z,w\in\mathrm{Im}(\gamma)\}$, ונניח שהוא מתקבל עבור הזוג $z,w\in\mathrm{Im}(\gamma)$ – כמובן ש-$w\neq z$. ע"י הרכבת פונקציה אפינית הפיכה על γ, ניתן להניח בה"כ ש-$z=-1,w=1$. (מכיוון שגם ההופכית היא אפינית והפיכה, ההרכבה הזו לא משפיעה על אף תכונה טופולוגית או מטרית של γ). ע"י רפרמטריזציה, ניתן גם להניח בה"כ שמתקיים $z=\gamma(0)=\gamma(1)$ ו-$w=\gamma(1/2)$. נשים לב שמתוך כך שלכל $q\in\mathrm{Im}(\gamma)$ מתקיים $|z-q|,|w-q|\leq|z-w|$, נקבל $-1<\mathrm{Re}(q)<1$ לכל $q\neq z,w$, כלומר $\mathrm{Im}(\gamma)$ מוכלת בפס. מכיוון שהיא גם חסומה, היא למעשה מוכלת במלבן $R=[-1,1]\times[-M,M]$, ונקודות המגע היחידות שלה עם השפה ∂R הן ב-z,w. על ידי מתיחה או דחיסה של המישור, ניתן להניח כי $M=1$, כלומר המלבן הוא ריבוע.

ניעזר פעמיים בלמה הבאה, שניתנה בשאלה 1 של תרגיל בית 4: שתי מסילות בתוך R, שאחת מגיעה מ--1 ל-1 והשנייה מ-i ל-$-i$, בהכרח חיבות להחתך.

נתבונן בחיתוך $G=\mathrm{Im}(\gamma)\cap i\mathbb{R}$. זוהי תת-קבוצה סגורה של הקטע $[-i,i]$, לכן קומפקטית, לכן קיימות נקודות $N,S\in G$ עם חלק מדומה מקסימלי ומינימלי, בהתאמה. בבירור $N,S\in\gamma((0,1/2))\cup\gamma((1/2,1))$. בה"כ נניח כי $N\in\gamma((0,1/2))$ (אחרת נהפוך את כיוון הלולאה), ונקרא לחצי הזה של γ החצי העליון, ול-$\gamma((1/2,1))$ נקרא החצי התחתון. נראה כי S בהכרח בחצי התחתון: נניח בשלילה שהיא בחצי העליון. נגדיר מסילה מ-i ל-$-i$ כך: ננוע מ-i ל-N לאורך הקטע $[i,N]$; נמשיך מ-N ל-S לאורך המסילה γ בחלק שמוכל כולו בחצי העליון (אולי בניגוד לכיוון γ, אך זה לא חשוב); ואז מ-S ל-$-i$ לאורך הקטע $[S,i]$. נשים לב שלמעט הקצוות, מסילה זו מוכלת כולה בפנים הריבוע, וכן מהגדרת N,S ומהחח"ע של γ, היא זרה לחלוטין לחצי התחתון של γ, שלמעט הקצוות $-1,1$ מוכלת כולה בפנים הריבוע. זאת כמובן סתירה ללמה. לכן S בהכרח בחצי התחתון.

נחלק את G לפי החצאים העליון והתחתון: נגדיר $G_N=\gamma((0,1/2))\cap i\mathbb{R}, G_S=\gamma((1/2,1))\cap i\mathbb{R}$, שגם הן קבוצות קומפקטיות ולא ריקות (כי מכילות את N,S בהתאמה). נגדיר $N'\in G_N$ כנקודה עם החלק המדומה הקטן ביותר (מתוך G_N), ונגדיר $S'\in G_S$ כנקודה עם חלק מדומה גדול ביותר שקטן מזה של N': קיימת כזו, כי קבוצת הנקודות הללו קומפקטית ולא ריקה, שכן $N'\notin G_S$ מתוך החח"ע של γ, ו-$S\in G_S$ נמוכה יותר מ-N'. בפרט, נקבל שהקטע הפתוח (S',N') בהכרח זר ל-$\mathrm{Im}(\gamma)$: הוא זר לחצי העליון מהמינימליות של N', ולחצי התחתון מהמקסימליות של S'. יהא U רכיב הקשירות של $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$ שמכיל את (S',N'). נוכיח שאם U' רכיב קשירות חסום כלשהו של $\mathbb{C}\setminus\mathrm{Im}(\gamma)$ אז בהכרח $U'=U$ – ובפרט יש רכיב קשירות חסום יחיד, כנדרש. נסמן ב-V את רכיב הקשירות הלא-חסום. נשים לב ש-V מכיל את כל המשלים של R, ולכן גם את $[i,N)$ ואת $(S,-i]$.

נגדיר מסילה α מ-i ל-$-i$ בתוך R, שתהיה מוכלת כולה ב-$V\cup U\cup\mathrm{Im}(\gamma)$: ננוע מ-$i$ ל-N לאורך $[i,N)\subset V$; ננוע מ-N ל-N' לאורך החצי העליון של γ; ננוע מ-N' ל-S' לאורך $(N',S')\subset U$; מ-S' ל-S לאורך החצי התחתון של γ; ולבסוף מ-S ל-$-i$ לאורך $(S,-i]\subset V$.

נניח בשלילה ש-$U'\neq U$ רכיב חסום, כך ש-U' זר ל-$V\cup U\cup\mathrm{Im}(\gamma)$, ובפרט זר ל-$\alpha$, ונשתמש בכך כדי לבנות מסילה β מ-$z=-1$ ל-$w=1$ בתוך R שתהיה זרה ל-α: אך זו כמובן תהיה סתירה ללמה, כנדרש. ובכן, מהגדרת α מתקיים $z,w\notin\mathrm{Im}(\alpha)$, והתמונה $\mathrm{Im}(\alpha)$ קומפקטית, לכן קיים $\varepsilon>0$ עבורו הכדורים $B(z,\varepsilon),B(w,\varepsilon)$ זרים ל-α. מתקיים $\partial U'=\mathrm{Im}(\gamma)$, ולכן קיימות $z'\in U'\cap B(z,\varepsilon), w'\in U'\cap B(w,\varepsilon)$. מכיוון ש-$V$ מכיל את המשלים של R ואת כל השפה שלו למעט z,w, נקבל ש-U' כולו מוכל בפנים של R, ובפרט גם z',w'. נגדיר את β כך: תחילה ננוע מ-z ל-z' לאורך הקטע $[z,z']\in B(z,\varepsilon)$; ננוע מ-$z'$ ל-w' לאורך מסילה כלשהי ב-U' (שכמובן קיימת, שכן היא פתוחה וקשירה); ולבסוף ננוע מ-w' ל-w לאורך הקטע $[w',w]\in B(w,\varepsilon)$. בסה"כ קיבלנו ש-$\beta$ מוכלת כולה בתוך R למעט הקצוות $-1,1$, וכן בקבוצה $B(z,\varepsilon)\cup U'\cup B(w,\varepsilon)$, שזה ל-$\mathrm{Im}(\alpha)$, בסתירה ללמה. לכן בהכרח $U'=U$. $\square$