מספר תלמיד ____________________ מספר מחברת ____

מבחן בתורת הפונקציות המרוכבות 1 – מועד א 7/9/18

סמסטר קיץ תשע״ח: פרופ' יהודה שלום, דן כרמון

הוראות:

1. משך המבחן: שלוש שעות. אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון!).
2. תוכלו לענות על כל השאלות. הציון הסופי הנו לכל היותר 100.
3. יש לכתוב את התשובות בטופס המבחן, במקומות המיועדים לכך.
   רק התשובות שבטופס תיבדקנה. מחברת המבחן תשמש לטיוטה בלבד.
4. הקפידו **לפרט ולהסביר** את צעדיכם **ולבדוק** את התשובות, אם ניתן.
5. **שימו לב:** בשאלות 3-7 ניתן להשתמש בכל תוצאה שהוכחה בהרצאה כל עוד צוטטה במדויק.
   בכל שאלה במבחן ניתן להשתמש באופן חופשי בטענות מסעיפים אחרים בו, גם אם לא עניתם עליהם. מבנה המבחן הוא כזה שניתן לענות על הסעיפים באופן בלתי תלוי.
   עיגול היחידה הפתוח סביב הראשית $\{z \mid |z| < 1\}$ יסומן כרגיל ב-D.

בהצלחה!

טבלת ניקוד (לשימוש הבודק בלבד)

שאלה 1 (10 נקודות)	
שאלה 2 (15 נקודות)	
שאלה 3 (16 נקודות)	
שאלה 4 (23 נקודות)	
שאלה 5 (10 נקודות)	
שאלה 6 (17 נקודות)	
שאלה 7 (17 נקודות)	

סה״כ נקודות בשאלות: 108 **ציון סופי:**

מספר תלמיד ____________________ מספר מחברת ____

שאלה 1:

(10 נק) נסחו במדויק את משפט קושי ההומולוגי והראו כיצד נובע ממנו משפט השארית.

משפט מההדוין

הרוב הגדול עני הלב גליון

הערות מוחדות

מספר תלמיד ____________________ מספר מחברת ____

שאלה 2:

(15 נק) הגדירו מהי פונקציה רגולרית ונסחו והוכיחו את עקרונות המקסימום, מינימום, וההעתקה הפתוחה לפונקציות אלה (אין צורך להוכיח שההופכית של פונקציה רגולרית היכן שאינה מתאפסת היא כזו גם כן).

משפט מההרצאות

הוכח עני היטב למספר לא קטן

(אני לא התייחסתי להעתקה פתוחה)

אין הערות מיוחדות

מספר תלמיד ______________ מספר מחברת ____

שאלה 3:

א. (13 נק) יהי U תחום חסום (ז"א מוכל בכדור כלשהוא), p נקודה בו, ו-V המשלים במישור של קבוצת המספרים הטבעיים $\{1,2,3,\dots\}$. הוכיחו שמבין כל הפונקציות האנליטיות $f: U \to V$ עם $f(p) = 0$ קיימת כזו שעבורה מתקבל המקסימום m של $|f'(p)|$.

הדרכה: נדרשת כאן חזרה על הוכחת משפט מרכזי מההרצאה או חלק ממנו, אך יש לבצע התאמות לפי הנתונים בשאלה. גם אם חלק מהן לא ברור לכם, אל תעצרו והמשיכו בהוכחה ככל שתוכלו. שימו לב שבשאלה זו כמו בכל הבאות במבחן ניתן להשתמש בכל משפט שהוכח בקורס כל עוד צוטט במדויק.

ב. (3 נק) מהו ערכו של m כאשר $U = V = D$ ו-$p = 0$?

א. המטרה כאן היא למעשה לשחזר את החלק
השני בהוכחת משפט ההעתקה של רימן עם איזה
סכימת ההוכחה, אשר נדרשות התאמות ביחס
לגירסה הזו.
ראשית, למרות שהדבר לא נדרש מפורש היא להראות שקיימת
f כזו שאינה קבועה (מיד נבין למה). ואכן, מכיוון ש U חסום
הוא מוכל בכדור ולכן ההעתקה $f(z)=a+\frac{z}{b}$
עבור b מספיק גדול ! a מקיים דרישות הנדרש.
עכשיו, כמו בהוכחת משפט רימן, נביט במשפחה
$F=\{f:U\to V \mid f(p)=0\}$.
את עקרון מונטל מהוליך עבור ~~[illegible]~~ משפט מונטל,

מספר תלמיד ____________ מספר מחברת ____

המבחן שהגבלנו נורמלית, כיוון ש V ~~מוגבל~~ מפספס יותר

מנקודה אחת. יחד עם התנאי $f(p)=0$ מובטח לנו לכן אם

סדרה $f_n \in F$ שיש לה תת סדרה מתכנסת במ"ש על קומפקטיות על U.

לכן, אם $|f_n'(p)| \longrightarrow m \le \infty$; $m=\sup_{f\in F}|f'(p)|$ אזי לאחר

מעבר לתת נוכל להניח $f_n \longrightarrow f$ במ"ש על קומפ'.

(אפשר f אינה ∞): עכשיו חשוב להראות ש f הגבל הנדרש.

משפט ויירשטראס $m=\lim_{n\to\infty}|f_n'(p)| = |f'(p)|$, לכן נותר

להראות שאכן f אכן מוכל ב-V. זהו חלק קריטי לא

עשוי. חלק לא טוב לא שיש להניח טון משהו, ואלו שכן אין לא

יודעו איך, הובלו עלינו קריטי מסוים. הטיעון מבוסס על

משפט הורביץ: לכל n טבעי, מכיוון שכל f_n מפספס את K

אזי כן גם f כל עוד ידוע ש f אינה קבועה (מה

שנובע מגם פספוס). מדוע אינה קבועה? כי אז $f'(p)=0$

ואז $m=0$, אבל הנחנו בהתחלה שיש f_0 עבורה $f_0'(p)\neq 0$

ולכן, ממקסימליות m, f אינה קבועה

∎

ב $m=1$ מיידית מהלמה של שוורץ.

מספר מחברת ____ מספר תלמיד ____________________

שאלה 4:

מטרת שאלה זו הנה להוכיח משפט ידוע בטופולוגיה, משפט בורסוק-אולם, דרך כלים שפיתחנו בקורס. מומלץ כאן לשים לב שוב ולהשתמש אם יש צורך בהוראה 5 בעמוד הפתיחה של המבחן.

א. (4 נק) בהינתן מסילה רציפה כלשהי במישור $\alpha:[a,b]\to\mathbb{C}$ נגדיר לצורך שאלה זו את המסילה $-\alpha:[a,b]\to\mathbb{C}$ ע"י: $[-\alpha](t) := -(\alpha(t))$ (שימו לב: זו **אינה** המסילה הנגדית במובן של סכום מסילות אותו הגדרנו בקורס). הוכיחו **ישירות מהגדרת האינטגרל המסילתי** הכללי שהצגנו בקורס, שאם f אנליטית בתחום U, ו-α מסילה כלשהי ב-U, אזי מתקיימת נוסחת החלפת המשתנה: $\int_{-\alpha} f(-z) = -\int_\alpha f(z)$.

העובדה הבסיסית כאן היא שאם $F(z)$ קדומה של $f(z)$ על פתוח D אזי $-F(-z)$ קדומה של $f(-z)$ על $-D$. לכן, אם t_i (חלוקה) D_i (פתוחים) F_i (קדומות) כמו בהגדרת האינטגרל:

אזי $\int_\alpha f(z) = \sum_i F_i(t_{i+1}) - F_i(t_i)$

$$\int_{-\alpha} f(-z) = \sum_i (-F_i)(-(-t_{i+1})) - (-F_i)(-(-t_i)) = \sum_i -\left(F_i(t_{i+1}) - F_i(t_i)\right) = -\int_\alpha f(z)$$

גם קופסאות עם פרות פרמטר ודיוק כמו לעיל מלא, כל עוד הופעו של מיצוי המספק בהגדרת האינטגרל.

ב. (5 נק) תהי $\beta:[0,1/2]\to\mathbb{C}^*$ מסילה עם $\beta(0)=1,\ \beta(1/2)=-1$.
הוכיחו כי: $\int_\beta \frac{1}{z} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\tau i$ כאשר n שלם ($\tau = 2\pi$, כרגיל).

את המסילה β נשרשר עם מסילת חצי מעגל פשוטה: $\gamma:[\frac{1}{2},1]\to S^1$ $\gamma(\frac{1}{2})=-1$, $\gamma(1)=1$. קל לחשב וכפי שראינו: $\int_\gamma \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\tau i$. מכיוון ש $\beta+\gamma$ היא לולאה סביב 0 (מתחילה ומסתיימת ב-1) אזי $\int_{\beta+\gamma}\frac{1}{z} = n\tau i$ כאשר n שלם - האינדקס של לולאה כזו. מחסירים את שני שוויונות האינטגרלים ומקבלים הנדרש.

מספר תלמיד ____________________ מספר מחברת ____

ג. (5 נק) יהי $S^1 = \{z \mid |z| = 1\}$ מעגל היחידה, ותהי $g: S^1 \to S^1$ פונקציה רציפה ואי-זוגית: $g(-x) = -g(x)$. תהי α הלולאה על S^1 המוגדרת ע"י $\alpha(t) = g(e^{\tau i t})$. הוכיחו שהאינדקס של α ביחס לראשית הינו אי-זוגי.

(הדרכה: שימו לב ש- $\alpha\left(t+\frac{1}{2}\right) = \cdots$, וחלקו את הקטע $[0,1]$ עליו מוגדרת α לשני חצאים שווים...)

נסמן ל $t\in[0,\frac{1}{2}]$: $\beta_1(t)=\alpha(t)$ $\beta_2(t)=\alpha(t+\frac{1}{2})$

בהתאם להדרכה ומכך ש g אי-זוגית מתקיים $\beta_2(t)=-\beta_1(t)$

כלו' $\beta_2=-\beta_1$ בסימונים של סעיף א. לפי סעיף בה

$$\int_{-\beta_1} -\frac{1}{z} = -\int_{\beta_1} \frac{1}{z} \Rightarrow \int_{\beta_2} \frac{1}{z} = \int_{\beta_1} \frac{1}{z}$$

אבל $\alpha=\beta_1+\beta_2$ (כחיבור מסילות) ולכן ובפרט זאת

יחד עם סעיף ב נקבל

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z} = \int_{\beta_1} \frac{1}{z} + \int_{\beta_2} \frac{1}{z} = 2(n+\tfrac{1}{2})\tau i = (2n+1)\tau i$$

כלו' האינדקס של α, $2n+1$, אי זוגי ■

מספר מחברת ____ מספר תלמיד ______________

ד. (4 נק) תהי g פונקציה כמו בסעיף הקודם. הוכיחו שהמסילה α שהוגדרה שם אינה כוויצה ב-S^1.

אם α היתה כווצה ב-S^1, בפרט היא כווצה ב-$\mathbb{C}\setminus\{0\}$
ולכן היה לה אינדקס 0, בסתירה לכך שהוא אי זוגי.

ה. (5 נק) יהי $B = \{z \mid |z| \le 1\}$ דיסק היחידה הסגור. הסיקו את התוצאה הבאה:
משפט: לא קיימת פונקציה רציפה $g: B \to S^1$ שצמצומה ל-S^1 היא פונקציה אי-זוגית.
איך המשפט הנ"ל מרחיב משפט שהוכחנו בקורס? (זוהי הן שאלה והן רמז להוכחה...)

הערה: זהו אחד הנוסחים השקולים של משפט בורסוק-אולם (מקרה דו-מימדי). מסקנה ידועה שלו היא שבכל שניה ישנן שתי נקודות בקצוות הפוכים של כדור הארץ שבהן בדיוק אותה הטמפרטורה ואותו אחוז לחות.

המשפט מרחיב, עם אותה שיטת הוכחה, את המקרה
$g|_{S^1} = id$ בו דנו בהקשר למשפט נק' השבת של בראוור
(ובשימוש חשוב לקראת משפט ז'ורדן). ההוכחה קלה:
אם קיימת g כנ"ל אזי $H(s,t) = g(s\cdot e^{\pi\cdot i\cdot t})$
הינה הומוטופיה המכווצת את המסילה α שהוגדרה
בסעיף ג לנקודה $g(0)$ בסתירה לסעיף ד
(שימו לב שכל הכיווץ מתרחש ב-S^1. לקמירות של B
אין כאן תפקיד בניגוד למה שרבים מכם כתבו.
אין כאן הומוטופיה קמורה...)

שאלה 5:

(10 נק) חשבו את האינטגרל של הפונקציה

$$f(z) = \frac{z^3 + 2z + 1}{(z-1)^3}$$

לאורך מסילת מעגל ברדיוס 10 סביב הנקודה $1-i$ במהלך נגד כיוון השעון בשתי דרכים שונות, אשר אחת מהן משתמשת באחת מנוסחאות קושי.

דרך I: עם משפט השארית. הסינגולריות היחידה של f היא ב- $z=1$.

מתקיים $f(z+1) = \frac{(z+1)^3 + 2(z+1) + 1}{z^3} = 1 + \frac{3}{z} + \frac{5}{z^2} + \frac{4}{z^3}$, ולכן

$$\mathrm{Res}(f(z), 1) = \mathrm{Res}(f(z+1), 0) \underset{\text{המקדם של } \frac{1}{z}}{=} 3$$

ולכן ממשפט השארית

$$\int_{\partial B_{10}(1-i)} f = \tau i \cdot \underbrace{\mathrm{Res}(f, 1)}_{=3} \cdot \underbrace{\mathrm{Ind}_{\partial B_{10}(1-i)}(1)}_{=1} = \boxed{3\tau i}.$$

דרך II: מנוסחת האינטגרל של קושי לנגזרת, עבור $g(z) = z^3 + 2z + 1$,

$$\int_{\partial B_{10}(1-i)} f = \int_{\partial B_{10}(1-i)} \frac{g(z)}{(z-1)^3} = \frac{\tau i}{2!} g''(1) = \frac{\tau i}{2} (6z)\Big|_{z=1} = 3\tau i.$$

הערה: שימו לב שמשפט קושי "המוכלל" אינו אחת מנוסחאות קושי!

מספר תלמיד ____________________ מספר מחברת ____

שאלה 6:

תהיינה $p(z) = z^4 + 2018z^3 + z^2 + z + 1$ ו- $g(z) = 1/p(z)$. ענו על השאלות הבאות:

א. (8 נק) הוכיחו שרה"ית של הפיתוח $f(z)$ של $g(z)$ לטור חזקות סביב $z_0 = 2000$ גדול מ-17.

ב. (4 נק) הראו שלטור החזקות הנ"ל ישנו מספר סופי של נקודות סינגולריות (במובן של המשכה אנליטית) על שפת עיגול ההתכנסות.

ג. (5 נק) יהי w_0 שורש של $p(z)$ בעל ערך מוחלט מקסימלי. האם החלק העיקרי של פיתוח טור לוריין של $g(z)$ סביב w_0 הינו סופי או אין-סופי? אם סופי, באיזה מעריך חזקה של z הוא מתחיל? רשמו נוסחה מפורשת למקדם שלו כפונקציה של w_0 (אותה אינכם מתבקשים לחשב כמובן).

(א) באמצעות רושה, נוכיח של-p יש 3 שורשים ב- $B_1(0)$ ו-0 שורשים בטבעת $A(0,1,2017.5)$. נשווה את הפולינום $q(z)=2018z^3$:

- ב- $|z|=1$:

$$|p-q|(z)| = |z^4+z^2+z+1| \le |z|^4+|z|^2+|z|+1 = 4 < 2018 = |2018z^3| = |q(z)| \le |q(z)|+|p(z)|$$

ולכן ל-q ו-p אותה כמות של שורשים (מרובים) ב- $B_1(0)$. ל-q יש 3 (0 עם ריבוי 3), ולכן גם ל-p.

- ב- $|z|=2017.5$:

$$|p-q| = |z^4+z^2+z+1| \le |z|^4+|z|^2+|z|+1 \le 2017.5^4+2017.5^2+2017.5+1 = 2017.5^3\Big(2017.5+\underbrace{\frac{1}{2017.5}+\frac{1}{2017.5^2}+\frac{1}{2017.5^3}}_{<1/2}\Big)$$

$$< 2017.5^3\cdot 2018 = |2018z^3| = |q(z)| \le |q(z)|+|p(z)|$$

ולכן גם ב- $B_{2017.5}(0)$ יש ל-p בדיוק 3 שורשים עם ריבוי. לכן ב- $B_{2017.5}(0)\setminus B_1(0)$ אין ל-p שורשים כלל, ובפרט ב- $B_{17.5}(2000)$, כלומר g מוגדרת ואנליטית בכל $B_{17.5}(2000)$, ולכן רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הוא לפחות 17.5, שגדול מ-17. □

הערות: מספיק להוכיח עבור רדיוסים $2017+\epsilon$, $1983-\epsilon$ עבור ϵ קטן שרירותית.

ניתן להוכיח עבור (במקום 2017.5, 1) $2018-\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10}$. מספיק גם להוכיח עבור $\bar{B}_{17}(2000)$.

ניתן להשוות את $\tilde{q}=z^4+2018z^3$ במקום את q.

ניתן להשתמש ברושה ישירות על הכדור $B_{17+\epsilon}(2000)$, אך בדיקת התנאים עדינה יותר, והתוצאה פחות שימושית לסעיף ג.

מספר מחברת ____ מספר תלמיד ________________

ב. לפולינום p יש קבוצת שורשים סופית (מגודל ≤ 4), נסמנה S.
g הינה המשכה אנליטית של f על $\mathbb{C}\setminus S$. בפרט,
לכל נקודה z על שפת דיסק ההתכנסות למעט נק' מ-S, יש סביבה $U \ni z$
עם $U \subseteq \mathbb{C}\setminus S$, בה g המשכה אנליטית של f, ולכן זו אינה נק' סינגולרית.
כלומר יש ≤ 4 נק' סינגולריות על שפת המעגל (בפרט), כנדרש.

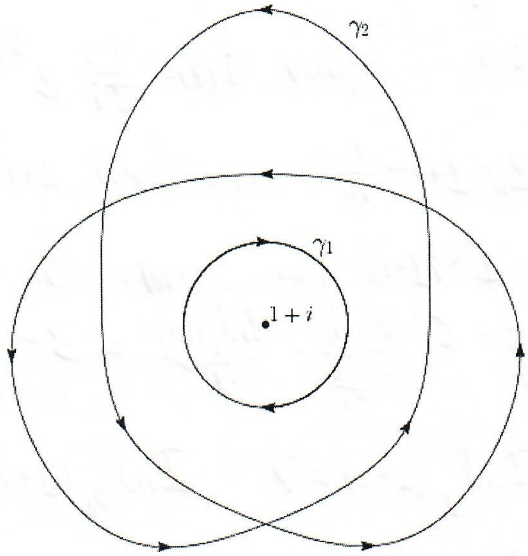
ג. מסעיף (א) הראנו של-p יש 3 $\underbrace{\text{שורשים}}^{\text{עם ריבוי}}$ ב-$B_1(0)$, ~~[illegible]~~
ומכיוון שהוא ממעלה 4, יש לו 4 שורשים סה"כ, ולכן יש שורש
יחיד w עם $|w|\ge 1$ והוא מריבוי 1, כלומר זהו w_0 והוא
שורש פשוט של p, ולכן הוא קוטב פשוט של g. לכן
החלק העיקרי של הטור הוא סופי, ומתחיל ב- (ומכיל רק את) $(z-w_0)^{-1}$.
המקדם שלו הוא בדיוק השארית של g ב-w_0, שהיא

$$\mathrm{Res}(g,w_0)=\lim_{z\to w_0}(z-w_0)g(z)=\lim_{z\to w_0}\frac{z-w_0}{p(z)-\underbrace{p(w_0)}_{=0}}=\boxed{\frac{1}{p'(w_0)}=\frac{1}{4w_0^3-6054w_0^2+2w_0-1}}$$

הערות: רק ביטויים כנ"ל נחשבו ל"נוסחה מפורשת"; ביטויים הכוללים
גבולות או אינטגרלים לא נחשבו מפורשים מספיק.
- $w_0 \approx 2018$ (וקצת קטן ממנו.)

שאלה 7:

תהי f אנליטית בתחום U שהוא כדור מנוקב סביב הנקודה $1+i$, ותהיינה נתונות בו שתי מסילות γ_1, γ_2 בהתאם לציור:



נתון כי $\int_{\gamma_1} f(z) = 3 - i$. לגבי כל אחת מהטענות הבאות כתבו אם היא נכונה או שגויה (תמיד או לפעמים) ותנו הוכחה מדויקת או דוגמה נגדית מפורשת בהתאם לצורך.

א. (4 נק) הפונקציה f הנה חסומה ב-U.

<u>שגויה תמיד.</u> לו f הייתה חסומה, ממשפט הסליקה של רימן היה ניתן להמשיך אותה אנליטית גם ל-$1+i$. ואז מגורסה היינו מקבלים בהכרח $\int_{\gamma_1} f = 0$, <u>בסתירה</u> לנתון. $\square$

ב. (4 נק) אם $z_n \to 1+i$ אז $f(z_n) \to \infty$.

לפעמים נכונה ולפעמים שגויה.

- עבור $f(z)=\frac{i-3}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z-(1+i)}$, מתקיים $\int_{\gamma_1} f = 3-i$! $\lim_{z\to 1+i} f(z) = \infty$.
- עבור $f(z)=\frac{i-3}{2\pi i}e^{1/(z-(1+i))}$ מתקיים $\int_{\gamma_2} f = 3-i$ ול-f סינגולריות עיקרית ב- $1+i$, ולמשל עבור $z_n = 1+i-\frac{1}{n}$ מתקיים $f(z_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

הערה: שתי הפ' הנ"ל מוגדרות בכל $\mathbb{C}\setminus\{1+i\}$ ובעלות שארית $\frac{i-3}{2\pi i}$ ב- $1+i$ ולכן

$$\int_{\gamma_1} f = 2\pi i\cdot \underbrace{Res(f,1+i)}_{=\frac{i-3}{2\pi i}}\underbrace{Ind_{\gamma_1}(1+i)}_{=-1} = 3-i.$$

ג. (4 נק) מתקיים $\int_{\gamma_2} f(z) = 2i-6$.

מתקיים $Ind_{\gamma_1}(1+i) = -1$, $Ind_{\gamma_2}(1+i)=2$ ולכן ממשפט השארית

$$\frac{\int_{\gamma_2} f}{\int_{\gamma_1} f} = \frac{2\pi i\cdot Res(f,1+i) Ind_{\gamma_2}(1+i)}{2\pi i\cdot Res(f,1+i) Ind_{\gamma_1}(1+i)} = \frac{2}{-1} = -2 \Rightarrow \int_{\gamma_2} f = -2\int_{\gamma_1} f = -2(3-i) = 2i-6$$

כלומר הטענה נכונה תמיד.

ד. (5 נק) אם f חח"ע אז הטענה בסעיף **ב** נכונה.

נכון תמיד:

- מסעיף ד' נובע שלא ייתכן של-f תהיה סינגולריות סליקה ב- $1+i$.
- מחח"ע נובע שלא ייתכן שיש סינגולריות עיקרית: אחרת, מפיקארד הגדול בכל סביבה מנוקבת של $1+i$, f מקבלת את כל הערכים במישור אינסוף פעמים (למעט אולי 1), ובפרט אינה חח"ע.
- לכן ל-f בהכרח יש קוטב ב- $1+i$, ובפרט (או באופן שקול) מתקיים $\lim_{z\to 1+i} f(z) = \infty$. ∎

הערה: למעשה, החח"ע גם אומרת שזהו בהכרח קוטב פשוט.