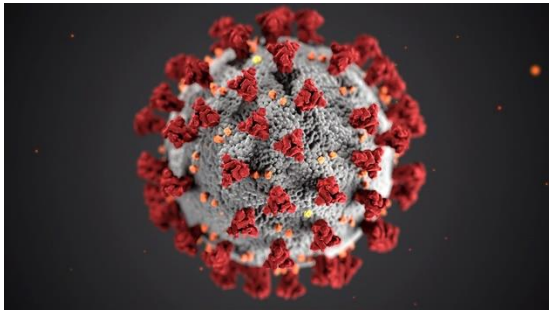
מידול מתמטי של התפשטות הקורונה

פרופ' גדי פיביך

מתמטיקה שימושית
אוניברסיטת תל אביב



- חבר סגל בחוג למתמטיקה שימושית באוניברסיטת תל אביב
- ראש בית הספר למדעי המתמטיקה מאז 2017
- תואר I+II מהטכניון, תואר III מכון קורנט (NYU) – כולם במתמטיקה שימושית
- תחום התמחות: בנייה וניתוח של מודלים מתמטיים
  - זרימות דם בלב, אופטיקה לא לינארית, תורת המכרזים, תמחור אופטימלי של מוצרים, התפשטות מוצרים ברשתות חברתיות, ...
- "המציג אינו רופא או אפידמיולוג"

מבנה ההרצאה

- מודל SIR למגיפות
- מודל Bass עבור מוצרים חדשים
- מודל Bass-SIR עבור פנלים סולריים + קורונה
- מודל Bass-SIR על גרף

מבנה ההרצאה

- מודל SIR למגיפות
- מודל Bass עבור מוצרים חדשים
- מודל Bass-SIR עבור פנלים סולריים + קורונה
- מודל Bass-SIR על גרף

מודל SIR

פותח על ידי Kermack & McKendrick (1927) עבור מחלות שמתפשטות כתוצאה מהדבקה ישירה בין אנשים

חילקו את כלל האוכלוסייה ל-3 קבוצות (compartments):

1. בריאים (עלולים לחלות) **S**usceptible
2. חולים (מדבקים) **I**nfected
3. מחלימים (לא מדבקים) **R**ecovered

- **הנחה**: מעבר בין הקבוצות הוא חד כיווני
  - חולה שהחלים לא יכול להידבק שוב

עלולים להידבק **S** → חולים **I** → החלימו **R**

מודלים של קבוצות אוכלוסיה (Compartmental models)

- בריאים (עלולים לחלות) **S**usceptible
- חולים (מדבקים) **I**nfected
- מחלימים (לא מדבקים) **R**ecovered

- מודל SIR: מחלימים לא יחלו שוב (חצבת, קורונה (?), ...)

עלולים להידבק **S** → חולים **I** → החלימו **R**

מודלים של קבוצות אוכלוסיה (Compartmental models)

- בריאים (עלולים לחלות) **S**usceptible
- חולים (מדבקים) **I**nfected
- מחלימים (לא מדבקים) **R**ecovered

- מודל SIR: מחלימים לא יחלו שוב (חצבת, קורונה (?), ...)

עלולים להידבק **S** → חולים **I** → החלימו **R**

- מודל SI: אין החלמה (איידס, ...)

עלולים להידבק **S** → חולים **I**

מודלים של קבוצות אוכלוסיה (Compartmental models)

- בריאים (עלולים לחלות) **S**usceptible
- חולים (מדבקים) **I**nfected
- מחלימים (לא מדבקים) **R**ecovered

- מודל SIR: מחלימים לא יחלו שוב (חצבת, קורונה (?), ...)

עלולים להידבק **S** → חולים **I** → החלימו **R**

- מודל SI: אין החלמה (איידס, ...)

עלולים להידבק **S** → חולים **I**

- מודל SIS: מחלימים יכולים לחלות שוב (כינים, כלמידיה, ...)

עלולים להידבק **S** ⟷ חולים **I**

מודל **SEIQJR** עבור סארס (Gummel et al., 2004)

- בריאים (עלולים לחלות) **S**usceptible
- חולים (מדבקים) **I**nfected
- מחלימים (לא מדבקים) **R**ecovered

- **E**xposed – נדבקו אבל עדיין לא מדבקים
- **Q**uarantined - בסגר
- **J** isolated – בבידוד

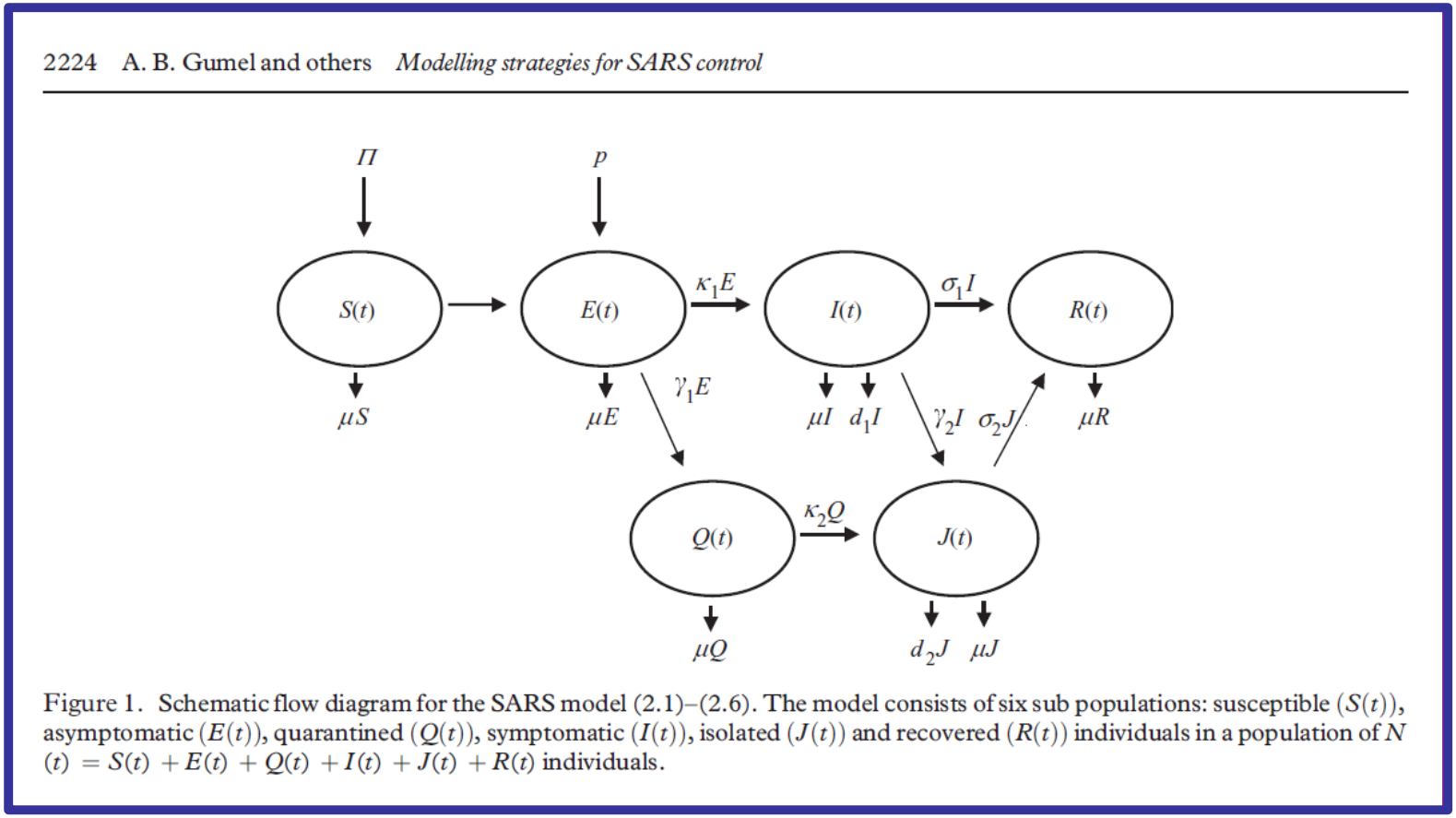
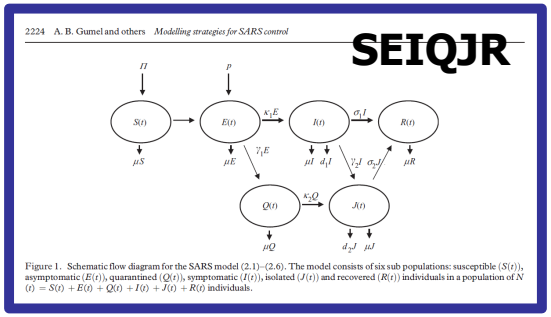


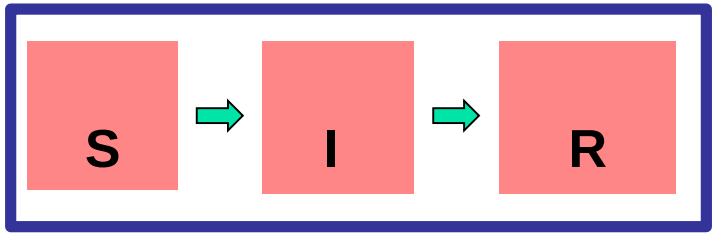
Figure 1. Schematic flow diagram for the SARS model (2.1)–(2.6). The model consists of six sub populations: susceptible ($S(t)$), asymptomatic ($E(t)$), quarantined ($Q(t)$), symptomatic ($I(t)$), isolated ($J(t)$) and recovered ($R(t)$) individuals in a population of $N(t) = S(t) + E(t) + Q(t) + I(t) + J(t) + R(t)$ individuals.

עשרות מודלים של קבוצות אוכלוסיה Compartmental models

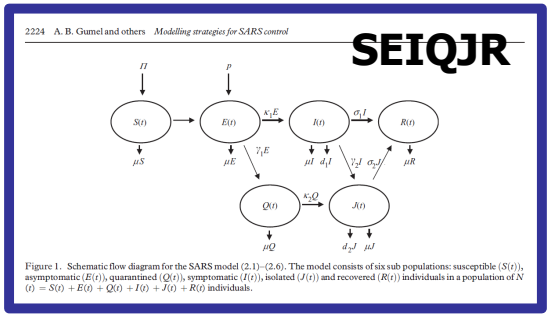
- **E**xposed– נדבקו אבל עדיין לא מדבקים
- **I**solated – בבידוד
- **Q**uarantined - בסגר
- תתי קבוצות לפי גיל
- תתי קבוצות לפי מצב סוציואקונומי
- מחוסנים/לא מחוסנים
- ...

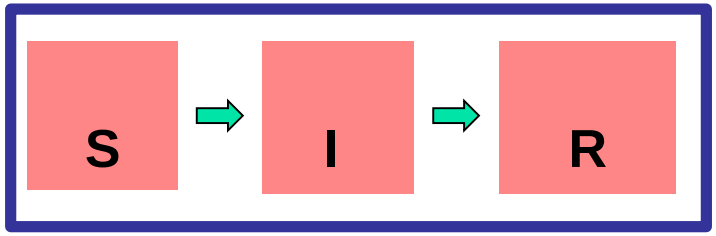
מהו המודל הנכון עבור קורונה?





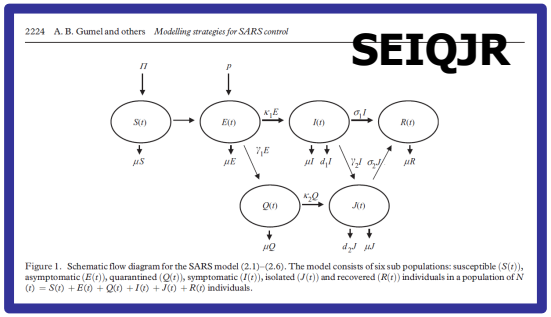
מהו המודל הנכון עבור קורונה?

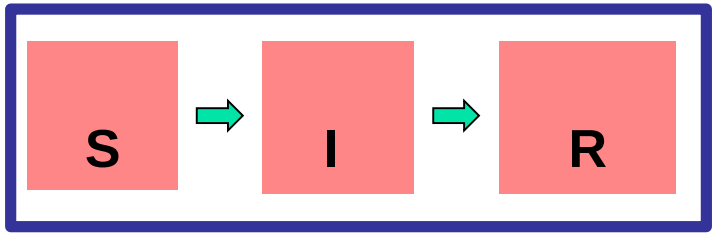




- שאלה לא נכונה

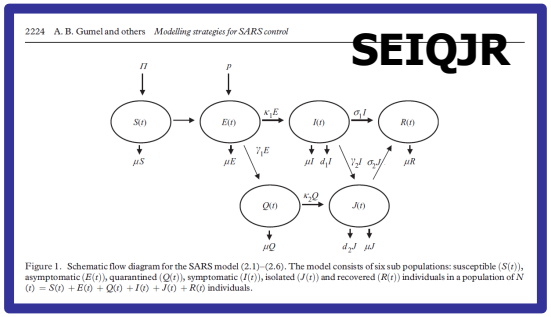
מהו המודל הנכון עבור קורונה?

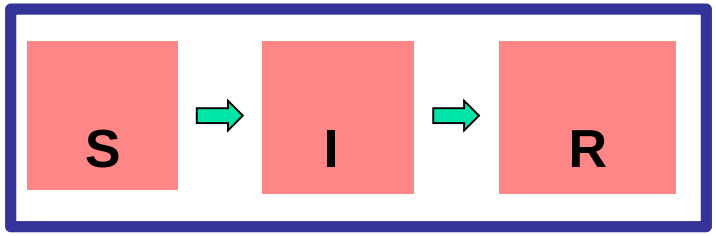




- שאלה לא נכונה
- ג'ורג' בוקס (1978): "*כל המודלים הם לא נכונים, אבל חלקם הם שימושיים*"

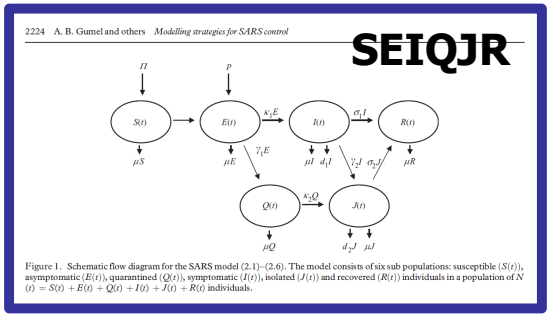
מהו המודל הנכון עבור קורונה?

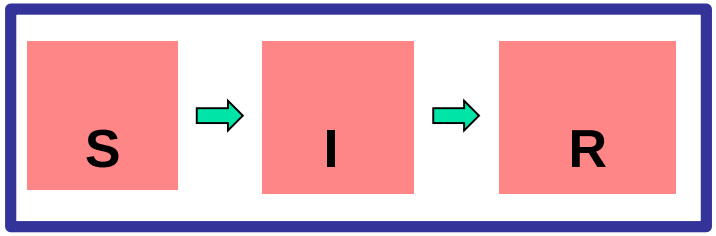




- שאלה לא נכונה
- ג'ורג' בוקס (1978): "*כל המודלים הם לא נכונים, אבל חלקם הם שימושיים*"
- כל מודל הוא **קירוב** של המציאות, ולכן בהגדרה "לא נכון"

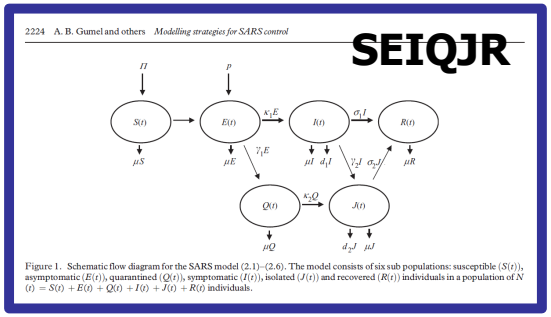
מהו המודל הנכון עבור קורונה?

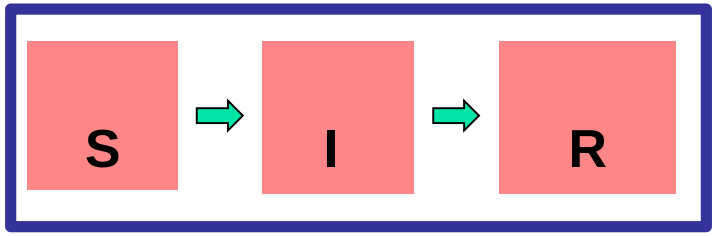




- שאלה לא נכונה
- ג'ורג' בוקס (1978): "*כל המודלים הם לא נכונים, אבל חלקם הם שימושיים*"
- כל מודל הוא **קירוב** של המציאות, ולכן בהגדרה "לא נכון"
- מודל הוא "שימושי" כאשר הוא מלמד אותנו משהו "חשוב" שלא ידענו קודם
  - למשל – מודל SIR הראה שכאשר אחוז האנשים שנחשפו למחלה עולה מעבר לסף מסוים, המגפה תפסיק להתפשט ("חסינות עדר").
  - לכן, מודל SIR הוא "שימושי"
    - אפילו שהוא מנבא ערך סף "לא נכון"

מהו המודל השימושי עבור הקורונה?





- עדיין שאלה לא מוגדרת היטב
- "שימושיות" המודל תלויה ב:

1. מטרת המודל - שאלה שעליה המודל נועד לענות:
   - סגר – חלקי או מלא, אסטרטגית יציאה, מדיניות בדיקות אופטימלית
2. רמת הדיוק הנדרשת
   - ככל שמודל מזניח פחות דברים, הוא יותר מדוייק
3. מידת הפשטות של המודל
   - ככל שמודל מזניח יותר דברים, הוא קל יותר לניתוח, לתכנות, ... , ולכן ניתן לקבל תשובות מהר יותר

דרישות 2. ו-3. הן מנוגדות

נחזור למודל SIR

עלולים להידבק
S

חולים
I

החלימו
R

הנחות:

- קצב הגידול במספר החולים החדשים הוא פרופורציונלי למספר הבריאים **S**
- הסיכוי של אדם בריא להידבק הוא פרופורציונאלי למספר החולים **I**. לכן,

$$S'(t) = -\beta IS$$

נחזור למודל SIR

עלולים להידבק
S

חולים
I

החלימו
R

הנחות:

- קצב הגידול במספר החולים החדשים הוא פרופורציונלי למספר הבריאים **S**
- הסיכוי של אדם בריא להידבק הוא פרופורציונאלי למספר החולים **I**. לכן,

$$S'(t) = -\beta IS$$

הנחה: קצב הגידול במספר המחלימים הוא פרופורציונאלי למספר החולים I. לכן,

$$R'(t) = \gamma I$$

למשל, אם זמן ההחלמה הממוצע הוא d ימים, בכל יום מחלימים $\frac{1}{d}$ מהחולים, ולכן $\gamma \approx \frac{1}{d}$

נחזור למודל SIR

עלולים להידבק
S

$\xrightarrow{\beta SI}$

חולים
I

$\xrightarrow{\gamma I}$

החלימו
R

$$S'(t) = -\beta SI$$

$$R'(t) = \gamma I$$

נחזור למודל SIR

עלולים להידבק
S

$\xrightarrow{\beta SI}$

חולים
I

$\xrightarrow{\gamma I}$

החלימו
R

$$S'(t) = -\beta SI$$

$$I'(t) = +\beta SI - \gamma I$$

$$R'(t) = \gamma I$$

נחזור למודל SIR

עלולים להידבק **S** $\xrightarrow{\beta SI}$ חולים **I** $\xrightarrow{\gamma I}$ החלימו **R**

$$S'(t) = -\beta SI \qquad I'(t) = +\beta SI - \gamma I \qquad R'(t) = \gamma I$$

- מספר האנשים באוכלוסיה: $N := S + I + R$
- **החלפת משתנים**: $s = \frac{S}{N},\ i = \frac{I}{N},\ r = \frac{R}{N},\quad \tilde{t} = \gamma t$
- $s(\tilde{t}) + i(\tilde{t}) + r(\tilde{t}) = 1 \quad ,0 \le s(\tilde{t}), i(\tilde{t}), r(\tilde{t}) \le 1$

- **מודל SIR** במשתנים החדשים הוא

$$s'(\tilde{t}) = -R_0 si, \quad i'(\tilde{t}) = (R_0 s - 1)i, \quad r'(\tilde{t}) = i, \quad where\ \ R_0 = \beta N/\gamma$$

- דינמיקה נקבעת על ידי הפרמטר חסר המימד R_0
- לשם נוחות, נרשום מעתה ואילך t ולא $\tilde{t}$

מודל SIR – תנאי התחלה

עלולים להידבק **S** → חולים **I** → החלימו **R**

$$s'(t) = -R_0 si, \qquad i'(t) = i(R_0 s - 1), \qquad r'(t) = i$$

- תנאי התחלה: $s(0), i(0), r(0)$
- אם $i(0) = 0$, אזי $i(t) \equiv 0$, ולכן $s(t) \equiv s(0)$, $r(t) \equiv r(0)$
- מגיפה תתפשט רק אם ב-$t = 0$ יש חולים: $i(0) > 0$ patient(s) zero
- תנאי התחלה טיפוסי:

$$r(0) = 0, \qquad 0 < i(0) \ll 1, \qquad s(0) = 1 - r(0) - i(0) \cong 1$$

מודל SIR - שלב התחלתי

$$s'(t) = -R_0 s(t) i(t), \quad i'(t) = i(R_0 s(t) - 1), \quad r'(t) = i(t)$$
$$s(0) \cong 1, \quad 0 < i(0) \ll 1, \quad r(0) = 0$$

- בשלב ההתחלתי $s \approx 1$. לכן,

$$i'(t) = (R_0 s(t) - 1) i(t) \approx (R_0 - 1) i(t)$$

- פיתרון נתון על ידי אקספוננט:

$$i(t) \approx i(0) e^{(R_0 - 1)t}$$

- אם $R_0 < 1$, המגיפה מיד תדעך
- אם $R_0 > 1$, בהתחלה מספר החולים יגדל אקספוננציאלית
  - מעתה ואילך נדון רק במקרה שבו $R_0 > 1$

מקדם ההתפשטות (Reproductive number)

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta SI, \\ I'(t) &= +\beta SI - \gamma I, \\ R'(t) &= \gamma I \end{aligned}$$

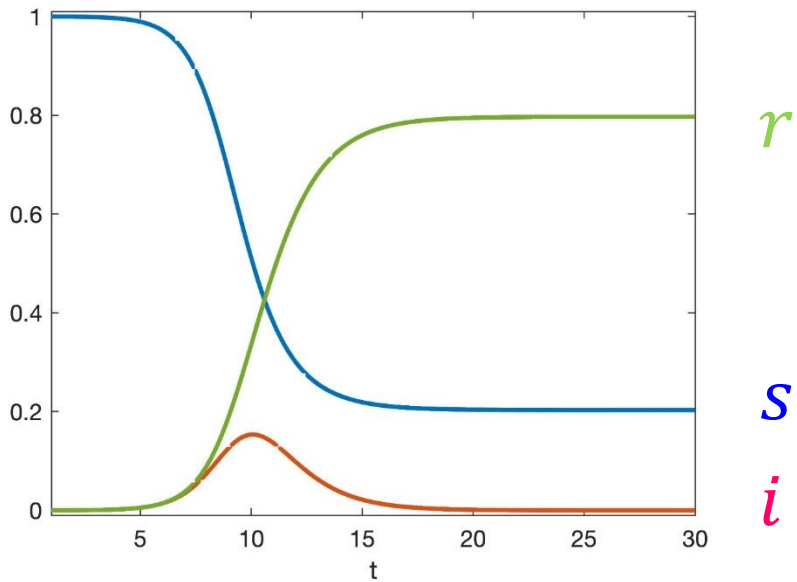
$$R_0 := \frac{\beta N}{\gamma}$$

- נשים לב ש

$$R_0 = \frac{\beta N\, I}{\gamma\, I} \approx \frac{\beta S(0)\, I}{\gamma\, I} = \frac{-S'(0)}{R'(0)} = \frac{\text{קצב הדבקה בהתחלה}}{\text{קצב החלמה בהתחלה}}$$

- לכן, ברור מדוע
  - אם $R_0 < 1$, המגיפה מיד תדעך
  - אם $R_0 > 1$, המגיפה בהתחלה תתפשט

סימולציה אופיינית של SIR

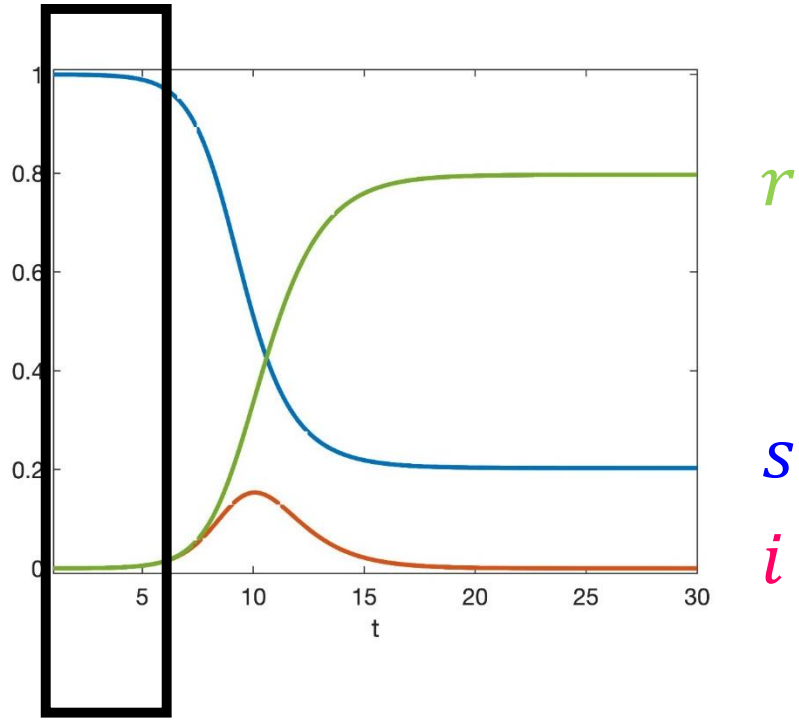


$$s'(t) = -R_0 s(t) i(t), \qquad i'(t) = i(R_0 s(t) - 1), \qquad r'(t) = i(t)$$

$$s(0) \cong 1, \qquad 0 < i(0) \ll 1, \qquad r(0) = 0$$

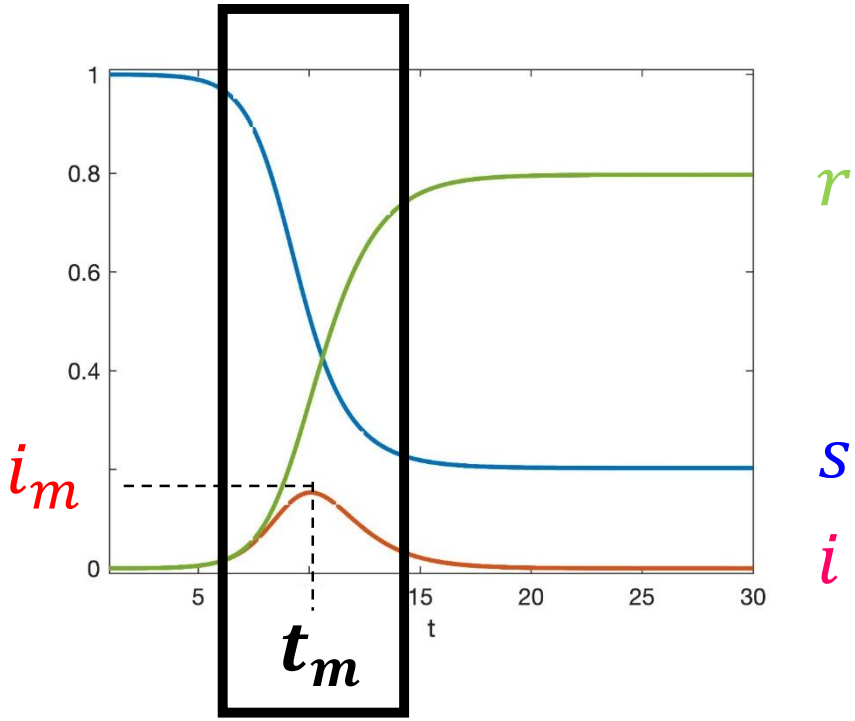
- אין פתרונות מפורשים
- פותרים נומרית את 3 המד"רים

סימולציה אופיינית – שלב התחלתי



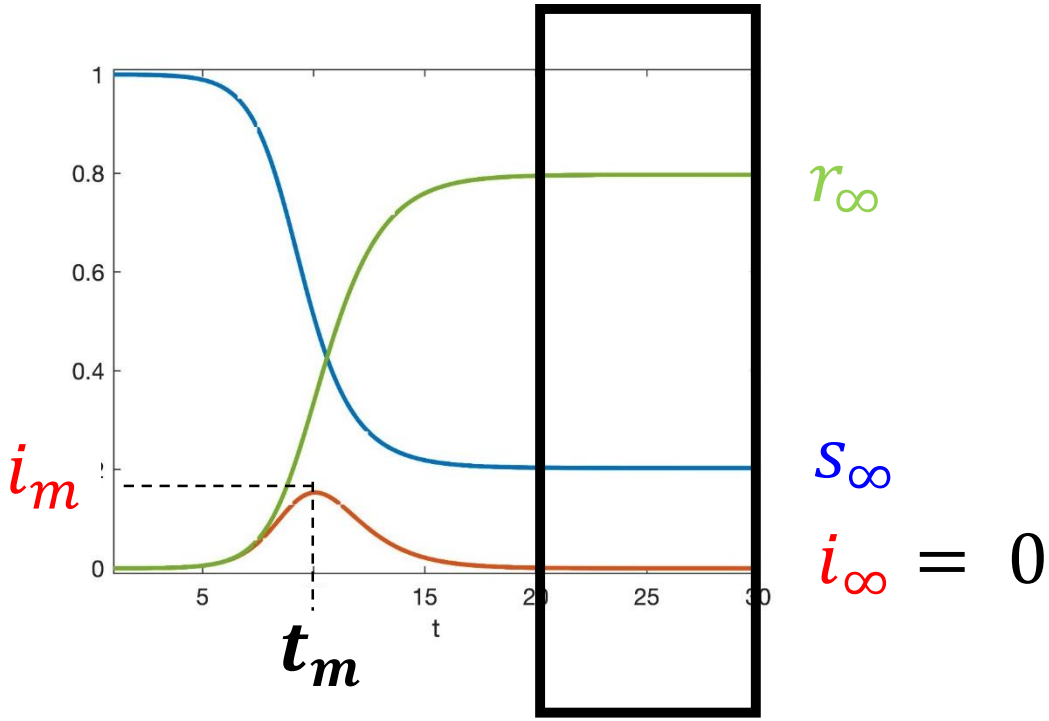
- $s \approx 1, \quad i, r \ll 1$
- גידול אקספוננציאלי ב i, r

סימולציה אופיינית – שלב אמצעי



- s ממשיך לרדת
- i עולה עד $i_m = i(t_m)$ ואז מתחיל לרדת
- r ממשיך לעלות

סימולציה אופיינית – שלב סופי



- $s \to s_\infty > 0$
- $i \to i_\infty = 0$
- $r \to r_\infty > 0$

חסינות עדר

$$i'(t) = (R_0 s(t) - 1) i(t)$$

- נניח ש- $R_0 > 1$. לכן בהתחלה $i' > 0$
- מכיוון ש-$s(t)$ היא מונוטונית יורדת, $i'(t)$ היא גם מונוטונית יורדת.
- $i' = 0$ כאשר $s = s_c := 1/R_0$
- בהמשך, כאשר $s < s_c$, מספר החולים ידעך (כי $i' < 0$)
  - כל חולה חדש ידביק בממוצע פחות מחולה אחד (כי "רוב" האנשים שהוא בא איתם במגע כבר החלימו)
  - מגיפה תדעך לא בגלל שכמעט כולם כבר חלו, אלא בגלל שהחולים החדשים "יתקשו" להדביק חולים נוספים
  - חסינות עדר (herd immunity)

גודל נשמר (Invariance)

למה: במודל SIR,

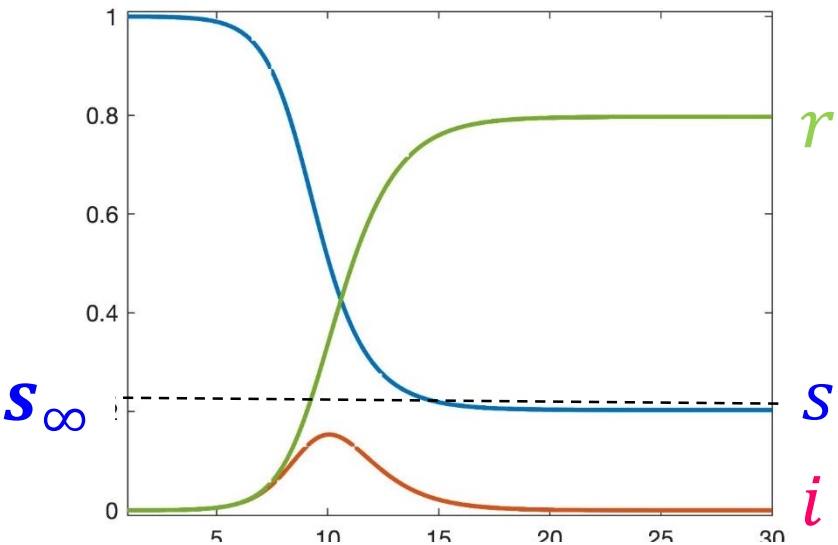
$$i(t)+s(t)-\frac{1}{R_0}\ln(s(t))\equiv c\approx 1$$

Proof $s'(t)=-R_0 si,\qquad i'(t)=i(R_0 s-i),\qquad s(0)\approx 1,\quad i(0)\ll 1$

$$\frac{di}{ds}=\frac{i'(t)}{s'(t)}=\frac{i(R_0 s-i)}{-R_0 si}=-1+\frac{1}{R_0 s}$$

$$i=-s+\frac{1}{R_0}\ln(s)+c,\qquad c=i(0)+s(0)-\frac{1}{R_0}\ln(s(0))\approx 1$$

אחוז הלא-נדבקים הסופי



למה: כאשר המגפה תסתיים, החלק של האוכלוסייה שלא נדבקו הוא

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0}\ln(s_\infty) \quad \textbf{(final - size equation)}$$

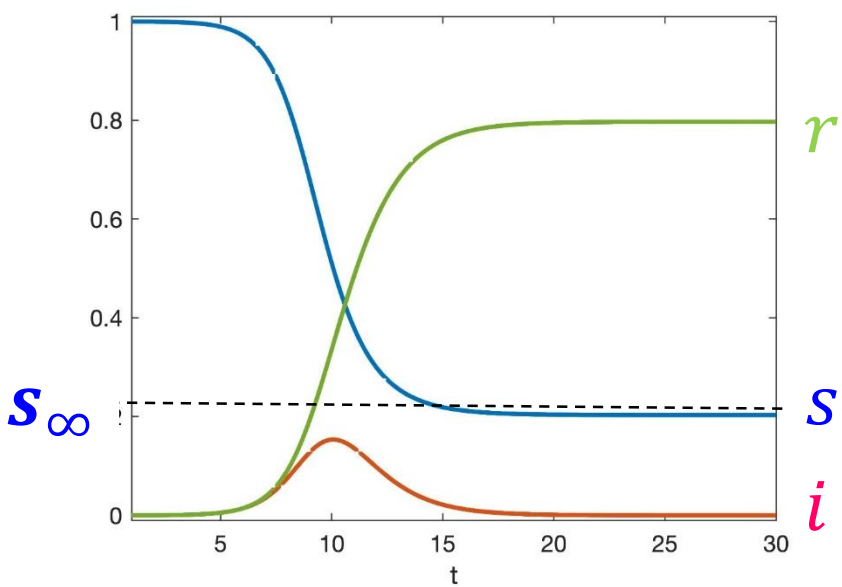
Proof $\quad i + s - \frac{1}{R_0}\ln(s) = 1$

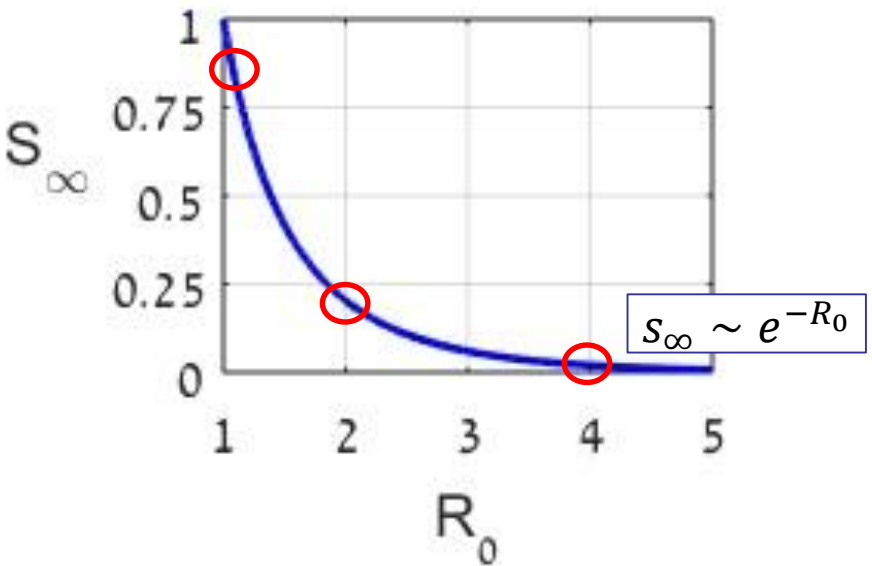
Since $i_\infty = 0$, the result follows

אחוז הלא-נדבקים הסופי

למה: כאשר המגפה תסתיים, החלק של האוכלוסייה שלא נדבקו הוא

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0}\ln(s_\infty) \quad \textbf{(final - size equation)}$$

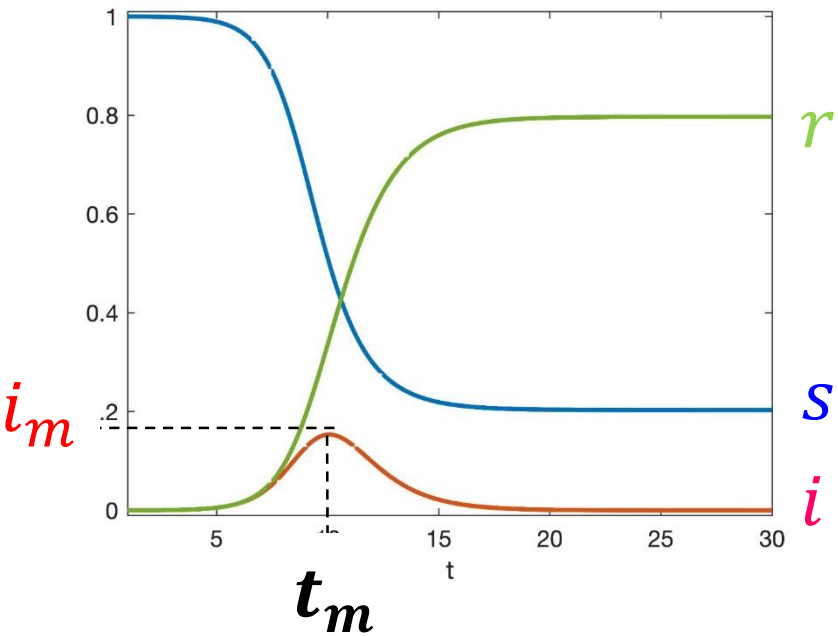




- s_∞ הוא מונוטוני יורד ב-R_0

R_0	1.1	2	4
s_∞	82%	20%	2%

מספר החולים המקסימלי

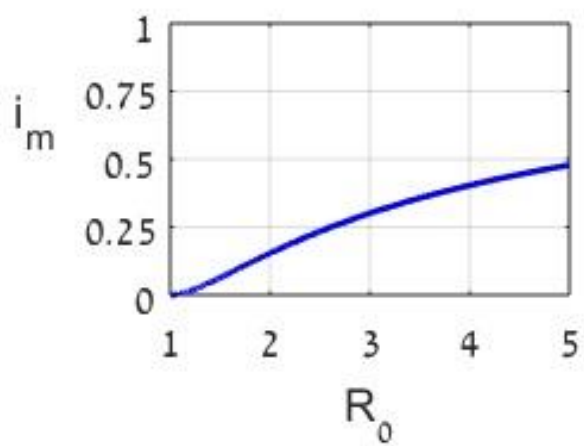


למה: מספר החולים המקסימלי הוא

$$i_m \approx 1 - \frac{1+\ln(R_0)}{R_0}$$

Proof $\quad i' = 0 \quad \Rightarrow \quad s = s_c = \frac{1}{R_0}$

substitute $s = \frac{1}{R_0}$ in $\quad i + s - \frac{1}{R_0}\ln(s) = 1$



הערכות עבור הקורונה $(2 \le R_0 \le 4)$

R_0	2	4
s_∞	20%	2%
i_m	15%	40%

החלק של האנשים שלא יידבקו

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0}\ln(s_\infty) \quad \textbf{(final - size equation)}$$

מספר החולים המקסימלי

$$i_m \approx 1 - \frac{1+\ln(R_0)}{R_0}$$

הערכות עבור הקורונה $(2 \le R_0 \le 4)$

החלק של האנשים שלא יידבקו

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0}\ln(s_\infty) \quad \textbf{(final - size equation)}$$

מספר החולים המקסימלי

$$i_m \approx 1 - \frac{1+\ln(R_0)}{R_0}$$

R_0	2	4
s_∞	20%	2%
i_m	15%	40%

סה"כ יחלו בישראל:

$$80\% * 9{,}000{,}000 = 7{,}200{,}000$$

בהנחה שבתי החולים לא יקרסו, מתוכם ימותו 0.1% : 7,200 מתים

הערכות עבור הקורונה $(2 \le R_0 \le 4)$

החלק של האנשים שלא יידבקו

$$s_\infty = 1 + \frac{1}{R_0}\ln(s_\infty) \quad \textbf{(final - size equation)}$$

מספר החולים המקסימלי

$$i_m \approx 1 - \frac{1+\ln(R_0)}{R_0}$$

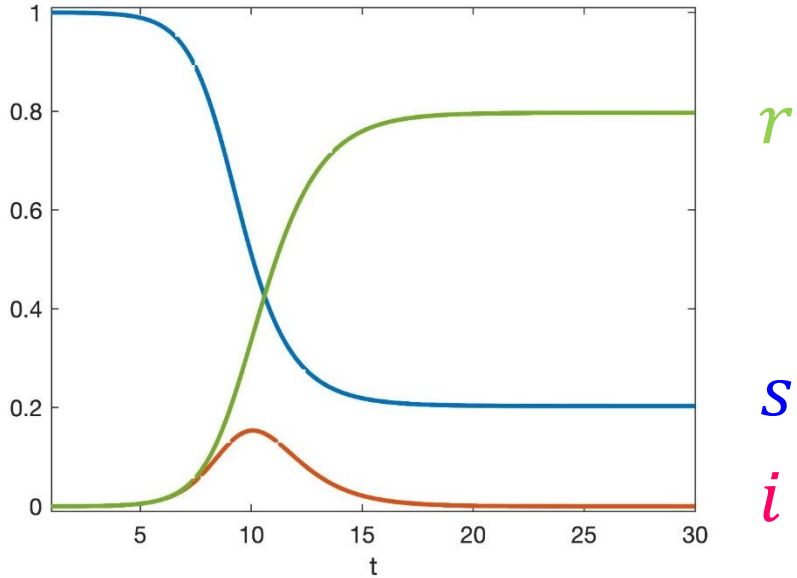
R_0	2	4
s_∞	20%	2%
i_m	15%	40%

מספר חולים מקסימלי בישראל ברגע השיא של המגפה:

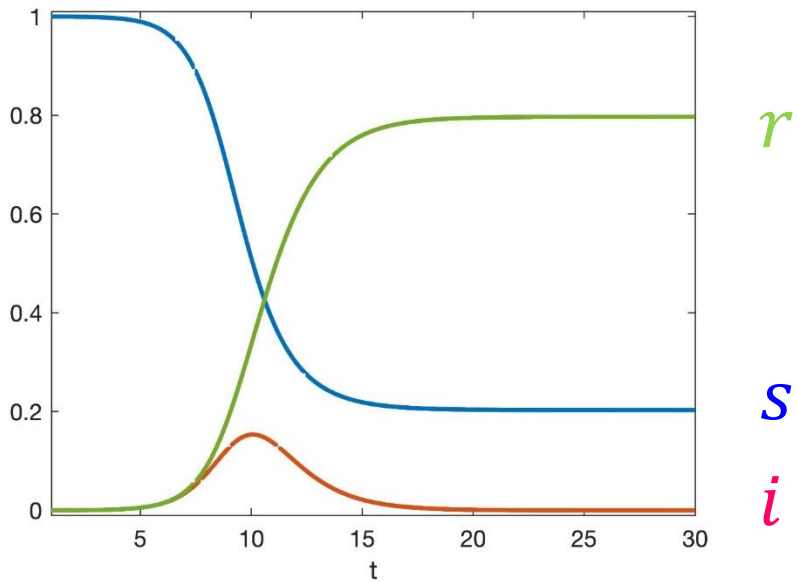
$$15\% * 9{,}000{,}000 = 1{,}350{,}000$$

מתוכם 1% זקוקים להנשמה: 13,500

באיזה שלב הקורונה בישראל?

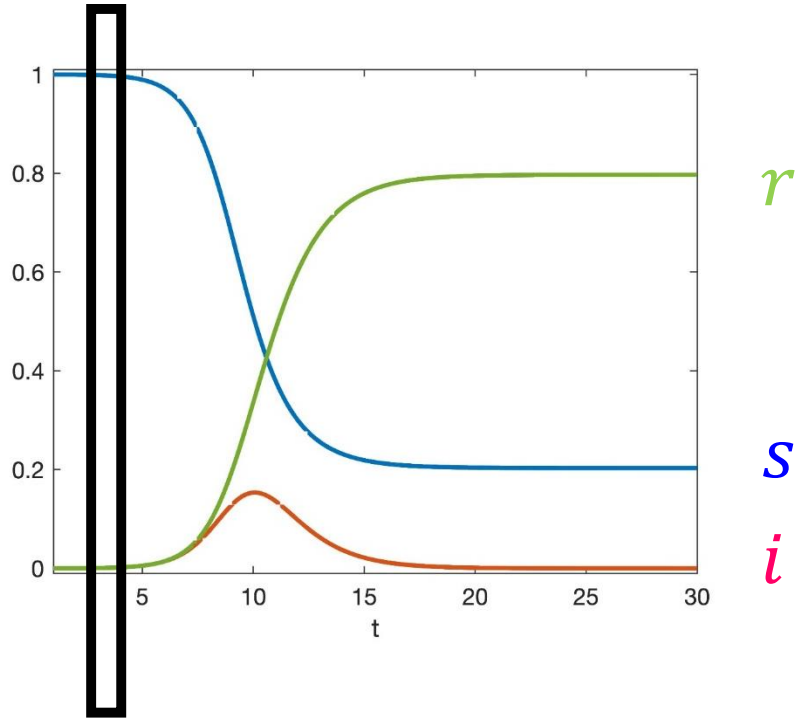


באיזה שלב הקורונה בישראל?



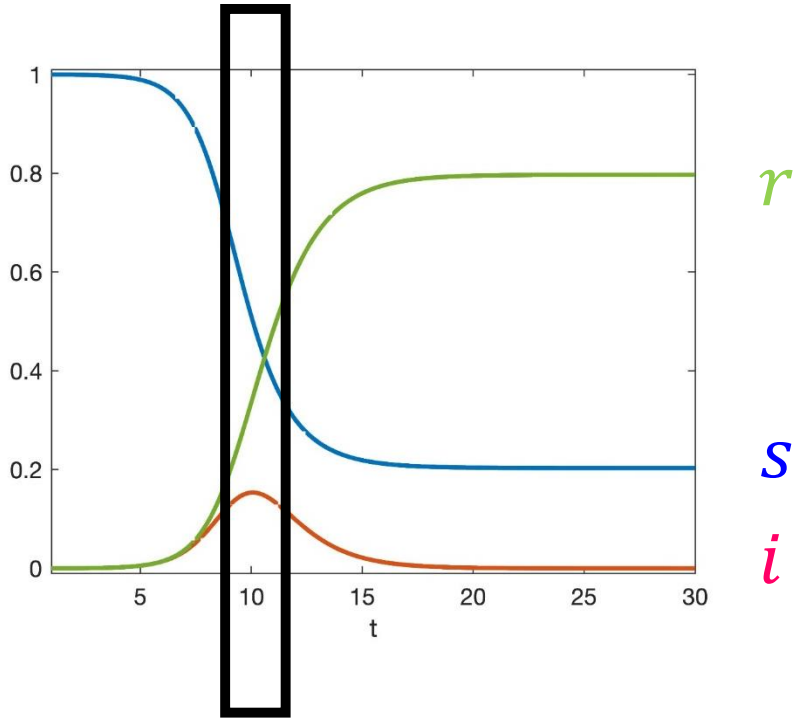
- מספר מקרים (חולים+מחלימים) המדווח בישראל (18.4.2020) הוא 13,000
- נניח שמספר המקרים האמיתי גדול פי 10
- עדיין, יחסית לגודל האוכלוסייה (8.8 מיליון), $s = 1 - \frac{130{,}000}{8{,}800{,}000} = 98\%$

באיזה שלב הקורונה בישראל?



- מספר מקרים (חולים+מחלימים) המדווח בישראל (18.4.2020) הוא 13,000
- נניח שמספר המקרים האמיתי גדול פי 10
- עדיין, יחסית לגודל האוכלוסייה (8.8 מיליון), $s = 1 - \frac{130{,}000}{8{,}800{,}000} = 98\%$

מה צריך לעשות כדי שלא נגיע לפה?



- חייבים להוריד את R_0 מתחת ל-1

$$R_0 := \frac{\beta N}{\gamma}$$

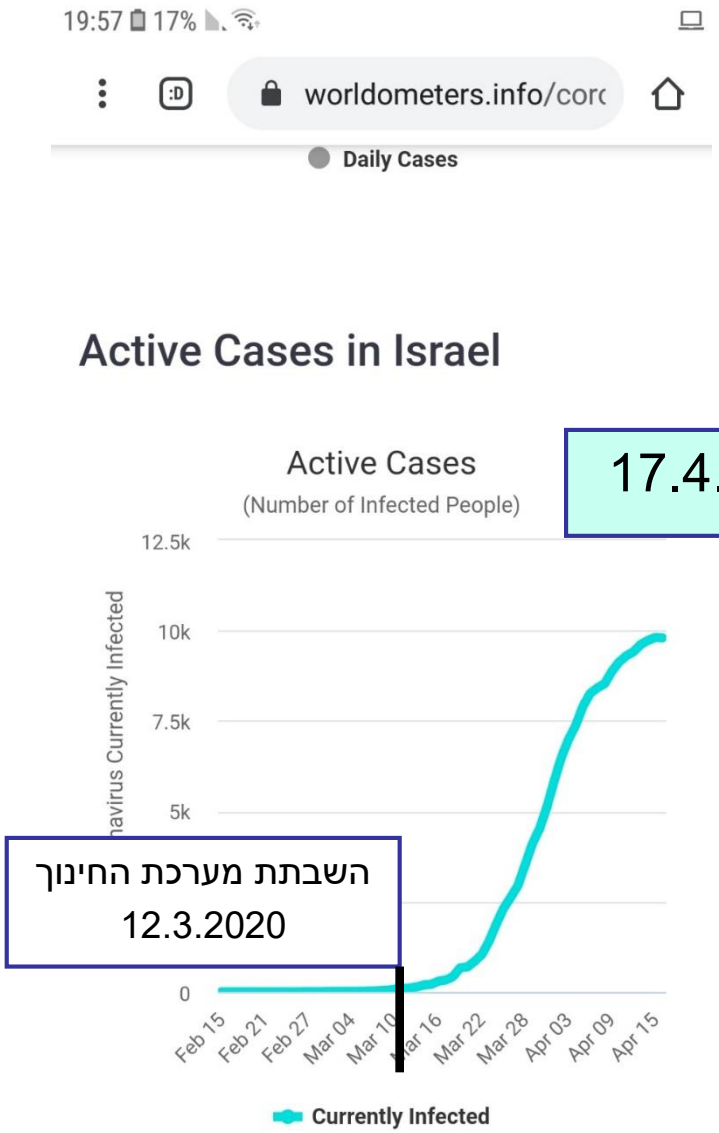
- כל עוד אין תרופה, אי אפשר להאיץ את קצב ההחלמה γ
- צריך להוריד את קצב ההדבקה β

$$S'(t) = -\beta SI$$

- כל חולה מדביק βS אנשים
- קצב הדבקה = מספר מגעים יומיים*סיכוי להדבקה במגע
- סגר מוריד את מספר המגעים היומיים פי 5 (משרד הבריאות)
- לכן, אפילו אם R_0=4, הסגר הוריד את R_0 מתחת ל-1
- בידוד של חולים/כאלה שנחשפו לחולים, מוריד עוד יותר את R_0
- אלקוגל מוריד את סיכוי ההדבקה במגע – ולכן מוריד עוד יותר את R_0
- לכן, מספר החולים בישראל אמור לדעוך

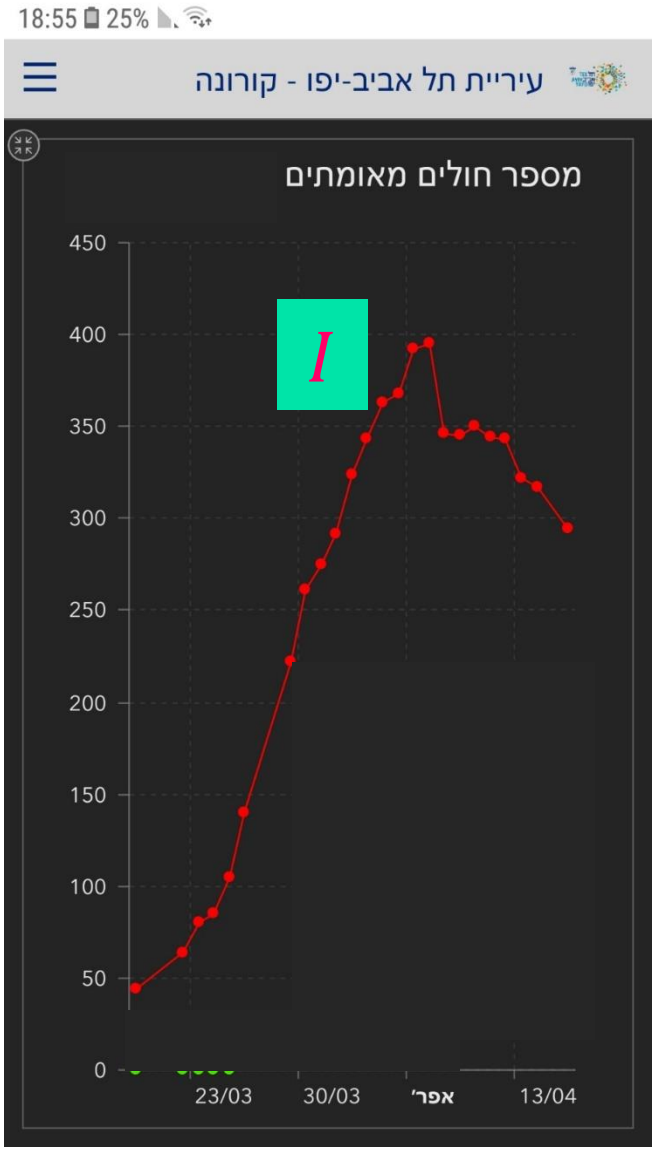
הסגר לא עובד בישראל

- עדיין יש עלייה במספר החולים
- הסגר לא הוריד את R_0 מתחת ל-1



הסגר כן עובד בתל אביב

נכון ל-17.4.2020



- ירידה במספר החולים
- הסגר כן הוריד את R_0 מתחת ל-1

מה קורה בערים אחרות?

- קושי בהשגת נתונים

מה קורה בערים אחרות?

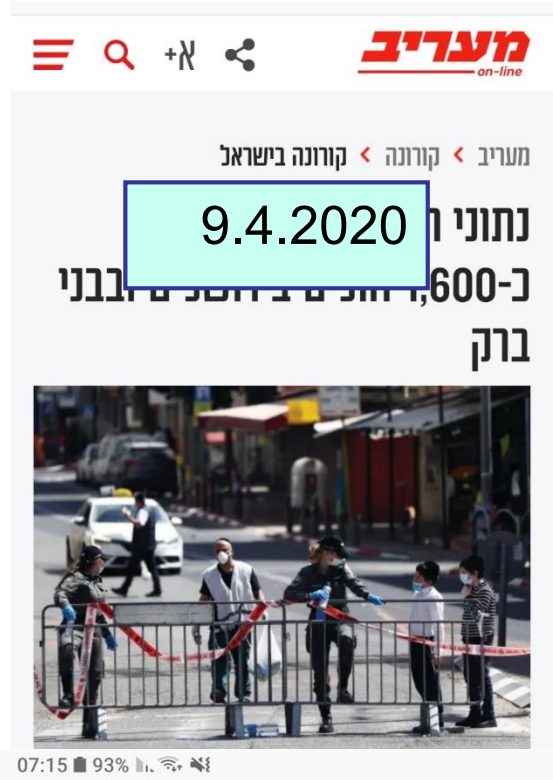
- קושי בהשגת נתונים

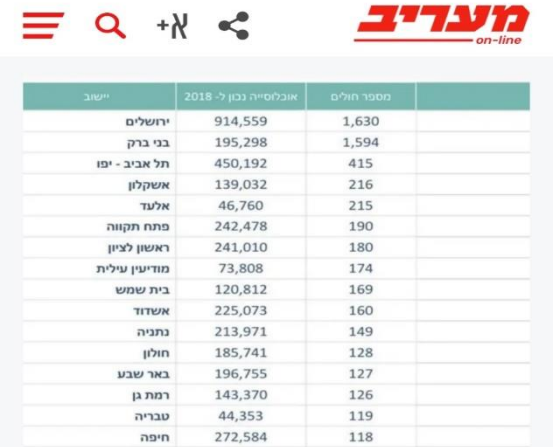
דיווח שוטף

משרד הבריאות: 10,408 חולי קורונה בישראל, 124 מונשמים, 1,183 החלימו

8,794 חולים במצב קל, 167 קשה; מכון ויצמן יחל בביצוע 1,000 בדיקות קורונה ביום; גם אוניברסיטת תל אביב תתחיל ככל הנראה בשבוע הבא לערוך בדיקות קורונה; מנתוני המל"ל עולה כי אתמול התקבלו 4,412

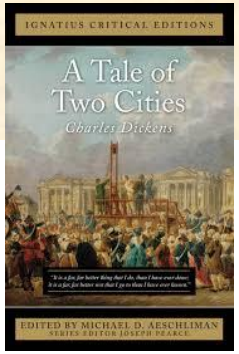
ישוב	אוכלוסייה	חולים מאומתים	חולים ל100 אלף תושבים
בני ברק	195,298	2,349	1202.78
דייר אל-אסד	12,435	99	796.14
אלעד	46,760	321	686.48

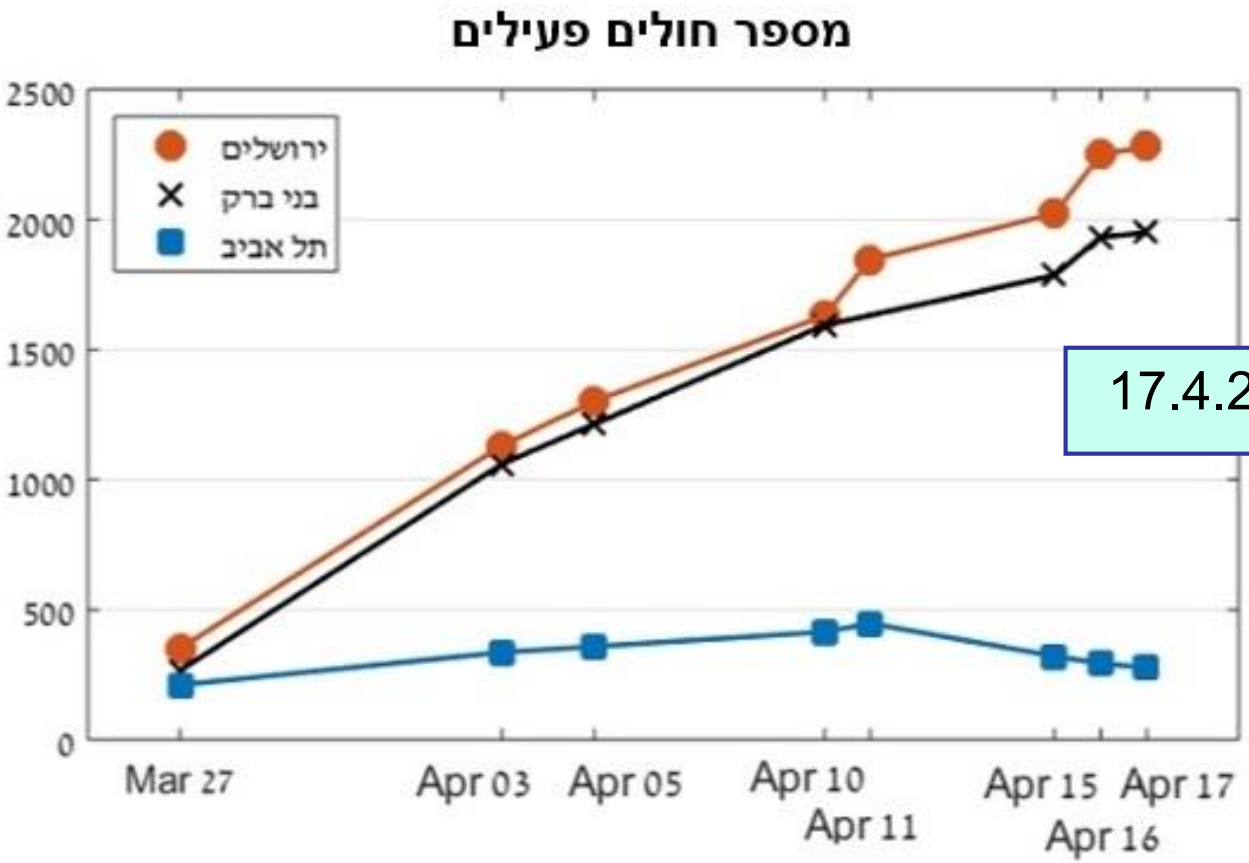


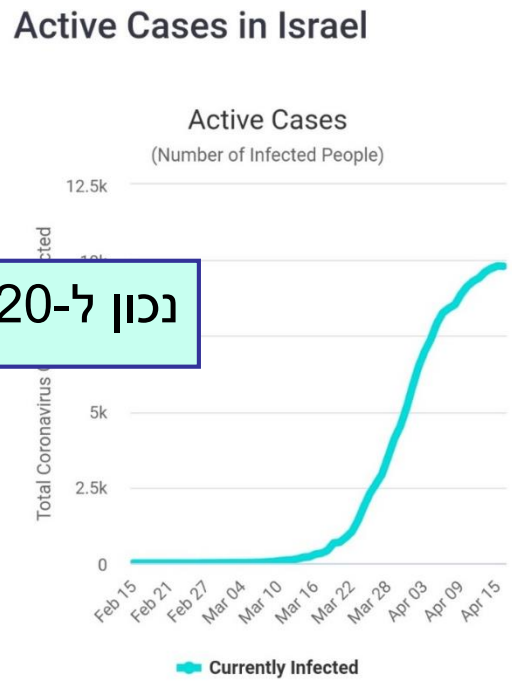


	מספר חולים	אוכלוסייה נכון ל- 2018	יישוב
	1,630	914,559	ירושלים
	1,594	195,298	בני ברק
	415	450,192	תל אביב - יפו
	216	139,032	אשקלון
	215	46,760	אלעד
	190	242,478	פתח תקווה
	180	241,010	ראשון לציון
	174	73,808	מודיעין עילית
	169	120,812	בית שמש
	160	225,073	אשדוד
	149	213,971	נתניה
	128	185,741	חולון
	127	196,755	באר שבע
	126	143,370	רמת גן
	119	44,353	טבריה
	118	272,584	חיפה

A Tale of Three Cities





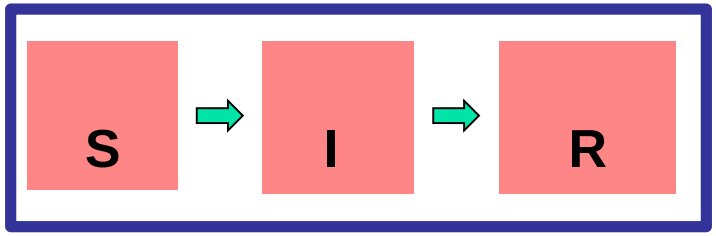


נכון ל-17.4.2020

- **זו תמצית הסיפור של הקורונה בישראל**

האם SIR שימושי עבור הקורונה?

$$s'(t) = -R_0 s(t) i(t)$$
$$i'(t) = i(R_0 s(t) - 1)$$
$$r'(t) = i(t)$$

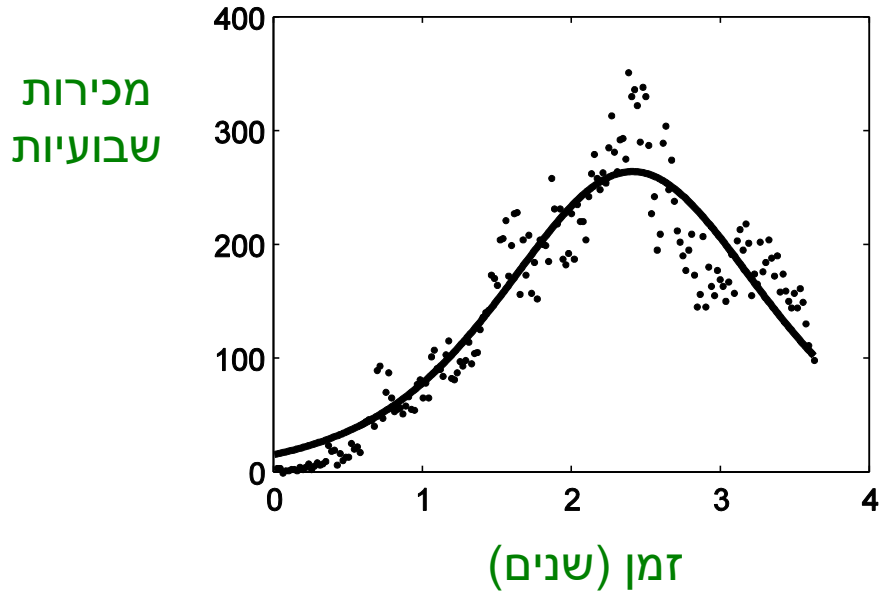


- "שימושיות" המודל תלויה ב:
  1. שאלה שעליה המודל נועד לענות
     1. תחזיות/ניתוח אסטרטגיות ברמת המדינה – כן
     2. הבדלים בין ערים שונות - לא
  2. רמת הדיוק –
     1. **נמוכה** – מזניח "יותר מדי דברים חשובים"
  3. מידת הפשטות של המודל
     1. **מקסימלית** – לכן קל לקבל תובנות חשובות

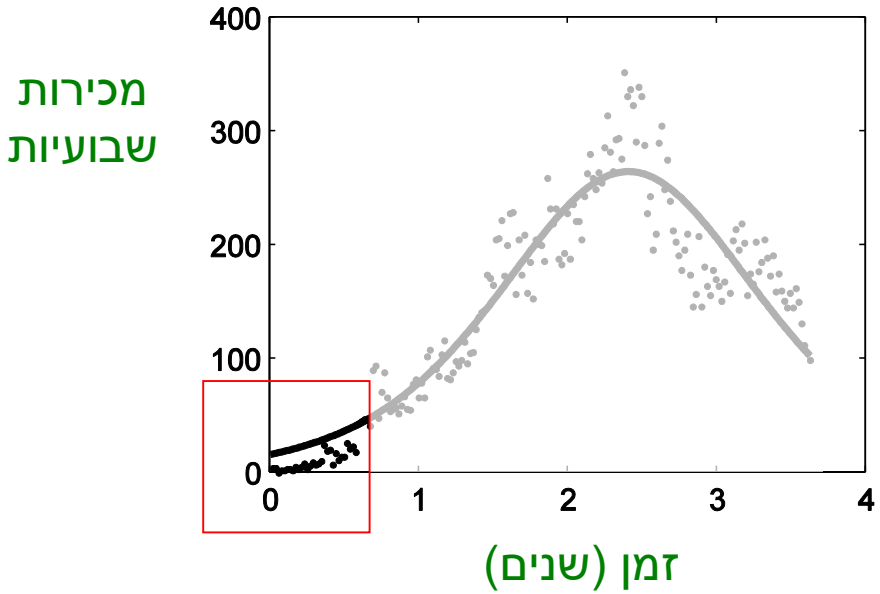
מבנה ההרצאה

- מודל SIR למגיפות
- מודל Bass עבור מוצרים חדשים
- מודל Bass-SIR עבור פנלים סולריים+קורונה
- מודל Bass-SIR על גרף

מכירות שבועיות של תוכנה



מכירות שבועיות של תוכנה



- מטרה: השתמש בנתוני המכירות של החודשים הראשונים כדי לחזות את
  - מספר הרוכשים בהמשך
  - פוטנציאל השוק
- בעיה קלאסית בכלכלה/שיווק/ניהול
- מודל מתמטי ראשון: בס Bass (1969)

פיתוח של מודל בס

החלטה לאמץ (לקנות) מוצר חדש מושפעת מ-

1. השפעות חיצוניות (פרסומות, כתבות בטלויזיה, ...)
2. השפעות פנימיות על ידי אנשים שכבר קנו את המוצר ("מפה לאוזן")

- מוצרים שלא היו קיימים קודם (אייפון, רכב אוטונומי, ...)
  - עיקר ההתפשטות מפה לאוזן

מודל בס

- N - גודל האוכלוסייה
- $I(t)$ – מספר המאמצים (adopters) של המוצר בזמן t
- $S(t) = N - I(t)$ - מספר האנשים שטרם קנו

$$I'(t) = S(t) \cdot \text{Prob}\begin{pmatrix}\text{a non-adopter} \\ \text{adopts at time t}\end{pmatrix}$$

פרמטר של השפעות פנימיות

$$\text{Prob}\begin{pmatrix}\text{a non-adopter} \\ \text{adopts at time t}\end{pmatrix} = p + \frac{q}{N} I(t)$$

פרמטר של השפעות חיצוניות

מודל בס

$$I'(t) = \underbrace{\left(N - I(t)\right)}_{=S(t)}\left[p + \frac{q}{N} I(t)\right], \qquad I(0) = 0$$

- *$i(t) = I(t)/N$: חלק של המאמצים מתוך האוכלוסייה*

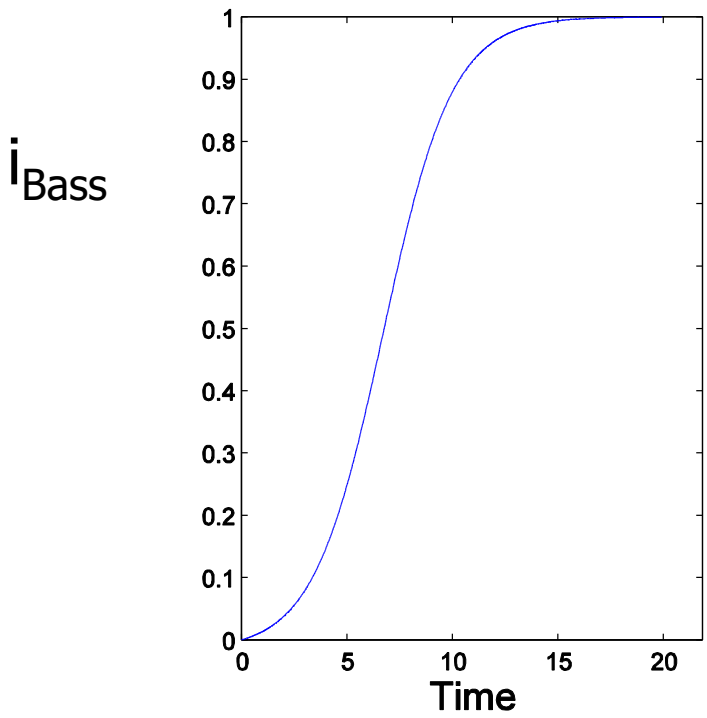
$$i'(t) = \left(1 - i(t)\right)\left[p + qi(t)\right], \qquad i(0) = 0$$

- משוואה ב"ת ב-N
- פיתרון מפורש

$$i_{\text{Bass}}(t) = \frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}}$$

מודל בס

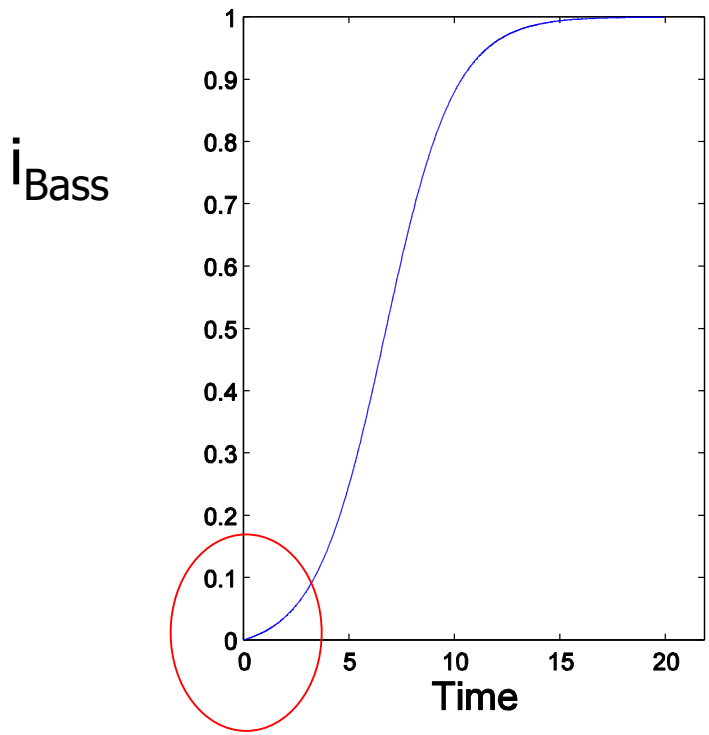
$$i_{\text{Bass}}(t) = \frac{1-e^{-(p+q)t}}{1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$



- עקום בצורת S

מודל בס

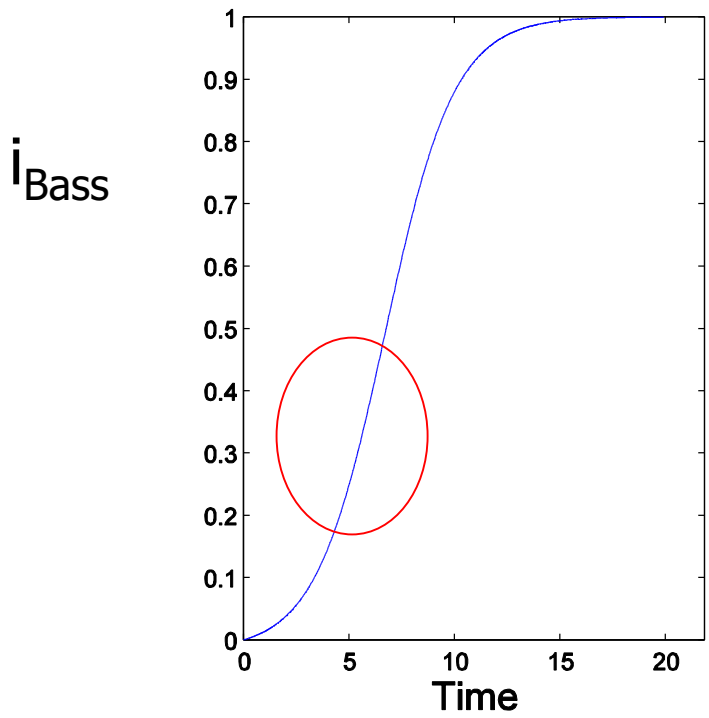
$$i_{\text{Bass}}(t) = \frac{1-e^{-(p+q)t}}{1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$



- עקום בצורת S
- שלב התחלתי: רק אימוצים חיצוניים

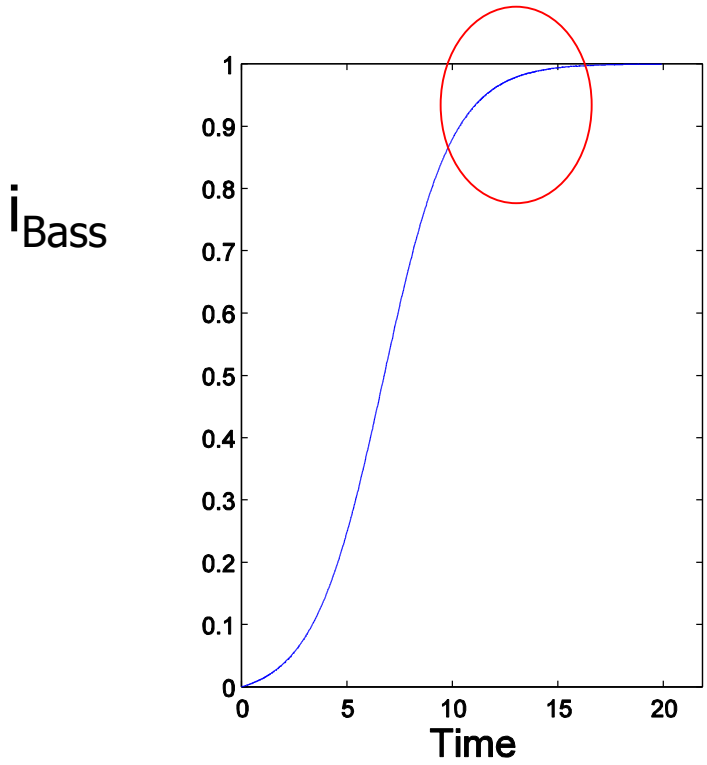
מודל בס

$$i_{\text{Bass}}(t) = \frac{1-e^{-(p+q)t}}{1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$



- עקום בצורת S
- שלב התחלתי: רק אימוצים חיצוניים
- בהמשך: רוב האימוצים הם פנימיים ("מפה לאוזן")

מודל בס



$$i_{\text{Bass}}(t) = \frac{1-e^{-(p+q)t}}{1+\frac{q}{p}e^{-(p+q)t}}$$

- עקום בצורת S
- שלב התחלתי: רק אימוצים חיצוניים
- בהמשך: רוב האימוצים הם פנימיים ("מפה לאוזן")
- בסוף, מגיעים לרוויה

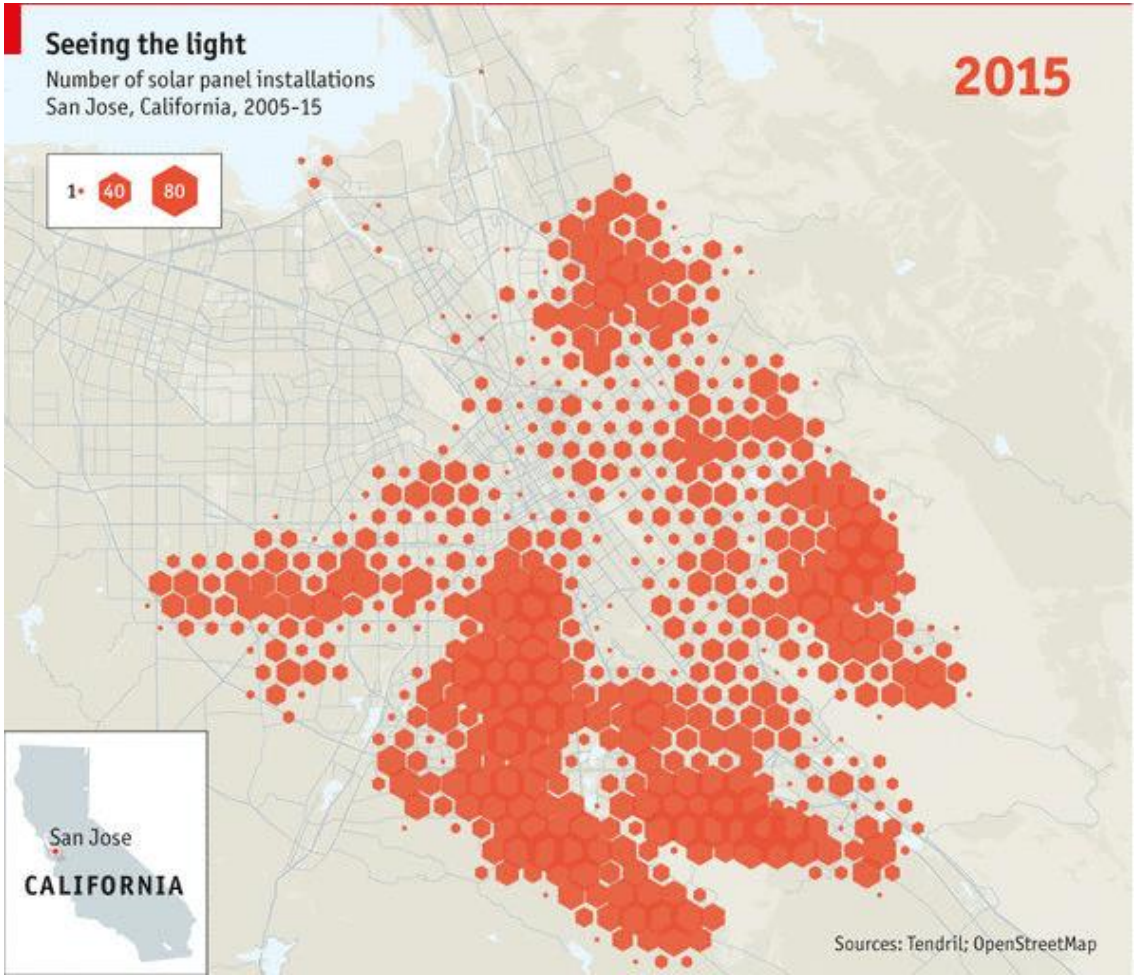
מבנה ההרצאה

- מודל SIR למגיפות
- מודל Bass עבור מוצרים חדשים
- מודל Bass-SIR עבור פנלים סולריים+קורונה
- מודל Bass-SIR על גרף

התפשטות של פנלים סולריים

- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל ההתקנות
- Bollinger and Gillingham (2012): המנבא העיקרי להתקנה של פאנל סולרי חדש הוא קיום שכן שכבר התקין פאנל סולרי

TENDRIL

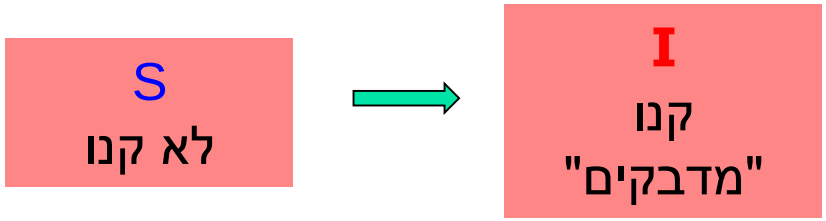

Seeing the light
Number of solar panel installations
San Jose, California, 2005-15
2015
1+
40
80
San Jose
CALIFORNIA
Sources: Tendril; OpenStreetMap

"החלמה" של המאמצים

- Graziano and Gillingham (2014): השפעת השכנים דועכת עם הזמן
  - הלא-מאמצים "מפסיקים לראות" את הפאנלים
  - המאמצים מפסיקים לדבר על זה
- איך נשלב את הדעיכה בהשפעת השכנים במודל בס?

שילוב הדעיכה בהשפעת השכנים

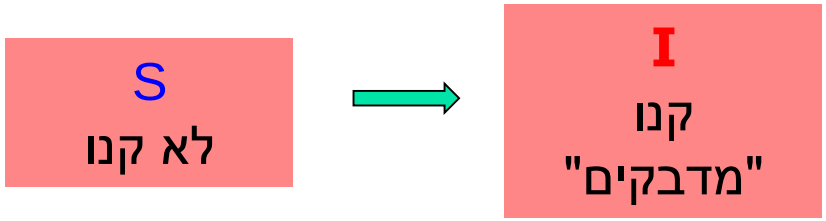
- מודל בס



$$s'(t) = -s\big(p + qi(t)\big), \qquad i'(t) = s(t)\big(p + qi(t)\big).$$

שילוב הדעיכה בהשפעת השכנים

- מודל בס

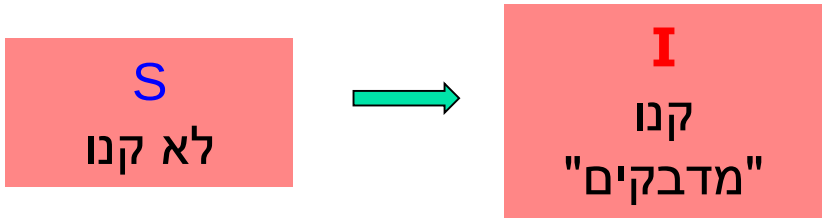


- נרחיב באופן הבא (פיביך, 2016)

$$s'(t) = -s\left(p + qi(t)\right), \quad i'(t) = s(t)\left(p + qi(t)\right).$$

שילוב הדעיכה בהשפעת השכנים

- מודל בס



- נרחיב באופן הבא (פיביך, 2016)

מודל מתמטי (פיביך, 2016)

$$s'(t) = -s\left(p + qi(t)\right), \quad i'(t) = s(t)\left(p + qi(t)\right) - \gamma i(t), \quad r'(t) = \gamma i(t)$$

אימוץ מוצרים עם "החלמה"

מודל מתמטי (פיביך, 2016)

$$s' = -s\left(p + qi\right), \quad i' = s\left(p + qi\right) - \gamma i, \quad r' = \gamma i$$

אימוץ מוצרים עם "החלמה"

מודל מתמטי (פיביך, 2016)

$$s' = -s(p+qi), \quad i' = s(p+qi) - \gamma i, \quad r' = \gamma i$$

- כאשר $\gamma = 0$, מקבלים את מודל בס (עם $s = 1 - i$)

$$i' = (1-i)(p+qi)$$

אימוץ מוצרים עם "החלמה"

מודל מתמטי (פיביך, 2016)

$$s' = -s\left(p + qi\right), \quad i' = s\left(p + qi\right) - \gamma i, \quad r' = \gamma i$$

- כאשר $\gamma = 0$, מקבלים את מודל בס (עם $s = 1 - i$)

$$i' = \left(1 - i\right)\left(p + qi\right)$$

- כאשר $p = 0$ מקבלים את מודל SIR (עם $q = R_0, \gamma = 1$)

$$s' = -R_0 si, \quad i' = i(R_0 s - 1), \quad r' = i$$

אימוץ מוצרים עם "החלמה"

מודל מתמטי (פיביך, 2016)

$$s' = -s(p+qi), \quad i' = s(p+qi) - \gamma i, \quad r' = \gamma i$$

- כאשר $\gamma = 0$, מקבלים את מודל בס (עם $s = 1 - i$)

$$i' = (1-i)(p+qi)$$

- כאשר $p = 0$ מקבלים את מודל SIR (עם $q = R_0, \gamma = 1$)

$$s' = -R_0 si, \quad i' = i(R_0 s - 1), \quad r' = i$$

- מודל Bass-SIR

השוואה: SIR מול Bass-SIR

Bass - SIR

$$s' = -s\left(p + qi\right), \qquad s(0) = 1$$

$$i' = s\left(p + qi\right) - \gamma i, \qquad i(0) = 0$$

$$r' = \gamma i, \qquad r(0) = 0$$

SIR

$$s' = -R_0 si, \qquad s(0) = 1 - i(0)$$

$$i' = i(R_0 s - 1), \qquad i(0) > 0$$

$$r' = i, \qquad r(0) = 0$$

השוואה: SIR מול Bass-SIR

SIR

$$s' = -R_0 si, \qquad s(0) = 1 - i(0)$$
$$i' = i(R_0 s - 1), \qquad i(0) > 0$$
$$r' = i, \qquad r(0) = 0$$

Bass - SIR

$$s' = -s\left(p + qi\right), \qquad s(0) = 1$$
$$i' = s\left(p + qi\right) - \gamma i, \qquad i(0) = 0$$
$$r' = \gamma i, \qquad r(0) = 0$$

- הדבקה מתחילה מ-"חולה אפס"
- לאחר מזה, כל ההדבקות הן "פנימיות"
  - מגפות

השוואה: SIR מול Bass-SIR

SIR

$$s' = -R_0 si, \qquad s(0) = 1 - i(0)$$
$$i' = i(R_0 s - 1), \qquad i(0) > 0$$
$$r' = i, \qquad r(0) = 0$$

Bass - SIR

$$s' = -s\left(p + qi\right), \qquad s(0) = 1$$
$$i' = s\left(p + qi\right) - \gamma i, \qquad i(0) = 0$$
$$r' = \gamma i, \qquad r(0) = 0$$

- הדבקה מתחילה מ-"חולה אפס"
- לאחר מזה, כל ההדבקות הן "פנימיות"
  - מגפות

- אין "חולה אפס"

השוואה: SIR מול Bass-SIR

SIR

$$s' = -R_0 s i, \qquad s(0) = 1 - i(0)$$
$$i' = i(R_0 s - 1), \qquad i(0) > 0$$
$$r' = i, \qquad r(0) = 0$$

- הדבקה מתחילה מ-"חולה אפס"
- לאחר מזה, כל ההדבקות הן "פנימיות"
  - מגפות

Bass - SIR

$$s' = -s(p + qi), \qquad s(0) = 1$$
$$i' = s(p + qi) - \gamma i, \qquad i(0) = 0$$
$$r' = \gamma i, \qquad r(0) = 0$$

- אין "חולה אפס"
- יצירה רציפה בזמן של מאמצים חיצוניים (p)
  - מוצרים חדשים

השוואה: SIR מול Bass-SIR

SIR

$$s' = -R_0 si, \qquad s(0) = 1 - i(0)$$
$$i' = i(R_0 s - 1), \qquad i(0) > 0$$
$$r' = i, \qquad r(0) = 0$$

Bass - SIR

$$s' = -s\left(p + qi\right), \qquad s(0) = 1$$
$$i' = s\left(p + qi\right) - \gamma i, \qquad i(0) = 0$$
$$r' = \gamma i, \qquad r(0) = 0$$

- הדבקה מתחילה מ-"חולה אפס"
- לאחר מזה, כל ההדבקות הן "פנימיות"
  - מגפות

- אין "חולה אפס"
- יצירה רציפה בזמן של מאמצים חיצוניים (p)
  - מוצרים חדשים

האם ההבדל הזה מהותי?

השוואה: SIR מול Bass-SIR

SIR

$$s' = -R_0 si, \qquad s(0) = 1 - i(0)$$
$$i' = i(R_0 s - 1), \qquad i(0) > 0$$
$$r' = i, \qquad r(0) = 0$$

Bass - SIR

$$s' = -s\left(p + qi\right), \qquad s(0) = 1$$
$$i' = s\left(p + qi\right) - \gamma i, \qquad i(0) = 0$$
$$r' = \gamma i, \qquad r(0) = 0$$

- הדבקה מתחילה מ-"חולה אפס"
- לאחר מזה, כל ההדבקות הן "פנימיות"
  - מגפות

- אין "חולה אפס"
- יצירה רציפה בזמן של מאמצים חיצוניים (p)
  - מוצרים חדשים

האם ההבדל הזה מהותי?

- מגפה מתפשטת רק אם $R_0 > 1$
- בסוף, לא כולם חולים

השוואה: SIR מול Bass-SIR

SIR

$$s' = -R_0 si, \qquad s(0) = 1 - i(0)$$
$$i' = i(R_0 s - 1), \qquad i(0) > 0$$
$$r' = i, \qquad r(0) = 0$$

Bass - SIR

$$s' = -s(p + qi), \qquad s(0) = 1$$
$$i' = s(p + qi) - \gamma i, \qquad i(0) = 0$$
$$r' = \gamma i, \qquad r(0) = 0$$

- הדבקה מתחילה מ-"חולה אפס"
- לאחר מזה, כל ההדבקות הן "פנימיות"
  - מגפות

- אין "חולה אפס"
- יצירה רציפה בזמן של מאמצים חיצוניים (p)
  - מוצרים חדשים

האם ההבדל הזה מהותי?

- מגפה מתפשטת רק אם $R_0 > 1$
- בסוף, לא כולם חולים

- התפשטות לא יכולה להיעצר - בסוף כולם "חולים"
- פרמטרים משפיעים רק על קצב התהליך

השוואה: SIR מול Bass-SIR

SIR

$$s' = -R_0 s i, \qquad s(0) = 1 - i(0)$$
$$i' = i(R_0 s - 1), \qquad i(0) > 0$$
$$r' = i, \qquad r(0) = 0$$

Bass - SIR

$$s' = -s(p + qi), \qquad s(0) = 1$$
$$i' = s(p + qi) - \gamma i, \qquad i(0) = 0$$
$$r' = \gamma i, \qquad r(0) = 0$$

- הדבקה מתחילה מ-"חולה אפס"
- לאחר מזה, כל ההדבקות הן "פנימיות"
  - מגפות

- אין "חולה אפס"
- יצירה רציפה בזמן של מאמצים חיצוניים (p)
  - מוצרים חדשים

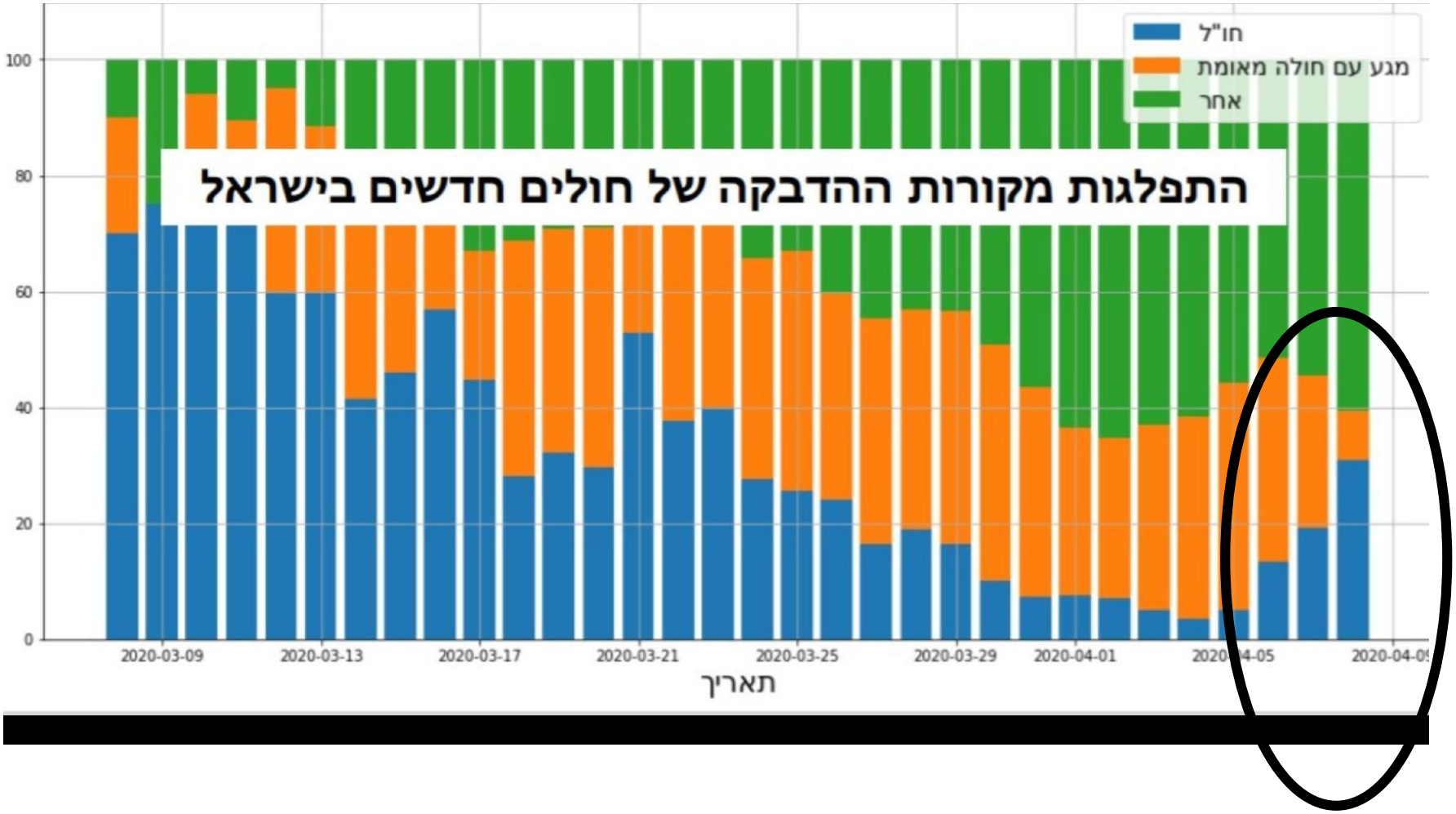
האם ההבדל הזה מהותי?

- מגפה מתפשטת רק אם $R_0 > 1$
- בסוף, לא כולם חולים

- התפשטות לא יכולה להיעצר - בסוף כולם "חולים"
- פרמטרים משפיעים רק על קצב התהליך

איזה מודל נכון לקורונה?

חולים מאומתים חדשים (באחוזים)



השוואה: SIR מול Bass-SIR

SIR

$$s' = -R_0 si, \qquad s(0) = 1 - i(0)$$
$$i' = i(R_0 s - 1), \qquad i(0) > 0$$
$$r' = i, \qquad r(0) = 0$$

- הדבקה מתחילה מ-"חולה אפס"
- לאחר מזה, כל ההדבקות הן "פנימיות"
- מתאר את הקורונה **בסין**

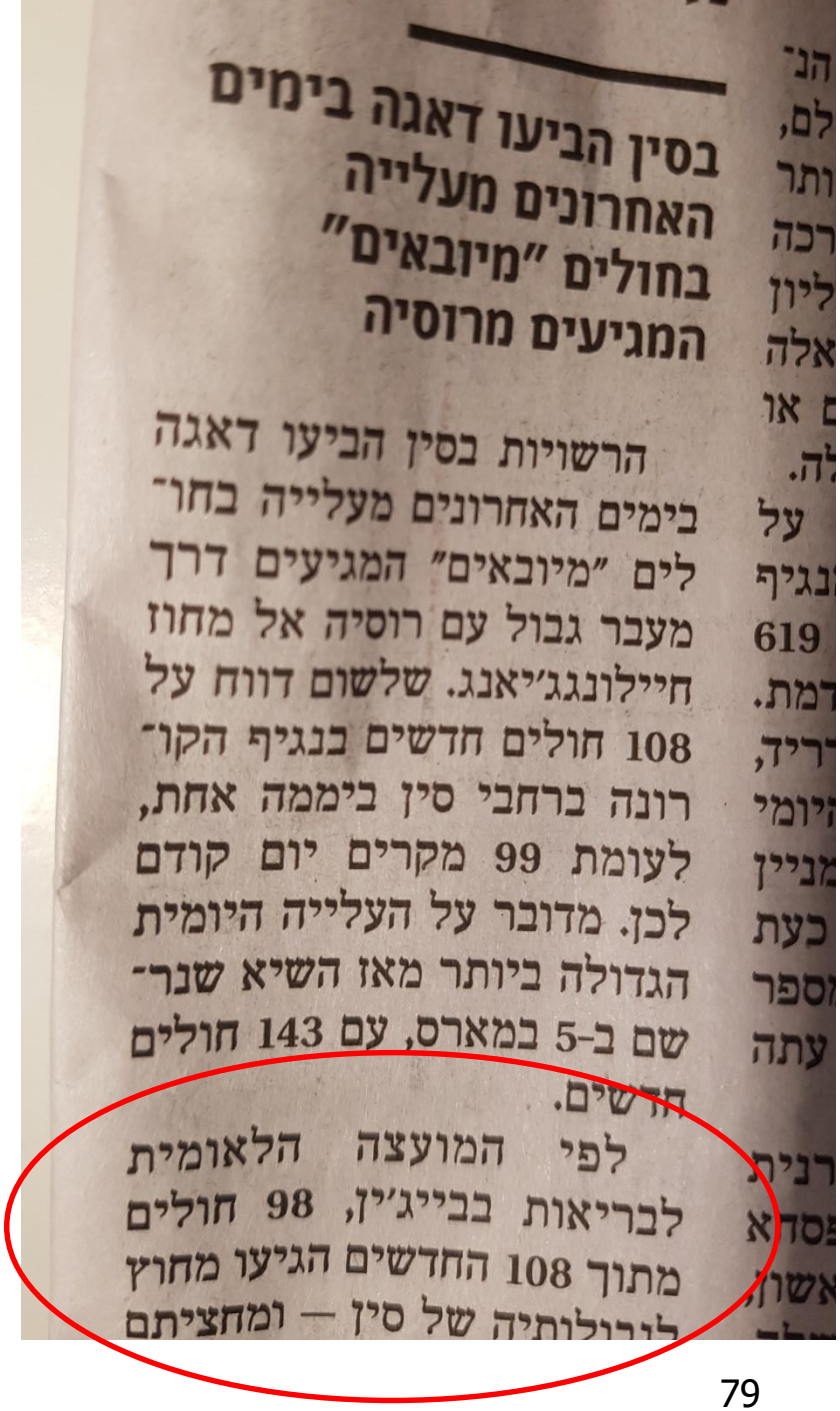
Bass - SIR

$$s' = -s(p + qi), \qquad s(0) = 1$$
$$i' = s(p + qi) - \gamma i, \qquad i(0) = 0$$
$$r' = \gamma i, \qquad r(0) = 0$$

- אין "חולה אפס"
- יצירה רציפה בזמן של מאמצים חיצוניים (p)
- מתאר את הקורונה בישראל

"הארץ" 13.4.2020

כיום, בסין הקורונה הרבה יותר מתאימה ל- Bass-SIR מאשר ל- SIR



בסין הביעו דאגה בימים האחרונים מעלייה בחולים "מיובאים" המגיעים מרוסיה

הרשויות בסין הביעו דאגה בימים האחרונים מעלייה בחו־לים "מיובאים" המגיעים דרך מעבר גבול עם רוסיה אל מחוז חיילונגג'יאנג. שלשום דווח על 108 חולים חדשים בנגיף הקו־רונה ברחבי סין ביממה אחת, לעומת 99 מקרים יום קודם לכן. מדובר על העלייה היומית הגדולה ביותר מאז השיא שנר־שם ב-5 במארס, עם 143 חולים חדשים.

לפי המועצה הלאומית לבריאות בבייג'ין, 98 חולים מתוך 108 החדשים הגיעו מחוץ לבירולותיה של סין — ומחציתם

מודל Bass-SIR יותר "שימושי" ממודל SIR עבור הקורונה בישראל, סין, ארה"ב, ...

- יותר מדויק, כי לוקח בחשבון "ייבוא" חולים מבחוץ
- מאפשר לנתח השפעה של "המדיניות " בנתב"ג על המחלה בישראל
- מאפשר לחזות את ההשפעה של אי הפעלת סגר באוהיו על הקורונה בקליפורניה
- יותר מדויק עבור ניתוח אסטרטגיות יציאה
- ...

מבנה ההרצאה

- מודל SIR למגיפות
- מודל Bass עבור מוצרים חדשים
- מודל Bass-SIR עבור פנלים סולריים+קורונה
- מודל Bass-SIR על גרף

מודל Bass-SIR

- מודל של קבוצות אוכלוסייה (compartmental model)

S(t)
לא מאמצים

→

I(t)
מאמצים
"מדבקים"

→

R(t)
מאמצים
לא "מדבקים"

$$s'(t) = -s\left(p + qi(t)\right), \quad i'(t) = s(t)\left(p + qi(t)\right) - \gamma i(t), \quad r'(t) = \gamma i(t)$$

מודל Bass-SIR

- מודל של קבוצות אוכלוסייה (compartmental model)

S(t)
לא מאמצים

→

I(t)
מאמצים
"מדבקים"

→

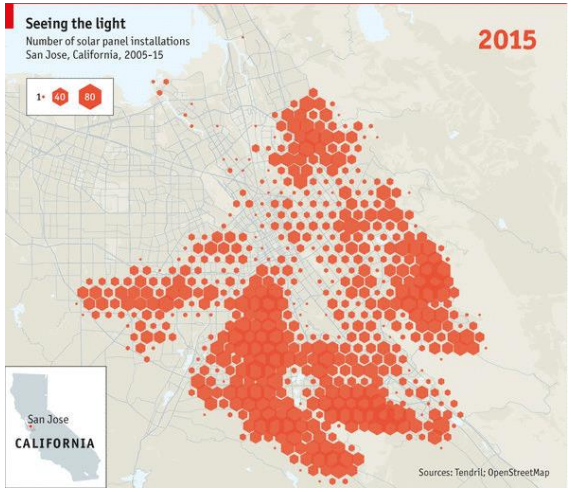
R(t)
מאמצים
לא "מדבקים"

$$s'(t) = -s\left(p + qi(t)\right), \qquad i'(t) = s(t)\left(p + qi(t)\right) - \gamma i(t), \qquad r'(t) = \gamma i(t)$$

הנחה סמויה:

"כל החולים משפיעים על כל הבריאים"

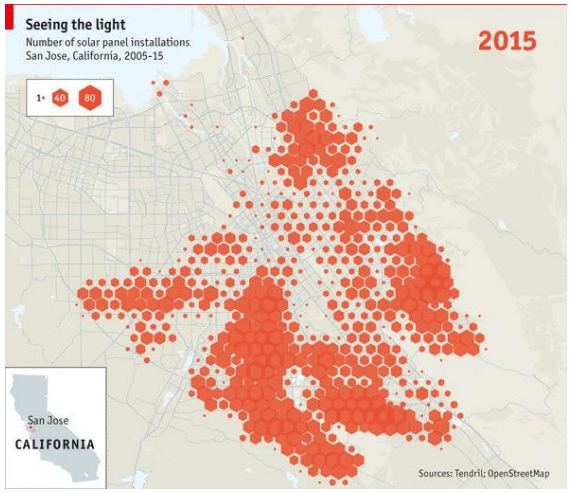
התפשטות של פאנלים סולריים



- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל ההתקנות

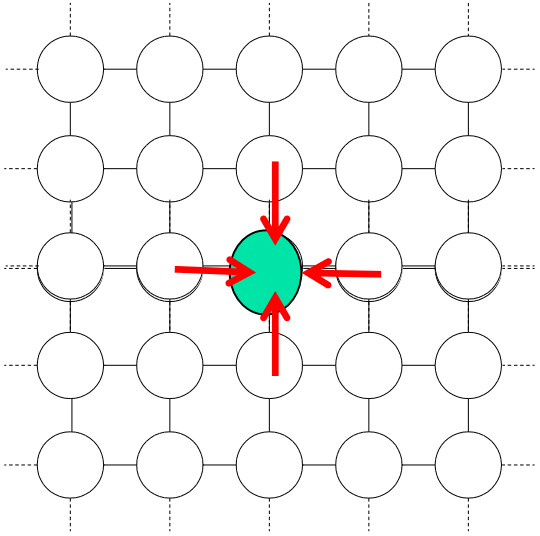
- Bollinger and Gillingham (2012):
המנבא העיקרי להתקנה של פאנל סולרי חדש הוא קיום שכן שכבר התקין פאנל סולרי

התפשטות של פאנלים סולריים



- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל ההתקנות

- Bollinger and Gillingham (2012):
המנבא העיקרי להתקנה של פאנל סולרי חדש הוא קיום שכן שכבר התקין פאנל סולרי



- לכן נשתמש במודל Bass-SIR דו-מימדי, שבו כל קודקוד הוא בית, וכל בית יכול להיות מושפע מהשכנים שלו (שעדיין "מדבקים")

מודל Bass-SIR דו-מימדי

S(t)
לא מאמצים

→

I(t)
מאמצים
"מדבקים"

→

R(t)
מאמצים
לא "מדבקים"

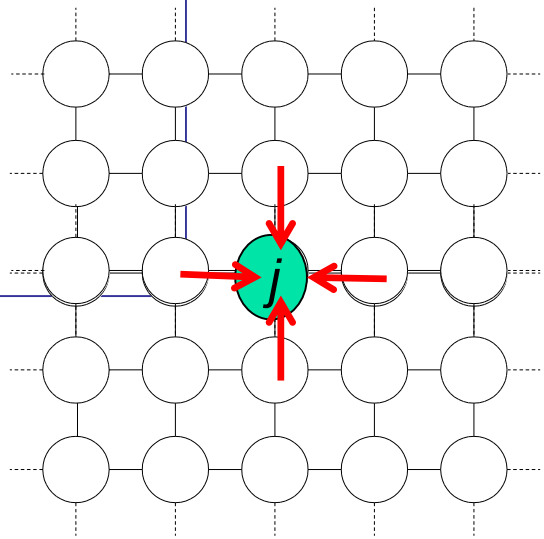
At t_0=0, all nodes j=1,2,…, N are non-adopters

for t_k=dt,2dt,…

$$\text{Prob}\begin{pmatrix} j \text{ adopts at} \\ (t_k, t_k + dt) \end{pmatrix} = pdt + \frac{q}{4}\left(\#\text{ of contagious neighbors of } j \text{ at time } t_k\right)dt$$

$$\text{Prob}\begin{pmatrix} j \text{ recovers at} \\ (t_k, t_k + dt) \end{pmatrix} = rdt$$

end



- כבר לא מודל (דטרמיניסטי) של קבוצות אוכלוסיה
- מודל דיסקרטי סטוכסטי

התפשטות של פאנלים סולריים

- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל ההתקנות

- המנבא העיקרי להתקנה של פאנל סולרי חדש הוא קיום שכן שכבר התקין פאנל סולרי

- לכן נשתמש במודל Bass-SIR דו-מימדי, שבו כל קודקוד הוא בית , וכל בית יכול להיות מושפע מהשכנים שלו (שעדיין "מדבקים")

התפשטות של קורונה

התפשטות של פאנלים סולריים

- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל ההתקנות
- המנבא העיקרי להתקנה של פאנל סולרי חדש הוא קיום שכן שכבר התקין פאנל סולרי
- לכן נשתמש במודל Bass-SIR דו-מימדי, שבו כל קודקוד הוא בית , וכל בית יכול להיות מושפע מהשכנים שלו (שעדיין "מדבקים")

התפשטות של קורונה

- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל החולים
  - קיים, כרגע לא זמין לחוקרים

התפשטות של פאנלים סולריים

- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל ההתקנות

התפשטות של קורונה

- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל החולים
  - קיים, כרגע לא זמין לחוקרים

כמחצית מהחולים בירושלים ובבני ברק הם בני משפחות המתגוררים באותו בית

אהרן רבינוביץ

לכ-56% מחולי הקורונה בבני ברק יש לפחות בן משפחה אחד שגר איתם בבית ונדבק בנגיף — כך מראים נתונים שה־

מוֹל. מתוך כ-1,900 חולי קורונה בבני ברק, העיר עם מספר החו־ לים הגבוה ביותר לנפש בישראל 300 חולים מגיעים מ

שבהם חיים שני חול

מגיעים מבתים עם שלושה חו־

חולים באותו הבית.

בירושלים, ששכונותיה החר־ דיות נמצאות במקום השני במ ספר החולים לנפש, 44% מחול הקורונה הם בני משפחה הגרי באותו הבית: לפי נתונים המעודכ נים לשלשום, מתוך 1,787 חולי בעיר, 783 שייכים ל-273 משפ חות (2.9 נדבקים בכל משפחה

15%) 269 מהחולים

שמונה ואף של 12 חולים בבית

בשתי הערים כשליש מכלל החו־

מסקנה נוספת שעולה מהנתו־ נים בירושלים — וממחישה את האופן שבו מתפשט הנגיף בתוך קהילות — היא כי רבים ממקרי ההדבקה התרחשו בקרב שכנים. נתוני ההדבקה מראים כי דיירי רחובות שלמים בבירה נדבקו בנ־ גיף. כמו בירושלים, גם בבני ברק

התקשתה העירייה להוציא חולים רבים מהעיר, מאחר שרבים מס־ רבים להשאיר מאחור את משפ־

העירייה להוציא מבתיהם חולים עם בני משפחתם הבריאים, ועד כה העבירה העירייה כ-300 בני אדם למלונות לחולי קורונה המו־ תאמים לציבור החרדי.

שלשום הוארך הסגר על 17 שכונות בירושלים, שבה אוכלוס כ-20% מכלל החולים בישראל רוב השכונות שנכללות בסגר חר דיות, ומתגוררים בהן יותר מ-300 אלף מתושבי העיר. המהלך עורר זעם בקרב חלק מהציבור החרדי שרואה בסגר הנקודתי תיוג מגוו

"הארץ" 13.4.2020

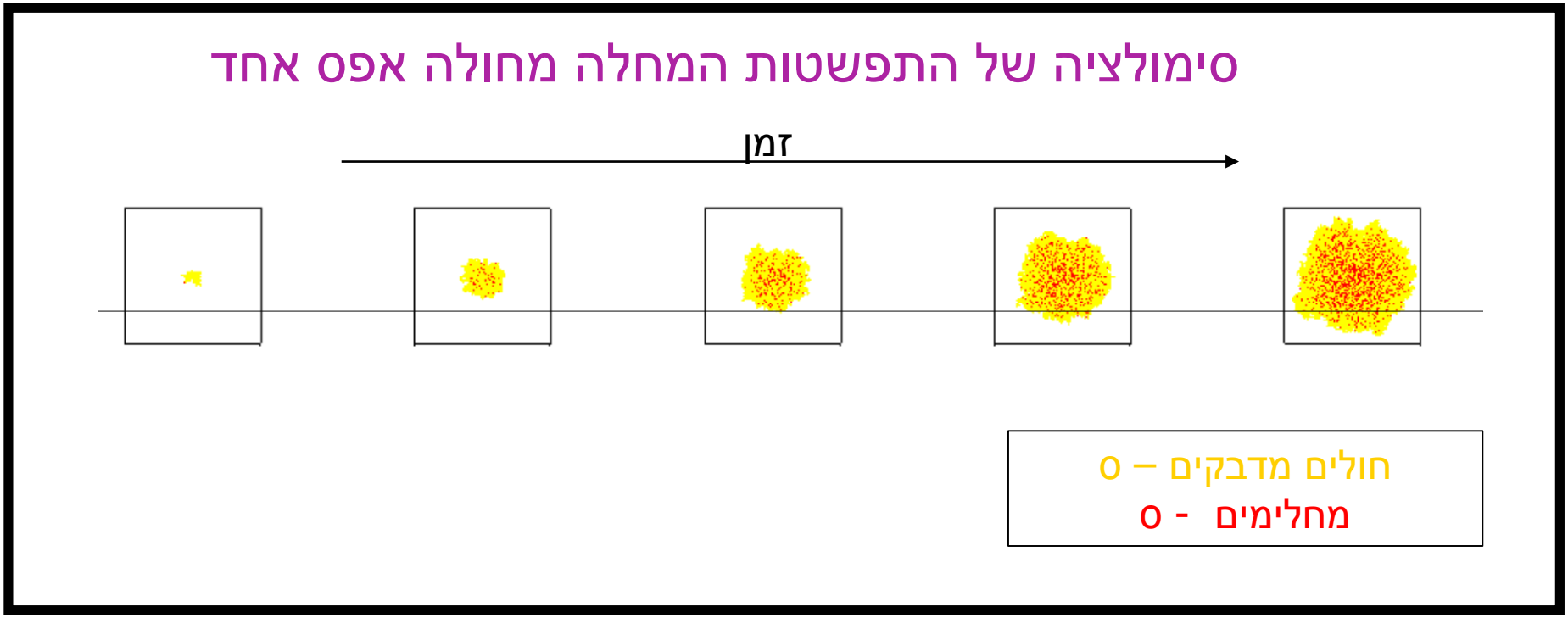
התפשטות של פאנלים סולריים

- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל ההתקנות
- המנבא העיקרי להתקנה של פאנל סולרי חדש הוא קיום שכן שכבר התקין פאנל סולרי
- לכן נשתמש במודל Bass-SIR דו-מימדי, שבו כל קודקוד הוא בית , וכל בית יכול להיות מושפע מהשכנים שלו (שעדיין "מדבקים")

התפשטות של קורונה

- **מאגר נתונים ייחודי**: תאריכים וכתובות של כל החולים
  - קיים, כרגע לא זמין לחוקרים
- המנבא העיקרי להדבקה הוא קיום בן משפחה/שכן חולה
- לכן נשתמש במודל Bass-SIR דו-מימדי, שבו כל קודקוד הוא אדם, וכל אדם יכול להיות מושפע מהשכנים שלו (שעדיין "מדבקים")

מודל Bass-SIR דו-מימדי

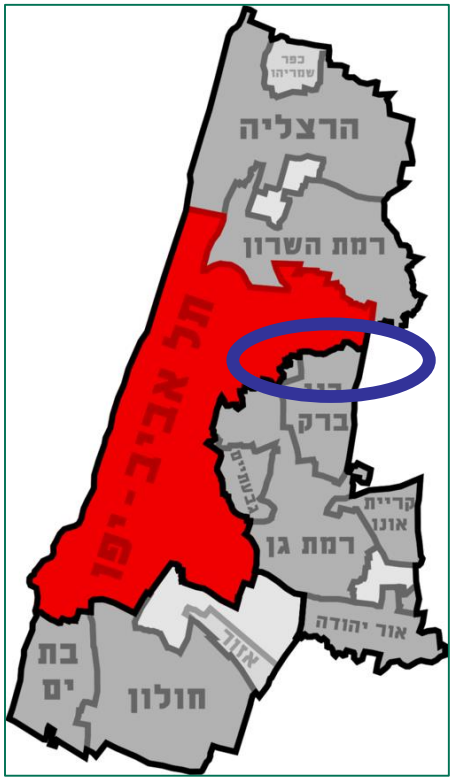


- אפקט מרחבי הוא קריטי לצורך הבנת הדינמיקה בזמן
- התפשטות הקורונה היא תופעה לוקלית, ולכן אסטרטגיות יציאה אופטימליות צריכות לקחת את זה בחשבון

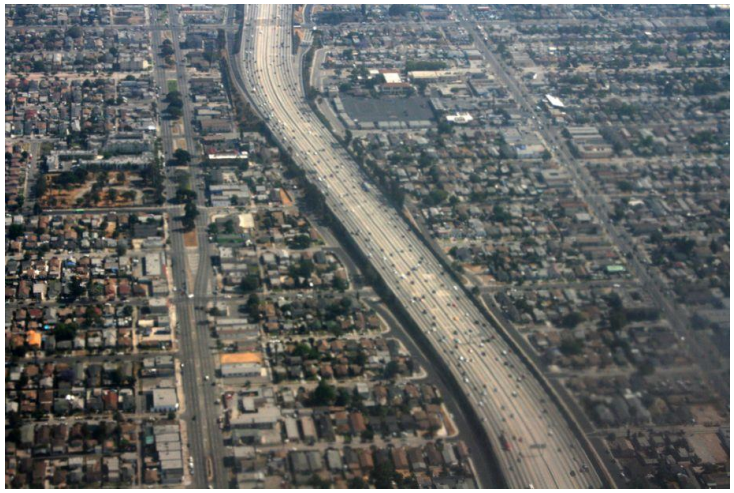
השפעה של שפות (boundaries) על ההתפשטות

גבול חיצוני

גבול מוניציפלי



מכשול פנימי



מודל Bass-SIR דו-מימדי: השפעת שפה עם חור

- למשל, נהר עם גשר , מעבר הולכי רגל מעל נתיבי איילון, ...

תורה קינטית

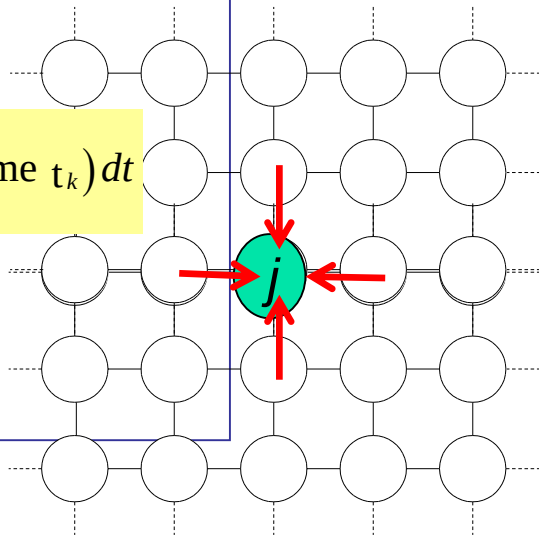
At t_0=0, all nodes j=1,2,…, N are non-adopters

for t_k=dt,2dt,…

$$\text{Prob}\begin{pmatrix} j \text{ adopts at} \\ (t_k, t_k + dt) \end{pmatrix} = pdt + \frac{q}{4}\left(\#\text{ of contagious neighbors of } j \text{ at time } t_k\right)dt$$

$$\text{Prob}\begin{pmatrix} j \text{ recovers at} \\ (t_k, t_k + dt) \end{pmatrix} = rdt$$

end



- מודל בס על גרף הוא דיסקרטי וסטוכסטי
- האם ניתן לקרב על ידי מד"ח דטרמיניסטי?
  - השראה: תנועה בראונית -> משוואת החום

- כן עבור מקרה חד-מימדי – עם Samuel Nordmann
- אתגר – מקרה דו-מימדי
- יישום – "תחזית מזג אויר" עבור הקורונה

מודל Bass-SIR בשירות הקורונה – בעיות פתוחות

- שימוש במודל Bass-SIR של קבוצות אוכלוסיה, לצורך ביצוע תחזיות גלובליות (מדינה) עבור הקורונה
  - השוואה בין מדינות שונות
- שימוש במודל Bass-SIR דו-מימדי, לצורך ביצוע תחזיות לוקליות (עיר, שכונה) עבור הקורונה
  - קליברציה על ידי שימוש בנתוני חולים (תאריכים וכתובות)
- ניתוח אסטרטגיות יציאה בעזרת מודל Bass-SIR
  - **מהי ההגדרה של אסטרטגיה אופטימלית**?
  - שילוב **התגובה של האוכלוסייה** לאסטרטגיה
- הרחבות שונות של המודל
  - שילוב השפעת שכנים עם "ערבוב" במקומות העבודה
  - מערכות מצומדת של 50 משוואות Bass-SIR עבור מדינות של ארה"ב
- ....

מקורות

- Fibich and Gibori, **Operations research** (2010)
  Aggregate diffusion dynamics in agent-based models with a spatial structure

- Fibich, **Phys. Rev. E** (2016)
  Bass-SIR model for diffusion of new products in social networks

- Fibich, **SIAM J. Applied Math** (2017)
  Diffusion of new products with recovering consumers

- Fibich, Levin and Yakir, **SIAM J. Applied Math** (2019)
  Boundary effects in the discrete Bass model

- Fibich and Levin, **Physica A** (2020)
  Percolation of new products

ניתנים להורדה כאן: http://www.math.tau.ac.il/~fibich/publications.html