

בחינה במתמטיקה א' לכלכלנים

ד. גינזבורג, ז. סגל, י. סטאנצסקו

משך המבחן 3 שעות. פתרו 6 שאלות מתוך 7. ערך כל שאלה 17 נקודות. אין להשתמש בכל חומר עזר, לרבות מחשבון.

1. לחשב את הגבולות הבאים:

א.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$$

ב.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x^3}{f(x)}$$

באשר

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & x < -3 \\ -x, & -3 \leq x \leq 1 \\ 3, & x > 1 \end{cases}$$

2. א. לפתור את אי השוויון $|x - 3| > 3x + 2$

ב. להוכיח כי למשוואה $x = e^{-2x}$ יש פתרון ממשי יחיד.

3. א. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע נתון, ונסמן

$$g(x) = \frac{1 + xf(x)}{f(x)}$$

לחשב את $g'(x)$.

ב. נתון כי $f'(x) = (f(x))^2$. להוכיח כי לכל $b > 0$ מתקיים $g(0) = g(b)$.

4. עבור $a \neq b$ נסמן

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{(x - a)(x - b)}$$

נתון כי ל- $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית בנקודה $x = a$ ואין לה אסימפטוטה אנכית בנקודה $x = b$.

א. להוכיח כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות קיצון מקומיות.

ב. מהם הערכים האפשריים עבור המספרים a ו- b ?

5. מהם מימדיו של מלבן בעל השטח הגדול ביותר שניתן לחסום בתחום הכלוא ברביע הראשון על ידי הפונקציה $y = 8 - x^3$ והצירים.

6. תהי $f(x)$ פונקציה המקיימת $f'(x) = e^{x^2}$ וגם $f(0) = 10$. למצוא מספרים a ו- b המקיימים $a < f(1) < b$. יש להוכיח את הפתרון!

7. נסמן

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a, & x \leq 0 \\ ae^x, & 0 < x < 1 \\ aex, & x \geq 1 \end{cases}$$

א. למצוא את כל ערכי a עבורם $f(x)$ רציפה.

ב. למצוא את כל ערכי a עבורם $f(x)$ גזירה.

בהצלחה!