

אלגברה 1 תרגול 1- מרוכבים

סמסטר א', תשע"ג

סימונים:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ קבוצת המספרים הטבעיים.
 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ קבוצת המספרים השלמים.
 $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \right\}$ המספרים הרציונליים.
 \mathbb{R} המספרים הממשיים.
 $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ המספרים המרוכבים.

1.

(א) יהיו $z = 3 + 2i$, $w = -5 + 3i$ חשבו $z \cdot w$ ו $\frac{z}{w}$.

(ב) חשבו $\left| \frac{1}{i} - \frac{4+i}{3+2i} \right|$.

(ג) מצאו את כל השורשים מסדר 4 של $z = -2 - 2\sqrt{3}i$.

(ד) חשבו $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{16} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{2}\right)^{10}$.

(ה) פתרו את המשוואה הריבועית

$$(1 - i)z^2 + (1 + 3i)z + (-4 + 2i) = 0$$

2. הוכיחו את הבאים:

(א) $\overline{z\bar{w}} = \bar{z} \cdot w$

(ב) $|zw| = |z| \cdot |w|$

(ג) השתמשו בזהויות טריגונומטריות בכדי להראות כי

$$(\cos \Theta + i \sin \Theta)(\cos \phi + i \sin \phi) = \cos(\Theta + \phi) + i \sin(\Theta + \phi)$$

(ד) יהיו $z_1 = r_1 e^{i\Theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\Theta_2}$ שני מספרים מרוכבים. הסיקו מהסעיפים הקודמים את כלל הכפל: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\Theta_1 + \Theta_2)}$.

(ה) הראו שאם $z_2 \neq 0$ אז $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\Theta_1 - \Theta_2)}$.

3. הוכיחו כי $z^3 \bar{z} + \bar{z}^3 z$ הוא מספר ממשי לכל $z \in \mathbb{C}$.

4. הוכיחו באינדוקציה שלכל מספר טבעי n מתקיים,

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

5. חשבו את $A \cup B$ ואת $A \cap B$:

$$A = \{1, \frac{1}{2}, 2\}, \quad B = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\} \quad (\text{א})$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x < 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 5\} \quad (\text{ב})$$

6. הוכיחו

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$