אלגברה לינארית 1א - תרגיל 3

11 בנובמבר 2014

1. תהי $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה ריבועית.
   א. הראו כי אם לכל $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים $AB = BA$ אזי בהכרח B מטריצה סקלארית, כלומר $B = \lambda I_n$.
   ב. הראו כי לכל $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

2. כיפלו (אם אפשר) את המטריצות A,B:

(א) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} AB = ?$$

(ב) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} AB = ?,\ BA = ?$$

3. עבור מטריצות ריבועיות A, Bמסדר n,הוכיחו\הפריכו את הטענות הבאות:

(א) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(ב) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$

(ג) $\forall p, q \in \mathbb{N},\ A^pA^q = A^{p+q}$

4. מצאו את קבוצות הפתרונות של מערכות המשוואות הלינאריות הבאות מעל הממשיים, הנתונות בתצוגה מטריציונית $(A|b)$:

א. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & 21 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

ב. $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. קבעו לאילו ערכי $a, b \in \mathbb{F}$ קיימים למערכות הבאות פתרון יחיד, אפס פתרונות או אינסוף פתרונות. אם קיימים פתרונות מצאו אותם.

א. $(\mathbb{F} = \mathbb{R})$ $$\begin{cases} 2x_1 + ax_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 - 3x_3 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 &= -1 \end{cases}$$

ב. $(\mathbb{F} = \mathbb{C})$ $$\begin{cases} ix - ay &= 0 \\ bx + iy &= 1 \end{cases}$$

6. מישור נתון על ידי משוואה מהצורה $ax+by+cz+d=0$, כאשר הנקודות השייכות למישור הן בדיוק אלו הפותרות את המשוואה. מצאו את משוואת המישור העובר בנקודות $(-5,1,4)$, $(1,2,0)$, $(-2,1,1)$.

7. יהיו $A_1, A_2 \in Mat_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצות מאותו הסדר ויהיו $A_1\mathbf{x}=\mathbf{b_1}$ ו־ $A_2\mathbf{x}=\mathbf{b_2}$ מערכות משוואות לינאריות כך שלשתיהן פתרון, ומתקיים שקבוצת הפתרון בשתי המערכות זהה. הוכיחו כי לשתיהן צורה מדורגת קנונית זהה.

8. עבור מטריצה ריבועית מסדר n נגדיר את העקבה (באנגלית **trace**) של המטריצה להיות סכום איברי האלכסון הראשי. במילים אחרות,

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}[A]_{ii}$$

הוכיחו:

(א) עבור שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר A, B מתקיים $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.

(ב) תהיינה המטריצות $C_{m\times n}$ ו $D_{n\times m}$. אז $tr(CD)=tr(DC)$