

בחינה באלגברה לינארית 1 א

דוד גינזבורג

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בכל חומר עזר לרבות מחשבונים. לכל השאלות ניקוד שווה. בשאלה בה יש יותר מסעיף אחד, אם לא צויין אחרת, לכל סעיף ניקוד שווה. יש לנמק הייטב את דרך הפיתרון.

שאלה 1: עבור אלו מספרים ממשיים a ו- b , למערכת הבאה

$$ax + y + bz = 1$$

$$-x + 3y - z = 1$$

$$x - y + 3z = 1$$

יש אין סוף פתרונות.

שאלה 2: יהי $f(x)$ פולינום מעל הממשיים שדרגתו היא n . להוכיח כי לכל פולינום ממשי $g(x)$ שדרגתו היא לכל היותר n , קימים מספרים ממשיים $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך שמתקיים

$$g(x) = \alpha_0 f(x) + \alpha_1 f^{(1)}(x) + \dots + \alpha_{n-1} f^{(n-1)}(x) + \alpha_n f^{(n)}(x)$$

כאן $f^{(i)}(x)$ הינה הנגזרת ה- i ית של $f(x)$.

שאלה 3: תהי A מטריצה ממשית מסדר שתיים, ונניח כי קיים מספר ממשי $a > 0$ כך שמתקיים

$$|A^2 + aI| = 0$$

(א) להוכיח כי קיים וקטור $v \in \mathbb{R}^2$ השונה מאפס כך שמתקיים $(A^2 + aI)v = 0$.

(ב) להוכיח כי הקבוצה $\{v, Av\}$ הינה קבוצה בלתי תלויה לינארית.

(ג) לרשום את $|A|$ בצורה מפורשת באמצעות a .

שאלה 4: תהי $T : Mat_{n \times n}(F) \rightarrow Mat_{n \times n}(F)$ העתקה המוגדרת על ידי $T(A) = A + aA^t$

כאן F הינו שדה ו- $a \in F$.

(א) להוכיח כי אם $a \neq \pm 1$ אז T הינו איזומורפיזם.

(ב) לתת נוסחה מפורשת עבור T^{-1} .

שאלה 5: תהי $v \cdot u$ המכפלה הפנימית הסטנדרטית המוגדרת על \mathbb{R}^n באופן הבא. אם

$v = (x_1, \dots, x_n)$ ו- $u = (y_1, \dots, y_n)$ אז $v \cdot u = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. תהי A מטריצה ממשית מסדר

n . להוכיח כי $(v, u) = (Av) \cdot (Au)$ מגדירה מכפלה פנימית מעל \mathbb{R}^n אם ורק אם $\text{rank} A = n$.

בהצלחה!