

תורת הקבוצות – תרגיל בית 2

1. נניח כי $0 < |A| \leq |B|$. הוכיחו כי קיימת פונקציה מ- B על A .
2. נניח כי יש פונקציה מ- B על A , הוכיחו כי אז $2^{|A|} \leq 2^{|B|}$.
3. נניח כי $\langle P, \leq \rangle$ קבוצה בעלת סדר קוי ויש בת תת-קבוצה צפופה בת-מניה. הוכיחו כי אז $|P| \geq 2^{\aleph_0}$.
4. נתבונן ב- $\langle P(\mathbb{N}), \subset \rangle$, אוסף התת-קבוצות של טבעיים, סדורה עפ"י הכלה. הוכיחו או הפריכו:
 - 4.1. $\langle P(\mathbb{N}), \subset \rangle$ סדורה בסדר חלקי.
 - 4.2. נגדיר יחס דו-מקומי: לכל $x, y \in P(\mathbb{N})$, $x \sim y$ אם"מ $(x \subset y) \vee (y \subset x)$. טענה: $\sim$ הוא יחס שקילות על $P(\mathbb{N})$.
 - 4.3. קיימת $A \subset P(\mathbb{N})$ מעוצמה $\aleph_0$ כך ש- $\langle A, \subset \rangle$ סדורה בסדר מלא.
 - 4.4. קיימת $B \subset P(\mathbb{N})$ מעוצמה $2^{\aleph_0}$ כך ש- $\langle B, \subset \rangle$ סדורה בסדר מלא.
5. סדרות אינסופיות של טבעיים.
 - 5.1. מה עוצמת משפחת הפונקציות החד-חד-ערכיות מ- $\mathbb{N}$ ל- $\mathbb{N}$? נמקו.
 - 5.2. מה עוצמת משפחת הפונקציות החד-חד-ערכיות מ- $\mathbb{N}$ על $\mathbb{N}$? נמקו.
6. נניח כי $B \subset A$ קבוצות שונות, ו- $|B| = |A|$. הוכיחו כי אז A מכילה תת-קבוצה בת-מניה.
7. נניח כי $B \subseteq A$, $|B| = \aleph_0$ ו- $A \setminus B$ מכילה קבוצה בת מניה. הוכיחו כי אז $|A| = |A \setminus B|$.