

תורת הקבוצות – תרגיל בית 5

1. נניח כי $\langle A, \leq \rangle$ סדורה קווית. הראו כי לכל אוסף של תת-קבוצות סופיות ולא ריקות של A יש פונקציה בחירה.
2. (AC) תהי $\langle A, \leq \rangle$ סדורה קווית. הוכיחו כי " $\leq$ " הוא סדר טוב אמ"מ אין ב- A סדרה אינסופית יורדת.
3. (AC) הוכיחו כי כל סדר חלקי על A ניתן להמשכה לסדר קוי.
4. (AC) נניח כי B קבוצה אינסופית, $B \supseteq A$ ו- $|B| > |A|$, הראו כי אז $|B - A| = |B|$.
5. $P(X) \supseteq F$ נקרא מסנן (Filter) על X אמ"מ :
 - א. $\emptyset \notin F, X \in F$
 - ב. $X_1, X_2 \in F$ גורר $X_1 \cap X_2 \in F$ ("סגירות לחיתוכים סופיים")
 - ג. $X_1 \in F$ ו- $X \supseteq X_2 \supseteq X_1$ גורר $X_2 \in F$ ("סגירות כלפי מעלה ביחס להכלה")אם בנוסף מתקיים גם התנאי הבא, F נקרא על-מסנן (Ultrafilter) :
 - ד. לכל $Y \in F, X \supseteq Y$ או $X \setminus Y \in F$.
- (AC) הראו כי כל מסנן על X ניתן להרחיב לעל-מסנן.
6. מסננים על הממשיים.
 - 6.1. יהי r מספר ממשי, בדקו כי $\{Y \subseteq \mathbb{R} \mid r \in Y\}$ הוא על-מסנן על $\mathbb{R}$.
 - 6.2. (AC) תנו דוגמה לעל-מסנן לא-טריביאלי על $\mathbb{R}$, כלומר על-מסנן $P(\mathbb{R}) \supset F$ כך שלכל $r \in \mathbb{R}, \{r\} \notin F$.