

תורת הקבוצות – תרגיל בית 6

1. נניח כי $\aleph_\alpha$ הוא מונה חריג וקיימים λ, β כך שלכל γ מתקיים $\aleph_\beta \leftarrow \alpha > \gamma \geq \lambda$, $2^{\aleph_\gamma} = \aleph_\beta$, הוכיחו אז כי גם $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_\beta$.

2. הוכיחו כי לכל $\alpha \leq \beta$ מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$.

3. הוכיחו כי לכל $\alpha \geq \beta$ מתקיים $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = |S|$, עבור $S = \{X \subseteq \omega_\alpha \mid \aleph_\beta = |X|\}$.

4. הוכיחו כי לכל α, β מתקיים $\aleph_\alpha^{cf(\aleph_\beta^{\aleph_\alpha})} > \aleph_\alpha$.

5. נניח GCH (כלומר כי לכל מונה κ מתקיים $2^\kappa = \kappa^+$), הוכיחו אז כי לכל מונה $\aleph_\alpha$ סדיר מתקיים:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \beta < \alpha \\ \aleph_{\beta+1} & \beta \geq \alpha \end{cases}$$

6. נניח GCH .

הוכיחו אז כי לכל מונה $\aleph_\alpha$ חריג מתקיים:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_\alpha & \aleph_\beta < cf(\aleph_\alpha) \\ \aleph_{\alpha+1} & cf(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \\ \aleph_{\beta+1} & \aleph_\beta \geq \aleph_\alpha \end{cases}$$

7. הוכיחו נוסחת האוסדורף (Hausdorff):

לכל α, β מתקיים $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \cdot \aleph_{\alpha+1}$.