

תורת הקבוצות – תרגיל בית 7

הגדרות : בתרגיל-בית 5 הוגדר מבנה של מסנן.

נניח κ מונה סדיר $\aleph_0 < \aleph_\kappa$, ומסנן F על κ . נניח מונה $\lambda \geq \kappa$.

F ייקרא λ -שלם, אם סגור תחת פחות מ- λ חיתוכים, כלומר: $\forall D \subset F. |D| < \lambda \rightarrow \bigcap D \in F$.

F ייקרא מסנן עדין, אם מכיל את כל הסייפות, כלומר: לכל $\kappa > \alpha$, $X_\alpha = \{\beta \mid \alpha < \beta < \kappa\} \in F$.

F ייקרא מסנן נורמלי אם הוא עדין, κ -שלם וסגור תחת חיתוך אלכסוני, כלומר:

$$\forall D \subset F. |D| = \kappa \rightarrow \Delta D \in F$$

1. נניח κ מונה סדיר $\aleph_0 < \aleph_\kappa$, הוכיחו כי $\kappa \supset S$ ($\phi \notin S$) שבת אמ"מ כל פונקציה

דוחסת $\kappa \rightarrow S$, $f: S \rightarrow \kappa$, קבועה על תת-קבוצה לא חסומה של S .

2. נניח κ מונה סדיר $\aleph_0 < \aleph_\kappa$. תהי $S \supseteq \{\alpha < \kappa \mid cf(\alpha) = \aleph_0\}$ שבת,

הוכיחו כי ניתן לפרק את S ל- κ תת-קבוצות שבת זרות.

(רמז: נשתמש בהוכחת משפט Ulam, אבל במקום $f_\beta: \aleph_0 \rightarrow \beta$ על,

נקח $f_\beta: \aleph_0 \rightarrow \beta$ חח"ע, עולה ולא-חסומה).

3. נניח U על-מסנן κ -שלם, לא טריוואלי על κ . נגדיר יחסים $\equiv$ ו- $<$ על ${}^\kappa \kappa$.

3.1. $\forall f, g \in {}^\kappa \kappa$ נגדיר $f \equiv g$ אם"מ $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U$.

הראו כי $\equiv$ יחס שקילות.

3.2. $\forall f, g \in {}^\kappa \kappa$ נגדיר $f < g$ אם"מ $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) < g(\alpha)\} \in U$.

הראו כי $<$ סדר-טוב על מחלקות השקילות.

4. בסימוני שאלה 3, תהי $h \in {}^\kappa \kappa$ הפונקציה הקטנה ביותר כך שלכל $\kappa > \gamma$ מתקיים

$$V = \{X \subseteq \kappa \mid h^{-1}[X] \in U\}.$$

הוכיחו כי V על-מסנן נורמלי על κ .

5. נניח F מסנן נורמלי על κ .

5.1. הוכיחו כי $F \supseteq CUB(\kappa)$.

5.2. הסיקו כי כל קבוצה ב- F היא שבת.

6. יהי U על-מסנן נורמלי על κ . הראו כי:

6.1. לכל $\kappa > \delta$, $\{\alpha < \kappa \mid cf \alpha = \delta\} \notin U$,

6.2. $\{\alpha < \kappa \mid \alpha \text{ is strongly inaccessible}\} \in U$.

7. עבור היחס סדר הטבעי על הסודרים:

7.1. נניח סל"ח $\omega_1 \geq C$, הוכיחו כי לכל $\omega_1 > \alpha$ קיימת $C \supseteq A$ סגורה מטיפוס סדר α .

7.2. נניח קב' שבת $\omega_1 \geq S$, הוכיחו כי לכל $\omega_1 > \alpha$ קיימת $S \supseteq A$ סגורה מטיפוס סדר α .