TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES בית הספר למדעי המתמטיקה

אלגברה ב' 1

מערכי שעור

תשע"ב

נערך על ידי

דן הרן

עדכון אחרון: 9.5.2012

ספרות מומלצת

ככלל מספיק להעזר בסיכומי ההרצאות שילכו ויתפרסמו בהמשך לדף זה. אך מומלץ להציץ גם בספרים:

- D.J.S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Springer-Verlag
- J.J. Rotman, *Introduction to the Theory of Groups*, Springer
- *מבנים אלגבריים* של האוניברסיטה הפתוחה.

1. מבנים אלגברים ופעולות.

הגדרה (לא פורמלית) 1.1: **מבנה אלגברי** הוא מערכת הבנויה משלושה רכיבים:

(א) קבוצה לא ריקה,

(ב) פעולות,

(ג) חוקים שהפעולות מקיימות.

דוגמה 1.2: $\mathbb{R}$ (מספרים ממשיים), עם

פעולת החיבור ופעולת הכפל,

וחוקים: חילופיות של החיבור ושל הכפל, חוק הפילוג, ועוד.

אנו נדון רק במבנים עם פעולות בינריות (אחת או שתים לכל היותר):

הגדרה 1.3: **פעולה בינרית** על קבוצה S היא העתקה $\pi\colon S\times S\to S$. למשל פעולת החיבור על $\mathbb{R}$ היא ההעתקה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $(a,b)\mapsto a+b$. **סימון פעולה:** אם π היא פעולה על S, בד"כ במקום $\pi(a,b)=c$ רושמים $a\pi b=c$, כאשר במקום אותיות כגון π בוחרים בסימנים כגון $+,\cdot,\circ$, או אפילו ־ וכך נעשה בד"כ ־ בלי סימן, כגון הרישום $ab=c$ בכפל ב־$\mathbb{R}$.

הגדרה 1.4: חוקים. יש הרבה חוקים אפשריים. נדון בחשובים שבהם, שיש להם הרבה ישומים: תהי S קבוצה לא ריקה עם פעולה בינרית (בלי סימן).

חוק החילוף (קומוטטיביות): אם מתקיים $ab=ba$ לכל $a,b\in S$.

חוק הצירוף (אסוציאטיביות): אם מתקיים $(ab)c=a(bc)$ לכל $a,b,c\in S$.

דוגמה 1.5: תהי X קבוצה, ונגדיר פעולה בינרית $\circ$ על הקבוצה $\{f\colon X\to X\}$ על ידי $(f\circ g)(x)=f(g(x))$. פעולה זו (הרכבה) בד"כ אינה חלופית (בדוק!), אך היא אסוציאטיבית:

$$((f\circ g)\circ h)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x))),$$

$$(f\circ(g\circ h))(x)=f((g\circ h)(x))=f(g(h(x))).$$

טענה 1.5: *אם על S פעולה אסוציאטיבית $\circ$, אז מתקיים על S*

חוק הצירוף המורחב: *יהי $n\geq 2$, $a_1,a_2,\dots,a_n\in S$, אז סדר בצוע הפעולות בחישוב הביטוי $a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_n$ אינו משנה את התוצאה. (כלומר ־ היות והסוגריים בסה"כ מורים על סדר בצוע הפעולות ־ אפשר לוותר על הסוגריים בביטוי זה).*

הוכחה: עבור $n=2$ זה ברור, כי יש רק פעולה אחת. (מקרה $n=3$ הוא חוק הצירוף הרגיל.) נניח באינדוקציה כי הטענה נכונה לגבי ביטויים עם m גורמים, לכל $m<n$. אם נבצע את הפעולות ב־$a_1\circ a_2\circ\cdots\circ a_n$

באפן כזה שהפעולה האחרונה תהיה זו שסימנה בין a_k לבין a_{k+1} באשר $1 \leq k < n$ אז נקבל את התוצאה $(a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k) \circ (a_{k+1} \circ \cdots \circ a_n)$ (לפי הנחת האינדוקציה אין צורך לכתוב סוגריים נוספים). לכן עלינו להוכיח לכל $1 \leq k, l < n$

$$(1) \qquad (a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k) \circ (a_{k+1} \circ \cdots \circ a_n) = (a_1 \circ a_2 \circ \cdot \circ a_l) \circ (a_{l+1} \circ \cdots \circ a_n).$$

בה"כ $k < l$, ונסמן $u = a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_k,\ v = a_{k+1} \circ \cdots \circ a_l,\ w = a_{l+1} \circ \cdots \circ a_n$. לפי הנחת האינדוקציה, (1) שקול ל־ $u \circ (v \circ w) = u \circ (v \circ w)$, וזה נכון לפי חוק הצירוף הרגיל. ∎

הגדרה 1.6: $e \in S$ נקרא **ניטרלי** (גם: **אבר יחידה**) ביחס לפעולה על S אם $ea = ae = a$ לכל $a \in S$. אם הוא קיים, הוא יחיד: אכן, אם גם e' ניטרלי אז $e = ee' = e'$.

דוגמאות 1.7: 1 ניטרלי ביחס לכפל ב־ $\mathbb{R}$ ($\mathbb{N}$), 0 ניטרלי ביחס לחיבור ב־$\mathbb{R}$ ($\mathbb{Z}$), העתקת הזהות ניטרלית ביחס להרכבה ב־$\{f\colon X \to X\}$.

הגדרה 1.8: תהי S קבוצה עם פעולה בינרית אסוציאטיבית ועם אבר ניטרלי $e \in S$. אבר $a \in S$ נקרא **הפיך** אם קיים $b \in S$ כך ש־$ab = ba = e$. אבר b כזה הוא יחיד (אם גם $ab' = b'a = e$ אז $b = be = bab' = eb' = b'$) והוא ייקרא **ההופכי** של a ויסומן a^{-1}.

דוגמאות 1.9: כל אבר שונה מ־0 ב־$\mathbb{R}$ הפיך ביחס לכפל ב־$\mathbb{R}$. כל אבר ב־$\mathbb{R}$ הפיך ביחס לחיבור ב־$\mathbb{R}$ וההופכי של a הוא $-a$. פונקציה f ב־$\{f\colon X \to X\}$ הפיכה אמ"ם היא חח"ע ועל.

הגדרה 1.10: **אגודה** (semigroup) היא קבוצה לא ריקה עם פעולה בינרית אסוציאטיבית.

מונואיד היא אגודה עם אבר ניטרלי. **חבורה** (group) היא מונואיד בו כל אבר הפיך.

כלומר, **חבורה** היא קבוצה לא ריקה עם פעולה בינרית אסוציאטיבית, בה יש אבר ניטרלי וכל אבר הוא הפיך.

חבורה נקראת **חילופית** (גם: **אַבֶּלית**) אם הפעולה חילופית.

דוגמאות של חבורות 1.11:

(א) $\{1\}$, $\{\pm 1\}$ עם פעולת הכפל.

(ב) $\mathbb{Z}$ (הפעולה $+$, האבר הניטרלי 0, ההופכי של n הוא $-n$). אם G חבורה חלופית עם פעולה שמסומנת $+$ אז האבר הניטרלי נקרא אבר האפס (סימון: 0), וההופכי נקרא הנגדי (סימון: $-a$).

(ג) החבורה החבורית F^+ והחבורה הכפלית $F^\times$ של F של שדה F, למשל, $F = \mathbb{R}$.

(ד) החבורה החיבורית של $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (של השאריות של שלמים לאחר חילוק ב־n). נפרט בפרק הבא.

(ה) חבורת המטריצות ההפיכות מסדר $n \times n$ מעל $\mathbb{R}$, או ־ באופן כללי יותר ־ מעל שדה כלשהו F. תסומן $\mathrm{Gl}_n(F)$.

(ו) **חבורת התמורות** של קבוצה X $S(X)=\{f\colon X\to X \mid f \text{ חח"ע ועל}\}$ עם פעולת ההרכבה, כלומר: $(\alpha\circ\beta)(x)=\alpha(\beta(x))$.

(ז) **החבורה הסימטרית** S_n: חבורת התמורות של $\{1,\dots,n\}$.

סימון של תמורה: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$ - מסמן את התמורה $i\mapsto k_i$. כך, למשל, S_3 היא

$$\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}.$$

ומתקיים

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}.$$

חישוק $(a_1a_2\dots a_r)$ –באשר $a_1,\dots,a_r\in\{1,\dots,n\}$ שונים זה מזה –היא התמורה שמעתיקה את a_1 ל־a_2, את a_2 ל־a_3, $\dots$, את a_{r-1} ל־a_r, את a_r ל־a_1, ואת כל שאר האברים לעצמם.

(ח) אם G,H שתי חבורות, אז $G\times H$ עם הפעולה לפי הקואורדינטות $(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1g_2,h_1h_2)$ היא חבורה. בפרט, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ נקראת **חבורת קליין**.

הגדרה 1.12: יהיו G,H מבנים אלגבריים. העתקה $\varphi\colon G\to H$ נקראת **הומומורפיזם** אם היא שומרת את הפעולות המתאימות, כלומר (אם הפעולות הן כפל וחיבור)

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b) \qquad \text{לכל } a,b\in G$$

$$\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b) \qquad \text{לכל } a,b\in G$$

הומומורפיזם $\varphi\colon G\to H$ נקרא **איזומורפיזם** אם הוא חח"ע ועל.

דוגמה 1.13: $\psi\colon S_2\to\{\pm1\}$ הנתונה על ידי $1\mapsto +1$, $(12)\mapsto -1$ היא איזומורפיזם חבורות.

$\psi\colon S_3\to\{\pm1\}$ הנתונה על ידי $1,(132),(123)\mapsto +1$, ו־ $(12),(23),(31)\mapsto -1$ היא הומומורפיזם חבורות.

תרגיל 1.14 (חוק הצמצום): *תהי G חבורה ויהיו $a,b\in G$. אם $ab=ac$ או $ba=ca$ אז $b=c$.*

הוכחה: הכפל את השויון הנתון ב־ a^{-1} משמאל (מימין).

למה 1.15: *יהי $\varphi\colon G\to H$ הומומורפיזם חבורות. אזי*

(א) $\varphi(e_G)=e_H$, *באשר $e_G\in G$, $e_H\in H$ הם אברי היחידה.*

(ב) $\varphi(g^{-1})=(\varphi(g))^{-1}$ *לכל $g\in G$.*

הוכחה:

(א) $\varphi(e_G)\varphi(e_G)=\varphi(e_Ge_G)=\varphi(e_G)=e_H\varphi(e_G)$, ולאחר הצמצום $\varphi(e_G)=e_H$.

(ב) $\varphi(g^{-1})\varphi(g)=\varphi(g^{-1}g)=\varphi(e_G)=e_H$, לכן $\varphi(g^{-1})=(\varphi(g))^{-1}$.

למה 1.16: *יהי $\varphi\colon G \to H$ איזומורפיזם של מבנים אלגבריים. אזי ההעתקה ההפוכה $\varphi^{-1}\colon H \to G$ אף היא איזומורפיזם.*

הוכחה: [נזכיר מתורת הקבוצות: ההעתקה ההפוכה $\varphi^{-1}\colon H \to G$ של העתקת קבוצות $\varphi\colon G \to H$ מוגדרת כאשר φ חח"ע ועל, וזאת באפן הבא: $\varphi^{-1}(h)$ הוא האבר היחיד של G המקיים $\varphi(\varphi^{-1}(h)) = h$. מתקיים: $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1_H$, $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_G$, באשר $1_G, 1_H$ הן העתקות הזהות של G, H, בהתאמה.]

$$\varphi(\varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2)) = \varphi(\varphi^{-1}(h_1))\varphi(\varphi^{-1}(h_2)) = h_1h_2 = \varphi((\varphi^{-1}(h_1h_2)),$$

לכן, בגלל ש-φ חח"ע, $\varphi^{-1}(h_1h_2) = \varphi^{-1}(h_1)\varphi^{-1}(h_2)$. ∎

2. משחק המחשבת (שעשעון עם חבורת קליין)

משחק המחשבת (solitaire, solitary) משוחק על ידי שחקן אחד, בעזרת 32 כלי משחק זהים, על גבי לוח עץ בו יש 33 חורים (ראה התרשים למטה בצד **ימין**). במצב ההתחלתי יש כלי בכל חור (מסומן על ידי עיגול מלא) פרט לחור באמצע (מסומן בתרשים על ידי עיגול ריק).

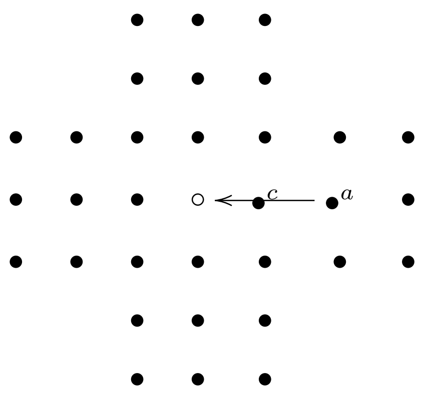
מהלך המשחק: בכל מצב במשחק יכול השחקן להעביר כלי אחד שני חורים ימינה, שמאלה, קדימה או אחורה, בתנאי שהחור החדש פנוי והחור מעליו הכלי עבר — תפוס. מיד לאחר מכן חייב השחקן לסלק מהלוח את הכלי שמעליו הוא עבר. (כך למשל, בהתחלה יכול השחקן להעביר את הכלי המסומן a לחור באמצע ולסלק את הכלי c מהלוח.) בכך קטן מספר הכלים על הלוח ב־1 אחרי כל מהלך.

מטרת המשחק: להגיע לכמה שפחות כלים על הלוח. ציון השחקן הוא, לפי יצרן אחד,

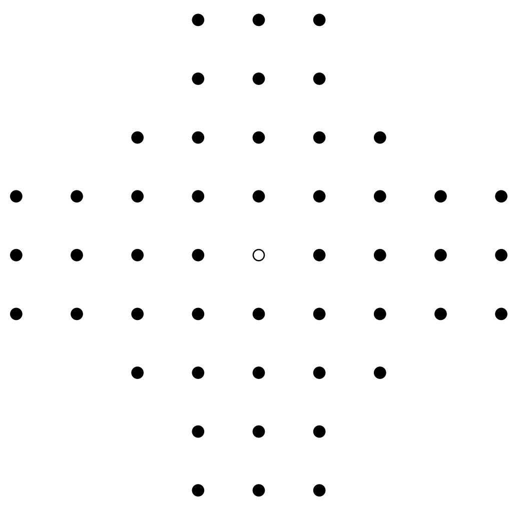
גאון — אם נשאר כלי אחד על גבי הלוח והוא בחור המרכזי,

מצוין — אם נשאר כלי אחד על גבי הלוח, אך לא במרכז,

טוב מאד — אם נשארו שני כלים על גבי הלוח.



המשחק המקורי



הגרסה המשופרת

בשנות השמונים(?) של המאה הקודמת החליט יצרן משחקים מסוים להוציא גרסה חדשה ומתוחכמת יותר של המשחק. היה מדובר באותם הכללים כמו במשחק המקורי, רק שהלוח היה יותר מסובך — ראה התרשים לעיל מצד שמאל.

על החידוש למדתי לראשונה בתכנית הטלויזיה "כלבוטק" (הישנה), שם הופיע אלי אלחדף, מי שהיה אז דוקטורנט (או מסטרנט?) אצלנו והיום הנו פרופסור בטכניון. הוא ניסה להסביר לקהל הצופים מדוע כלל אי אפשר לסיים את המשחק "המשופר" עם כלי אחד, באמצע או לא באמצע!

כיצד הוא הגיע למסקנה זו?

לצורך ההסבר נתבונן בחבורת קליין. זוהי החבורה $K = \{1, a, b, c\}$ מסדר 4 עם לוח הכפל הבא:

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

כלומר: K חילופית, $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ ומכפלת כל שנים מבין a, b, c נותנת את השלישי. (בדוק ש־K אכן חבורה.)

נסמן את החורים בלוח המשחק באברי K כדלקמן:

			a	b	c			
			b	c	a			
		b	c	a	b	c		
a	b	c	a	b	c	a	b	c
b	c	a	b	c	a	b	c	a
c	a	b	c	a	b	c	a	b
		c	a	b	c	a		
			b	c	a			
			c	a	b			

(א) מהי המכפלה ב־K של כל החורים התפוסים בתחילת המשחק?

(ב) איך משתנה מכפלה זו אחרי כל מהלך במשחק?

(ג) מהי המכפלה ב־K של כל החורים התפוסים בסוף המשחק?

(ד) מדוע אי אפשר להגיע למצב בו יהיה רק כלי אחד על לוח?

(ה) מביני דבר טוענים שבמשחק *המקורי*, ציונו של מי שסיים עם כלי אחד **שלא** במרכז הלוח צריך להיות "מטומטם" במקום "מצוין". מדוע?

(רמז: היכן בכלל יכול להימצא הכלי האחרון? השתמש גם בסימטריה של הלוח כדי לקבל תשובה מדויקת יותר על שאלה זו.)

הערה: אחרי שכתבתי פרק זה, נודע לי שידידי פרופ' אריה ביאלוסטוצקי כתב מאמר, אשר גם מכיל את הדברים האמורים לעיל (וכנראה עוד פרטים נוספים על משחק המחשבת). ראה

Arie Bialostocki, *An Application of Elementary Group Theory to Central Solitaire*, The College Mathematics Journal **29** (1999), 208–212.

3. חוגים, שדות.

מטרת פרק זה איננה לתת טיפול ממצה בחוגים ושדות, אלא רק מה שנחוץ לנו בשביל ללמוד על חבורות - וקצת מעבר לזה. רוב הדברים (אם לא כולם) בעצם מוכרים מאלגברה לינארית.

הגדרה 3.1: **חוג** הוא קבוצה R עם שתי פעולה בינריות אסוציאטיביות: חיבור $(+)$ וכפל (בלי סימן), כך ש־R הוא חבורה חלופית ביחס לחיבור ומתקיימים חוקי הפילוג:

$a(b+c)=ab+ac$ לכל $a,b\in R$

$(b+c)a=ba+ca$ לכל $a,b\in R$.

חוג נקרא **חילופי** אם הכפל חילופי.

הוא נקרא חוג עם **יחידה** אם יש בו אבר ניטרלי ביחס לכפל.

תחום שלמות הוא חוג חילופי עם יחידה שונה מאפס בו מתקיים: $ab\neq 0 \Leftarrow a\neq 0, b\neq 0$ לכל $a,b\in R$.

שדה F הוא חוג בו $F\setminus\{0\}$ חבורה חלופית ביחס לכפל. כלומר, F חוג חילופי עם יחידה $1\neq 0$, וכל $0\neq a\in F$ הפיך.

הערה 3.2: בכל חוג R מתקיים: $a0=0=0a$ לכל $a\in R$.

דוגמאות 3.3: $\mathbb{Z}$ הוא תחום שלמות (בפרט חילופי, עם יחידה);

$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ הם שדות; כל שדה הוא תחום שלמות;

אסף המטריצות מעל שדה הוא חוג לא חילופי, עם יחידה;

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}|\ a,b\in\mathbb{Q}\}$ הוא שדה (כי $(a+b\sqrt{2})(a/(a^2-2b^2)-b\sqrt{2}/(a^2-2b^2))=1$);

חוג פולינומים (במשתנה אחד) מעל חוג כלשהו R:

$$R[X]=\left\{f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n=a_0+a_1X+a_2X^2+\cdots \;\middle|\; \begin{array}{l} a_0,a_1,a_2,\ldots\in R \text{ ויש } n \\ \text{כך ש־} a_{n+1}=a_{n+2}=\ldots=0 \end{array}\right\}.$$

אם $a_n=0$ לכל $n\geq 0$ אז $f(X)$ נקרא **פולינום האפס**.

המעלה של $f(X)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nX^n\neq 0$ היא $\deg(f)=\max\{n|\ a_n\neq 0\}$.

חיבור:

$$(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3\cdots)+(b_0+b_1X+b_2+X^2+b_3X^3\cdots)=$$
$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+(a_2+b_2)X^2+(a_3+b_3)X^3+\cdots$$

כפל:

$$(a_0+a_1X+a_2X^2+a_3X^3\cdots)(b_0+b_1X+b_2+X^2+b_3X^3\cdots)=$$
$$a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)X+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)X^2+(a_0b_3+a_1b_2+a_2b_1+a_3b_0)X^3+\cdots$$

בד"כ כותבים אבר $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ כ־$a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X_n$ אם $a_k = 0$ לכל $k > n$.

טענה 3.4: *$R[X]$ הוא חוג והוא מכיל את R. הוא חילופי, אם R חילופי. הוא חוג עם יחידה, אם R חוג עם יחידה. הוא תחום שלמות, אם R תחום שלמות.*

הוכחה: לא נבדוק כאן ש־$R[X]$ חוג ולא נבדוק חילופיות. אם 1 היא היחידה של R, אז $1 = 1 + 0X + 0X^2 + \ldots$ היא היחידה של $R[X]$.

נניח כי R תחום שלמות: אם $f(X), g(X) \neq 0$ אז $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g)$, בפרט $fg \neq 0$. לכן גם $R[X]$ תחום שלמות. ∎

דוגמה 3.5: חוג סופי. יהי $n \in \mathbb{N}$. נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{Z}$: $a \sim b$ אם $n \big| a - b$. חילוק עם שארית ב־n נותן

$$a = nq_a + r_a, \qquad 0 \leq r_a < n$$

$$b = nq_b + r_b, \qquad 0 \leq r_b < n$$

ובפרט $0 \leq |r_a - r_b| < n$. לכן $a \sim b \Leftrightarrow n\big|(r_a - r_b) \Leftrightarrow r_a = r_b$. נסמן מחלקת השקילות של a ב־$[a]$, ואת קבוצת המנה ב־$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. ב־$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ יש n אברים: $[0], [1], \ldots, [n-1]$.

היחס $\sim$ שומר על הפעולות על $\mathbb{Z}$: אם $a \sim a', b \sim b'$ אז $a + b \sim a' + b', ab \sim a'b'$. אכן, $ab - a'b' = a(b - b') + (a - a')b'$, $(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b')$ ושני הביטויים מתחלקים ב־n. מכאן נובע שאם נגדיר פעולות חבור וכפל על $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ על ידי

$$[a] + [b] = [a + b], [a][b] = [ab]$$

אז ההגדרה טובה (אינה תלויה במיצגים של מחלקות השקילות).

מזה נקבל בקלות: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הוא חוג חילופי עם יחידה ($[0]$ האפס, $[1]$ היחידה). נניח מעתה $n \geq 2$.

טענה: *$[k]$ הפיך אם"ם k זר ל־n.*

אכן, $[k]$ הפיך $\Leftrightarrow$ יש $a \in \mathbb{Z}$ כך ש־$[a][k] = [1]$,

$\Leftrightarrow$יש $a \in \mathbb{Z}$ כך ש־$ak + bn = 1$ עבור איזה $b \in \mathbb{Z}$.

$\Leftrightarrow k, n$ זרים

$\Leftarrow$): אם $d \in \mathbb{N}$ גורם משותף ל־n, k אז $d \big| 1$ ומכאן ש־$d = 1$.

$\Rightarrow$: יוסבר בפרק הבא ש־$\gcd(k, n) = 1$ ולכן יש a, b כאלה.) ∎

מסקנה 3.6: *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ שדה אם"ם $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ תחום שלמות אם"ם n ראשוני.*

הוכחה: אם n ראשוני אז:

$[k]$ הפיך $\Leftrightarrow k$ זר ל־$n \Rightarrow n \nmid k \Leftrightarrow [k] \neq [0]$.

לכן $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ שדה, ובפרט תחום שלמות.

אם n אינו ראשוני אז $n = kl$, באשר $1 < k, l < n$, ואז $[k], [l] \neq [0]$, אך $[k][l] = [n] = [0]$. לכן $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ אינו תחום שלמות וודאי לא שדה. ∎

תרגיל 3.7: אם R חוג עם יחידה אז $R^\times = \{r \in R | \text{ הפיך } r\}$ הוא חבורה (ביחס לכפל ב־R).

(בעיקר יש להראות שהצמצום של הכפל על R ל־$R^\times$ הוא פעולה, כלומר, אם a, b הפיכים אז גם ab הפיך.)

דוגמאות 3.8:

(א) המטריצות ההפיכות מסדר n מעל המרוכבים= $M_n(\mathbb{C})^\times = \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$.

(ב) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \{[k] | \text{ זר ל־}n\ k\}$.

(ג) אם R תחום שלמות אז $(R[X])^\times = R^\times$.

הגדרנו הומומורפיזם (של מבנים אלגבריים ובפרט) של חוגים. נביא דוגמאות אחדות:

דוגמאות 3.9:

(א) $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ הנתונה על ידי $\psi(k) = [k]$ היא הומומורפיזם חוגים.

(ב) יהי R חוג חילופי עם יחידה, ויהי $u \in R$. לכל $f = a_1 + a_1X + \cdots + a_nX_n \in R[X]$ נגדיר $f(u) = a_1 + a_1u + \cdots + a_nu^n \in R$. קל לראות ש־$(f+g)(u) = f(u) + g(u), (fg)(u) = f(u)g(u)$, כלומר העתקת ההצבה $f \mapsto f(u)$ היא הומומורפיזם חוגים (שומר יחידה) מ־$R[X]$ לתוך R.

(ג) העתקת האפס בין שני חוגים היא הומומורפיזם.

למה 3.10: יהי $\varphi\colon G \to H$ הומומורפיזם חוגים. אזי

(א) $\varphi(0_G) = 0_H$, באשר $0_G \in G, 0_H \in H$ הם אברי האפס.

(ב) $\varphi(-g) = -\varphi(g)$ לכל $g \in G$.

(ג) נניח כי G, H חוגים עם יחידה ו־$\varphi(1_G) = 1_H$. אז $\varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}$ לכל $g \in G$ הפיך.

הוכחה: הוכחה (א) ו־(ב) נובעים מלמה דומה עבור חבורות, כי φ הומומורפיזם של החבורות החיבוריות של G, H. ל־(ג) אותה ההוכחה כמו ל־(ב). ∎

הערה 3.11: הפילוסופיה מאחורי מושג האיזומורפיזם היא שאם $\varphi\colon G \to H$ איזומורפיזם אז G ו־H הן כאילו אותו המבנה (בשני כתיבים שונים). "כל דבר" שנוכל לומר על G (אבר $g \in G$, קבוצה $A \subseteq G$) יהיה גם נכון עבור $\varphi(G) = H$ (אבר $\varphi(g) \in H$, קבוצה $\varphi(A) \subseteq H$).

הגדרה 4.1: יהיו $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$. אם $d \in \mathbb{N}$ מקיים

(א) $d \big| a_i$ לכל i;

(ב) אם $d' \in \mathbb{N}$ כך ש־$d' \big| a_i$ לכל i אז $d' \big| d$;

הוא יקרא **המחלק המשותף הגדול ביותר** של $a_1, \ldots, a_k$ ויסומן $d = \gcd(a_1, \ldots, a_k)$.

אם $m \in \mathbb{N}$ מקיים

(א) $a_i \big| m$ לכל i;

(ב) אם $m' \in \mathbb{N}$ כך ש־$a_i \big| m'$ לכל i אז $m \big| m'$;

הוא יקרא **הכפולה המשותפת הקטנה ביותר** של $a_1, \ldots, a_k$ ויסומן $m = \operatorname{lcm}(a_1, \ldots, a_k)$.

טענה 4.2: *אם* $\gcd(a_1, \ldots, a_k)$ *(*lcm*) קיים, הוא יחיד.*

הוכחה: אם d_1, d_2 מקיימים את התנאים (א), (ב) של הגדרה 4.1, אז $d_1 \big| d_2$ וגם $d_2 \big| d_1$, לכן $d_1 = d_2$. ∎

למה 4.3: *יהיו* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{Z}$ *לא כולם* 0. *אז* $d = \gcd(a_1, \ldots, a_k)$ *קיים וקיימים* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$ *כך ש־* $d = c_1 a_1 + \cdots + c_k a_k$.

הוכחה: נעיר שאם $q \in \mathbb{Z}$ אז $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ קיים אם ורק אם $\gcd(a_1 - q a_2, a_2, \ldots, a_k)$ קיים ושניהם שווים. אכן, לכל $d' \in \mathbb{Z}$:

$$d' \big| a_1, a_2, \ldots, a_k \Leftrightarrow d' \big| a_1 - q a_2, a_2, \ldots, a_k.$$

שנית, בלי הגבלת הכלליות $a_1, \ldots, a_k \geq 0$. ואפילו $a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$.

הלמה ודאי נכונה אם

$$a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0. \qquad (*)$$

אכן, אז $d = a_1$ ו־$c_1 = 1, c_2 = \cdots = c_k = 0$.

המשך ההוכחה באינדוקציה על $\sum_i a_i$. המקרה $\sum_i a_i = 0$ בסדר (לא יתכן). נניח $\sum_i a_i > 0$. בה"כ $a_1, a_2 \neq 0$, אחרת $(*)$. יש $q, r \in \mathbb{Z}$ כך ש־$a_1 = q a_2 + r$ ו־$0 \leq r < a_2$. כיון ש־$r < a_2 \leq a_1$, לפי הנחת האינדוקציה $d = \gcd(r, a_2, \ldots, a_k)$ קיים ויש $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{Z}$ כך ש־$d = c_1 r + c_2 a_2 + \cdots + c_k a_k$. לפי ההערה $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ קיים ושווה ל־d. לכן

$$d = c_1(a_1 - q a_2) + c_2 a_2 + \cdots + c_k a_k = c_1 a_1 + (c_2 - c_1 q) a_2 + c_3 a_3 + \cdots + c_k a_k.$$

∎

דוגמה 4.4: $\gcd(54,70)=2$.

הגדרה 4.5: יהי $1\neq p\in\mathbb{N}$.

(א) p **אי פריק** אם אין $a_1,a_2\in\mathbb{N}$ גדולים מ־1 כך ש־$p=a_1a_2$. במילים אחרות: אם $p=a_1a_2$, באשר $a_1,a_2\in\mathbb{N}$, אז $a_1=1$ (כלומר $a_2=p$) או $a_2=1$ (כלומר $a_1=p$).

(ב) p **ראשוני** אם לכל $a,b\in\mathbb{Z}$ עבורם $p|ab$ מתקיים $p|a$ או $p|b$.

למה 4.6: *p אי פריק אם ורק אם p ראשוני.*

הוכחה: יהי p ראשוני. נניח כי $p=a_1a_2$, באשר $a_1,a_2\in\mathbb{N}$. אז $p|a_1a_2$, לכן, למשל, $p|a_1$. אבל $a_1|p$. לכן $a_1=p$. זה מוכיח ש־p אי פריק.

להיפך, יהי p אי פריק. נניח כי $a,b\in\mathbb{Z}$ וכי $p|ab$. עלינו להוכיח כי $p|a$ או $p|b$. בלי הגבלת הכלליות $a,b\in\mathbb{N}$. נוכל להניח כי $p\nmid b$.

יהי $d=\gcd(p,b)$. אז $d|p$ אבל $d\neq p$, כי $d|b$ ו־$p\nmid b$. כיון ש־p אי פריק, $d=1$. לכן יש $c_1,c_2\in\mathbb{Z}$ כך ש־$pc_1+bc_2=1$. מכאן $a=apc_1+abc_2$ ו־p מחלק א.י., לכן $p|a$. ∎

משפט 4.7: *לכל $0\neq a\in\mathbb{Z}$ יש הצגה יחידה*

$$a=up_1p_2\cdots p_r$$

באשר $u\in\{\pm 1\}$ ו־$p_1\leq p_2\leq\ldots\leq p_r$ ראשוניים (לא בהכרח שונים זה מזה).

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות $a\in\mathbb{N}$ ועלינו להוכיח את המשפט עם $u=1$.

קיום ההצגה: ־ באינדוקציה על a: אם $a=1$, ניקח $r=0$.

נניח $a>1$. אם a אי פריק, אז $a=a$ היא הצגה מבוקשת. אם a פריק, אז $a=a_1a_2$, באשר $1<a_1,a_2$, ולכן $a_1,a_2<a$. לפי הנחת האינדוקציה

$$a_1=p_1\cdots p_r\quad ,a_2=p_{r+1}\cdots p_s$$

ואז

$$.a=p_1\cdots p_r\cdots p_s$$

סידור מחדש של הגורמים באגף ימין נותן את ההצגה המבוקשת.

יחידות ההצגה: נניח שיש עוד הצגה $a = p'_1 \cdots p'_s$, ונראה שהיא זהה לראשונה. בה"כ $s \geq r$, ההוכחה באינדוקציה על r. אם $r = 0$ אז $s = 0$ ולכן $a = 1$. אם $r \geq 1$ אז $p_r \big| a$ ולכן יש i כך ש־$p_r \big| p'_i$. כיון ש־p'_i אי פריק, נובע ש־$p_r = p'_i$, ולכן (צמצום!) $p_1 p_2 \cdots p_{r-1} = p'_1 \cdots p'_{i-1} p'_{i+1} \cdots p'_s$. לפי הנחת האינדוקציה שתי ההצגות האלה שוות, ומכאן המסקנה. ∎

ניסוח שקול: *לכל* $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ *הצגה יחידה* $a = u \prod_{p \in \mathbb{N} \text{ אי פריק}} p^{n_p}$*, באשר* u *הפיך,* $n_p \geq 0$ *וכמעט לכל (=פרט למספר סופי)* $p \in \mathbb{N}$ *אי פריקים:* $n_p = 0$.

תרגיל 4.8: *אם* $a, b \in \mathbb{Z}$ *שונים מ־*0,

$$a = u \prod_{p \in \mathbb{N} \text{ אי פריק}} p^{m_p}, \quad b = v \prod_{p \in \mathbb{N} \text{ אי פריק}} p^{n_p}$$

באשר $u, v \in \{\pm 1\}$*, אז*

(א) $a \big| b$ *אם"ם* $m_p \leq n_p$ *לכל* p.

(ב) $\gcd(a,b) = \prod_{p \in \mathbb{N} \text{ אי פריק}} p^{\min(m_p, n_p)}$.

(ג) $\operatorname{lcm}(a,b) = \prod_{p \in \mathbb{N} \text{ אי פריק}} p^{\max(m_p, n_p)}$.

הוכחה:

(א) $a \big| b \Leftrightarrow$ קיים $c \in \mathbb{Z}$ כך ש־$b = ac$ (בהכרח $c \neq 0$)

$\Leftrightarrow$ קיימים $w \in \{\pm 1\}$ ו־$k_p \geq 0$ (כמעט כולם 0) כך ש־ [$c = w \prod p^{k_p}$ ו־]

$$v \prod p^{n_p} = u \prod p^{m_p} w \prod p^{k_p} = uw \prod p^{m_p + k_p}$$

$\Leftrightarrow$ קיימים $w \in \{\pm 1\}$ ו־$k_p \geq 0$ (כמעט כולם 0) כך ש־$v = uw, n_p = m_p + k_p$

$\Leftrightarrow$ $m_p \leq n_p$ לכל p. ∎

תרגיל 4.9: *יהיו* $a, b, c \in \mathbb{Z}$ *שונים מאפס. נניח כי* a, b *זרים (כלומר* $\gcd(a,b) = 1$*). הוכח: אם* $a \big| bc$ *אז* $a \big| c$.

הוכחה: לפי למה 4.3, יש $m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש־$ma + nb = 1$. מכאן $c = mac + nbc$. אם a מחלק את bc אז a מחלק את אגף ימין של משוואה זו, ולכן גם את c. ∎

אם $\pi\colon G\times G\to G$ פעולה בינרית על קבוצה G ו־$H\subseteq G$, נאמר שהצמצום של π ל־H היא פעולה בינרית על H אם $\pi(g_1,g_2)\in H$ לכל $g_1,g_2\in H$.

הגדרה 5.1: קבוצה חלקית H של מבנה אלגברי G (חבורה, חוג, שדה,...) תקרא מבנה (חבורה, חוג, שדה,...) **חלקי** או **תת מבנה** אם הצמצומים של הפעולות על G ל־H הן פעולות בינריות על H ו־H מבנה (חבורה, חוג, שדה,...) ביחס לפעולות על G. נסמן $G\le H$; הסימון $H<G$ פירושו $H\le G$ וגם $H\neq G$.

למה 5.2: *קבוצה חלקית H של חבורה G היא חבורה חלקית אם ורק אם*

(א) $H\neq\emptyset$ או: *(א')* $1_G\in H$,

(ב) H *סגורה תחת הפעולה על* G: $a,b\in H \Leftarrow ab\in H$,

(ג) $a\in H \Leftarrow a^{-1}\in H$.

הוכחה: הכרחיות: (א), (ב) ־ ברור. (א'): מתקיים $1_H1_H=1_H=1_G1_H$, לכן (צמצום ב־G) $1_H=1_G$.

(ג) ההפכי $b\in H$ של a ב־H הוא גם ההפכי של a ב־G. מהיחידות ההפכי ב־G יוצא $b=a^{-1}$. לכן $a^{-1}\in H$.

מספיקות: לפי (ב) הצמצום של הפעולה ל־H מגדיר פעולה בינרית על H. היא ודאי אסוציאטיבית. לפי (א) יש $a\in H$; לפי (ג) $a^{-1}\in H$; לפי (ב) $1_G=aa^{-1}\in H$; זהו ודאי אבר ניטרלי ביחס לכפל על H. לפי (ג) יש לכל $a\in H$ הפכי ביחס ל־1_G.

מסקנה 5.3: *אם $H\le G$ חבורות אז $1_H=1_G$. (אם $H\le G$ חוגים או שדות אז $0_H=0_G$.)*

הוכחה: 1_G היא יחידה ב־H. לפי יחידות היחידה, $1_G=1_H$. ∎

דוגמאות 5.4:

(א) $A_3=\{(1),(123),(132)\}<S_3$.

(ב) לכל חבורה G מתקיים: $\{1_G\}\le G$.

(ג) $\mathbb{Q}<\mathbb{R}<\mathbb{C}$ (חבורות ביחס לחיבור).

(ד) אם R חוג קומוטטיבי עם יחידה, אז $R\le R[X]$ ($R\cong R_0, R_0=\{f|\ \deg f=0\}\le R$).

למה 5.5: *אם $\{H_i|\ i\in I\}$ משפחת חבורות חלקיות של חבורה G אז גם $\bigcap_{i\in I}H_i$ חבורה חלקית.*

סימון: אם G חבורה ו־$A,B\subseteq G, g\in G$ נסמן:

$AB=\{ab|\ a\in A,b\in B\}$,

$Ag=\{ag|\ \in A\}=A\{g\}$, $gA=\{ga|\ \in A\}=\{g\}A$,

$A^{-1}=\{a^{-1}|\ a\in A\}$.

תרגיל 5.6: תהי G חבורה ויהיו $A,B,C\subseteq G, a,b,g\in G$. יהי e איבר היחידה של G.

(א) $(AB)C=A(BC)$. בפרט, $(ab)C=a(bC)$.

(ב) $eA=A=Ae$.

(ג) $A=B\Leftrightarrow Ag=Bg$

(ד) $A=B\Leftrightarrow gA=gB$.

(ה) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(ו) $|Ag|=|A|=|gA|$ (כלומר, הקבוצות שוות עוצמה).

(ז) אם $H\le G$ אז $H^{-1}=H, HH=H$ ו־$hH=Hh=H$ לכל $h\in H$.

(ח) אם $H\le G$ אז $g^{-1}Hg=\{g^{-1}hg|\ \in H\}\le G$.

הגדרה 5.7: תהי H חבורה חלקית של חבורה G. קבוצה מהצורה gH (Hg), באשר $g\in G$ תיקרא **מחלקה שמאלית** (**ימנית**) של H ב־G. אסף המחלקות השמאליות $\{gH|\ g\in G\}$ יסומן G/H. נשים לב ש־$g\in gH$, כי $g=ge$.

למה 5.8: *תהי $H\le G$ ויהיו $g_1,g_2\in G$. התנאים הבאים שקולים:*

(א) $g_1H=g_2H$.

(ב) $g_1H\subseteq g_2H$.

(ג) $g_1H\cap g_2H\neq\emptyset$.

(ד) $g_1\in g_2H$.

(ה) $g_2^{-1}g_1\in H$.

הוכחה: (ו) (א) $\Leftarrow$ (ב) $\Leftarrow$ (ד) $\Leftarrow$ (ג) ברור (כי $g_1\in g_1H$). (ה) $\Leftrightarrow$ (ד) ברור.

(ג) $\Leftarrow$ (א): בגלל הסימטריה די להראות (ג) $\Leftarrow$ (ב). אז יש $h_1,h_2\in H$ כך ש־$g_1h_1=g_2h_2$. לכל $h\in H$ מתקיים $g_1h=g_1h_1h_1^{-1}h=g_2h_2h_1^{-1}h\in g_2H$. לכן $g_1H\subseteq g_2H$. ∎

הערה 5.9: על G יש יחס שקילות: $g_1\sim g_2$ אם ורק אם יש $h\in H$ כך ש־$g_1=g_2h$, כלומר, מתקיימים התנאים השקולים של למה 5.8. המחלקות השמאליות הן בדיוק מחלקות השקילות של יחס זה.

מסקנה 5.10: *תהי $H\le G$. אזי G היא אחוד זר של המחלקות השמאליות שלה. כלומר, $G=\dot\bigcup_{g\in R} gH$ (איחוד זר), באשר $R\subseteq G$ כך ש־R מכילה בדיוק אבר אחד מכל מחלקה שמאלית של G ב־H (R נקראת **מערכת מיצגים של G מודולו** H).*

הגדרה 5.11: תהי G חבורה ותהי $H\le G$.

(א) **הסדר של** G הוא העוצמה $|G|$,

(ב) **האינדקס** $(G:H)$ של H ב־G הוא העוצמה $|G/H|$. ברור ש־$|R|=(G:H)$, באשר R מערכת מיצגים של G מודולו H.

משפט 5.12 (לגרנז'): *תהי G חבורה ותהי $H \le G$. אז* $|G|=(G:H)\cdot|H|$.

הוכחה: תהי R מערכת מיצגים של G מודולו H. נגדיר $\varphi\colon R\times H\to G$ על ידי $\varphi(r,h)=rh$. אזי φ חח"ע: אם $\varphi(r_1,h_1)=\varphi(r_2,h_2)$, כלומר $r_1h_1=r_2h_2$, אז $r_1H=r_2H$ ולכן $r_1=r_2$ ומכאן $h_1=h_2$. כמו כן φ על, כי $G=\bigcup_{g\in R} gH$. לכן $|G|=|R\times H|=|R|\times|H|$. ■

מסקנה 5.13: *אם G חבורה סופית, $H\le G$, אז $|H|, (G:H)$ מחלקים את* $|G|$.

הגדרה 5.14: תהי G חבורה ותהי $M\subseteq G$. נסמן ב־$\langle M\rangle$ את חתוך כל החבורות החלקיות של G שמכילות את M.

אם $G=\langle M\rangle$ נאמר כי M היא מערכת יוצרים של G וגם ש־M **יוצרת** את G.

סימון 5.15: $\langle a,b,\ldots\rangle=\langle\{a,b,\ldots\}\rangle, \langle M,N\rangle=\langle M\cup N\rangle$.

למה 5.16: *תהי G חבורה ותהי* $M\subseteq G$.

(א) *$\langle M\rangle$ היא החבורה החלקית הקטנה ביותר של G המכילה את M, כלומר: $M\subseteq\langle M\rangle\le G$ ואם $M\subseteq H\le G$ אז $\langle M\rangle\le H$. (חבורה חלקית כזו היא יחידה; לפי כך (א) הגדרה שקולה של $\langle M\rangle$.)*

(ב) *$\langle M\rangle=\{x_1x_2\cdots x_n|\ x_1,x_2,\ldots,x_n\in M\cup M^{-1}, n\ge 0\}$. (המכפלה הריקה היא אבר היחידה.)*

דוגמה 5.17: $\mathbb{Z}=\langle 1\rangle$.

חזקות.

יהי G מבנה עם פעולת כפל אסוציאטיבית ואבר ניטרלי $e \in G$. לכל $a \in G$ נגדיר

$a^0 = e$ [בכתיב חבורי: $0a = 0$];

$a^{n+1} = a^n a$ עבור $n \in \mathbb{N}$ [$(n+1)a = na + a$];

אם a גם הפיך: $a^{-n} = (a^{-1})^n$ עבור $n \in \mathbb{N}$ [$(-n)a = n(-a)$]

טענה 6.1: *לכל* $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *(לכל* $i, j \in \mathbb{Z}$ *- אם* a *הפיך)*

(א) $a^i a^j = a^{i+j}$ *[*$ia + ja = (i+j)a$*]*

(ב) $(a^i)^j = a^{ij}$ *[*$j(ia) = (ji)a$*]*

(ג) *הכלל* $a^i b^i = (ab)^i$ *אינו בהכרח נכון, אך הוא נכון אם* $ab = ba$.

הוכחה: אם $i, j \geq 0$ אז (א), (ב) נובעות מכלל הצירוף המוכלל, ו־(ג) באינדוקציה. המקרה הכללי (עבור a הפיך) נובע מהמקרה הפרטי לפי הכלל $a^{-n} = (a^{-1})^n$. למשל, נראה (ב) עבור $i < 0, j > 0$:

$$a^{ij} = (a^{-1})^{-ij} \text{ ואילו } (a^i)^j = ((a^{-1})^{-i})^j = (a^{-1})^{(-i)j} = (a^{-1})^{-ij}.$$

אם G חבורה ו־$g \in G$ אז $\langle g \rangle = \{g^i |\ i \in \mathbb{Z}\}$ (=החבורה החלקית הקטנה ביותר של G המכילה את g).

הגדרה 6.2: חבורה G נקראת **מעגלית** (**ציקלית**) אם יש $g \in G$ כך ש־$G = \langle g \rangle$.

דוגמה 6.3: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$ - ביחס לחבור - מעגליות (נוצרות על ידי 1, $[1]$).

אם G חבורה ו־$g \in G$ אז $\langle g \rangle$ תת חבורה מעגלית של G.

הגדרה 6.4: תהי G חבורה ויהי $g \in G$. המספר הטבעי הקטן ביותר n עבורו $g^n = e$ נקרא **הסדר** של g ויסומן $\mathrm{ord}g$. אם $g^n \neq e$ לכל n טבעי, נסמן $\mathrm{ord}g = \infty$. (נשים לב: $\mathrm{ord}g = 1 \Leftrightarrow g = e$.)

למה 6.5: *תהי* G *חבורה ויהי* $g \in G$ *בעל סדר סופי* n*. אזי*

(א) *לכל* m *שלם:* $g^m = e \Leftrightarrow n | m$.

(ב) $\langle g \rangle = \{e = g^0, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$.

(ג) $|\langle g \rangle| = n$*, כלומר,* $|\langle g \rangle| = \mathrm{ord}g$

(ד) *אם* k *הוא מספר שלם אז* $\mathrm{ord}g^k = n/\gcd(n,k)$*. בפרט*

(ד1) $k | n \Leftrightarrow \mathrm{ord}g^k = n/k$;

(ד2) k *זר ל־*$n \Leftrightarrow \mathrm{ord}g^k = n$.

הוכחה: יהי m שלם. חילוקו ב־n עם שארית נותן

$$m = nq + r, \qquad q, r \in \mathbb{Z}, 0 \le r < n.$$

אז

$$g^m = (g^n)^q g^r = e^q g^r = g^r, \tag{3}$$

ולכן:

(א) $g^m = e \Leftrightarrow g^r = e \Leftrightarrow$ (בגלל המינימליות של n) $r = 0 \Leftrightarrow n\big|m$.

(ב) צ"ל: $\{g^m|\ m \in \mathbb{Z}\} = \{g^r|\ 0 \le r < n\}$. ההכלה $\subseteq$ נובעת מ־(3). ההכלה ההפוכה טריוויאלית.

(ג) יהיו $0 \le m_1 \le m_2 < n$. אזי

$$g_1^{m_1} = g^{m_2} \Leftrightarrow g^{m_2 - m_1} = e \Leftrightarrow \text{(לפי (א))}\ n\big|(m_2 - m_1) \Leftrightarrow m_2 - m_1 = 0 \Leftrightarrow m_2 = m_1.$$

לכן $e = g^0, g, g^2, \ldots, g^{n-1}$ שונים זה מזה.

(ד) יהי $d = \gcd(n,k)$ ויהי m שלם. אז לפי (א) $(g^k)^m = e \Leftrightarrow n\big|km \Leftrightarrow (n/d)\big|(k/d)m \Leftrightarrow (n/d)\big|m$ (כי $(n/d), (k/d)$ זרים ־ ראה תרגיל 4.9). לכן m הטבעי הקטן ביותר שמקיים $(g^k)^m = e$ הוא m הטבעי הקטן ביותר שמקיים $(n/d)\big|m$, הוא n/d. (למעשה (ד) נובע מ־(ד1), (ד2). יהי $d = \gcd(n,k)$ וכתוב $n = dn_1, k = dk_1$, באשר k_1, n_1 זרים. לפי (ד1) $\mathrm{ord} g^d = n_1$ ולפי (ד2) $\mathrm{ord}(g^d)^{k_1} = n_1$). ∎

למה 6.6: *תהי G חבורה ויהי $g \in G$ בעל סדר אינסופי. אזי*

(א) *לכל m שלם:* $g^m = e \Leftrightarrow m = 0$.

(ב) $\langle g \rangle = \{g^n|\ \in \mathbb{Z}\}$.

(ג) $|\langle g \rangle| = \aleph_0$. *ביותר דיוק:* $g^m = g^k \Leftrightarrow m = k$.

(ד) *אם* $k \neq 0$ *הוא מספר שלם אז* $\mathrm{ord} g^k = \infty$.

הוכחה:

(א) אם $m > 0$, אז לפי ההגדרה של הסדר, $g^m \neq e$. אם $m < 0$, אז לפי המקרה הקודם $g^{-m} \neq e$, ולכן $g^m = (g^{-m})^{-1} \neq e$. לבסוף, $g^0 = e$.

(ב) $\langle g \rangle = \{\overbrace{g^{\pm 1} g^{\pm 1} \cdots g^{\pm 1}}^{k} \mid k \ge 0\} = \{g^n|\ \in \mathbb{Z}\}$.

(ג) $g^m = g^k \Leftrightarrow g^{m-k} = e \Leftrightarrow m - k = 0 \Leftrightarrow m = k$.

(ד) לפי (א), $g^{km} = (g^k)^m \neq e$ לכל $m > 0$. ∎

מסקנה 6.7: *(א) תהי G חבורה ויהי $g \in G$ בעל סדר סופי n. אז g^k יוצר את $\langle g \rangle$ אמ"ם k, n זרים. מספר היוצרים של $\langle g \rangle$ הוא איפוא $|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times|$="מספר הזרים ל־$n$ מבין $\{1, 2, \ldots, n\}$" = $\varphi(n)$ (**פונקצית אוילר**).*

(ב) סדר של אבר בחבורה סופית מחלק את סדר החבורה.

הוכחה:

(א) $g^k \in \langle g \rangle$, לכן $\langle g^k \rangle \leq \langle g \rangle$. לכן $\langle g^k \rangle = \langle g \rangle \Leftrightarrow |\langle g^k \rangle| = |\langle g \rangle| = n \Leftrightarrow \mathrm{ord} g^k = n \Leftrightarrow k, n$ זרים.

(ב) אם G סופית, $g \in G$, אז $|\langle g \rangle| < \infty$, לכן g מסדר סופי. כעת $\mathrm{ord} g = |\langle g \rangle| \big| |G|$ לפי לגרנז'. ∎

משפט 6.8: *כל חבורה מסדר ראשוני היא מעגלית.*

הוכחה: תהי G מסדר ראשוני. יהי $e \neq g \in G$. אז $1 < \mathrm{ord} g \big| |G|$, לכן $\mathrm{ord} g = |G|$, ומכאן $|\langle g \rangle| = |G|$ ולכן $\langle g \rangle = G$.

משפט 6.9: *תהי $\langle g \rangle$ חבורה מעגלית מסדר סופי n. לכל מחלק d של n קימת ל־$\langle g \rangle$ בדיוק חבורה חלקית אחת מסדר d, היא $\langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$. אלה כל החבורות החלקיות של $\langle g \rangle$, בפרט כולן מעגליות.*

הוכחה: $\langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$ אכן מסדר $\frac{n}{n/d} = d$. לפי לגרנז' כל חבורה חלקית של $\langle g \rangle$ היא מסדר שמחלק את n. נותר להראות כי אם $d \big| n$ ו־$H \leq \langle g \rangle$ מסדר d, אז $H = \langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$. בגלל שויון הסדרים די להראות $H \subseteq \langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$.

יהי $h \in H$; אז $h = g^m$, באשר $0 \leq m < n$. לפי הלמה הקודמת $\mathrm{ord} h \big| |H|$, כלומר $n/\gcd(n,m) \big| d$, מכאן $n \big| \gcd(n,m) d$, ולכן $(\frac{n}{d}) \big| \gcd(n,m)$, ובפרט $(\frac{n}{d}) \big| m$. לכן $h = g^m \in \{(g^{\frac{n}{d}})^k | \ k \in \mathbb{Z}\} = \langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$. מכאן $H \subseteq \langle g^{\frac{n}{d}} \rangle$. ∎

למה 6.10: *תהי $\langle g \rangle$ חבורה מעגלית מסדר n סופי. אז ההעתקה $\lambda\colon \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \langle g \rangle$ הנתונה על ידי $[k] \mapsto g^k$ היא איזומורפיזם.*

הוכחה: (נשים לב ש־$\mathrm{ord} g = n$.) ההעתקה λ מוגדרת היטב והיא חח"ע:

$$g^{k_1} = g^{k_2} \Leftrightarrow g^{k_1 - k_2} = e \Leftrightarrow n \big| k_1 - k_2 \Leftrightarrow [k_1] = [k_2].$$

היא על, כי $\langle g \rangle = \{g^0, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$. היא הומומרפיזם:

$$(\lambda([k_1] + [k_2]) = (\lambda([k_1 + k_2]) = g^{k_1 + k_2} = g^{k_1} g^{k_2} = (\lambda([k_1])\lambda([k_2]). \quad ∎$$

מסקנה 6.11: *חבורה מסדר ראשוני p הינה איזומורפית ל־$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

למה 6.12: *תהי $\langle g \rangle$ חבורה מעגלית מסדר אינסופי. אז ההעתקה $\mathbb{Z} \to \langle g \rangle$: הנתונה על ידי $k \mapsto g^k$ היא איזומורפיזם.*

הוכחה: ההעתקה חח"ע: $g^{k_1} = g^{k_2} \Leftrightarrow k_1 = k_2$. היא על, כי $\langle g \rangle = \{g^k | \ k \in \mathbb{Z}\}$. היא הומומרפיזם: $g^{k_1 + k_2} = g^{k_1} g^{k_2}$. ∎

למה 6.13: *לכל* $d \in \mathbb{N}$ *קימת ל־*$\mathbb{Z}$ *בדיוק חבורה חלקית אחת מאינדקס* d*, היא* $d\mathbb{Z} = \langle d \rangle = \{dk | \ k \in \mathbb{Z}\}$*. חבורות אלה הן כל החבורות החלקיות של* $\mathbb{Z}$ *(פרט ל־*$\{0\}$*). בפרט כולן מעגליות ואיזומורפיות ל־*$\mathbb{Z}$*.*

הוכחה: **תחלה נראה כי** $(\mathbb{Z} : d\mathbb{Z}) = d$**, וביתר דיוק, ש־**$\{0, 1, \ldots, d-1\}$ **היא מערכת מיצגים של** $\mathbb{Z}$ **מודולו** $d\mathbb{Z}$**. צ"ל: לכל** $k \in \mathbb{Z}$ **יש** $0 \le r < d$ **שלם יחיד כך ש־**k, r **באותה מחלקה שמאלית של** $d\mathbb{Z}$ **כלומר, כך ש־**$k - r$ **מתחלק ב־**d**. זה ידוע (חילוק עם שארית ב־**d**) . תהי** $\{0\} \neq H \le \mathbb{Z}$**. יהי** $d \in H$ **הטבעי הקטן ביותר (יש מספרים טבעיים ב־**H**: אם** $k \in H$ **אז גם** $-k \in H$**). נראה ש־**$H = d\mathbb{Z}$**. אכן,** $d\mathbb{Z} = \langle d \rangle \le H$**. להיפך, אם** $k \in H$**, יהיו** q, r **כך ש־**$k = dq + r$**,** $0 \le r < d$**. אז** $r = k + (-q)d \in H$**, לכן לפי המינימליות של** d **יוצא** $r = 0$**. מכאן** $k = dq \in d\mathbb{Z}$**.**

לפי למה 6.6(ד), $\mathrm{ord}(d) = \infty$**, לכן לפי למה 6.6(ג),** $d\mathbb{Z} = \langle d \rangle$ **אינסופית. לפי למה 6.12,** $d\mathbb{Z}$ **איזומורפית ל־**$\mathbb{Z}$**.** ∎

תרגיל 6.14: *כל חבורה מסדר* 4 *הנה איזומורפית ל־*$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ *או לחבורת קליין* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$*.*

הגדרה 7.1: הומומורפיזם $\theta\colon G \to H$ נקרא

(א) **אִיזומורפיזם** אם הוא חח"ע ועל;

(ב) **אֶפִּימורפיזם** אם הוא על;

(ג) **מונומורפיזם** אם הוא חח"ע;

(ד) **אֶנדומורפיזם** אם $H = G$;

(ה) **אוטומורפיזם** אם הוא חח"ע ועל ו־$H = G$.

תהי G חבורה. עבור $a, g \in G$ נסמן $g^a = a^{-1}ga$. אם $M \subseteq G$, נסמן $M^a = \{g^a \mid g \in M\} = a^{-1}Ma$.

טענה 7.2: *לכל* $a, b, g, h \in G$

(א) $(gh)^a = g^a h^a$

(ב) $g^{ab} = (g^a)^b$

(ג) $(g^a)^{-1} = (g^{-1})^a$.

(ד) $e^a = e, g^e = g$

מסקנה 7.3: *ההעתקה $g \mapsto g^a$ היא אוטומורפיזם של G (ההפכי שלו הוא $g \mapsto g^{a^{-1}}$). נקראת* **ההצמדה ב־**a.

הגדרה 7.4: תהי G חבורה. $g, h \in G$ נקראים **צמודים** אם יש $a \in G$ כך ש־$h = g^a$.

יחס הצמידות הוא יחס שקילות. לפי תרגיל 5.6(ח), אם $H \le G$ אז $H^a \le G$ לכל $a \in G$.

למה 7.5: *תהיינה $N \le G$ חבורות ותהי $S \subseteq N$ כך ש־$N = \langle S \rangle$. התנאים הבאים שקולים:*

(א) $Ng = gN$ *לכל* $g \in G$.

(ב) $N^g = N$ *לכל* $g \in G$.

(ג) $N^g \subseteq N$ *לכל* $g \in G$.

(ד) $S^g \subseteq N$ *לכל* $g \in G$.

הוכחה:

(א) $\Leftarrow$ (ב) ע"י הכפלה משמאל ב־g^{-1}; (ב) $\Leftarrow$ (א) ע"י הכפלה משמאל ב־g.

(ב) $\Leftarrow$ (ג) $\Leftarrow$ (ד) טריוויאלי.

(ג) $\Leftarrow$ (ב): נתון גם $N^{g^{-1}} \subseteq N$, ומכאן $N = (N^{g^{-1}})^g \subseteq N^g$.

(ד) $\Leftarrow$ (ג): $S = (S^g)^{g^{-1}} \subseteq N^{g^{-1}}$, לכן $N \subseteq N^{g^{-1}}$, ומכאן $N^g \subseteq N$.

הגדרה 7.6: $N \leq G$ נקראת **נורמלית** ב־G אם היא מקיימת את תנאי הלמה. סימון: $N \lhd G$.

דוגמה 7.7: אם G חילופית אז כל $H \leq G$ נורמלית. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \lhd \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\langle(123)\rangle = A_3 \lhd S_3$.

למה 7.8: *אם $\{N_i\} \in I$ נורמליות ב־G אז $\bigcap_{i\in I} N_i \lhd G$.*

למה 7.9: *תהיינה $N \lhd G$, $A \leq G$. אזי $AN = NA = \langle A, N\rangle \leq G$.*

הוכחה: $AN = \bigcup_{a\in A} aN = \bigcup_{a\in A} Na = NA \subseteq \langle A, N\rangle$. ודאי $N, A \subseteq NA \subseteq \langle A, N\rangle$ לכן נותר עוד להראות ש־AN תת חבורה של G.

ואכן, $1 \in AN$, $(AN)(AN) = (AA)(NN) = AN$, $(AN)^{-1} = N^{-1}A^{-1} = NA = AN$.

∎

למה 7.11: *תהי $N \lhd G$. אזי $G/N = \{gN|\ g \in G\}$ היא חבורה ביחס לכפל של קבוצות חלקיות של G. מתקיים $(g_1N)(g_2N) = g_1g_2N$, אבר היחידה של G/N הוא $1N = N$, וההפכי של gN הוא $(gN)^{-1} = g^{-1}N$.*

[הערנו ש־$g \in gN$. אז הכפל ב־G/N הוא לפי כפל המייצגים ב־G.]

הוכחה: הוכחנו בתרגיל שהכפל אסוציאטיבי. נוודא את הנוסחה לעיל. היתר ־ פשוט. ∎

דוגמה 7.12: $n\mathbb{Z} = \{nz|\ z \in \mathbb{Z}\} \lhd \mathbb{Z}$ נותנת את $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$|S_3/A_3| = 2$, לכן $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, לפי מסקנה 6.11.

למה 7.13: *יהי $\theta\colon G \to H$ הומומורפיזם חבורות. אזי*

(א) $\theta(e_G) = e_H$, *באשר $e_G \in G, e_H \in H$ הם אברי היחידה.*

(ב) $\theta(g^{-1}) = (\theta(g))^{-1}$ *לכל $g \in G$.*

(ג) $\mathrm{Ker}\,\theta = \{g \in G|\ \theta(g) = e_H\}$ *היא חבורה חלקית נורמלית ב־G.*

(ג') אם $H' \leq H$ אז $\theta^{-1}(H') = \{g \in G|\ \theta(g) \in H'\} \leq G$ *היא חבורה חלקית של G.*

(ד) $\mathrm{Im}\,\theta = \{\theta(g)|\ g \in G\}$ *היא חבורה חלקית של H.*

(ד') אם $G' \leq G$ אז $\mathrm{Im}(G') = \{\theta(g)|\ g \in G'\} \leq H$.

(ה) θ *חח"ע אמ"ם* $\mathrm{Ker}\,\theta = \{e_G\}$ *(אמ"ם* $\mathrm{Ker}\,\theta \leq \{e_G\}$*).*

הוכחה: את (א), (ב) הוכחנו בעבר. (להוכיח תחלה את (ג'), (ד') ואח"כ (ג), (ד).)

משפט 7.14 (משפט האיזומורפיזם הראשון): *תהי N חבורה חלקית נורמלית של חבורה G.*

(א) *ההעתקה $\pi\colon G \to G/N$ הנתונה על ידי $\pi(g) = gN$ היא אפימורפיזם שגרעינו N. הוא נקרא האפימורפיזם הטבעי.*

(ב) *יהי $\theta\colon G \to H$ הומומורפיזם חבורות כך ש־$N \leq \mathrm{Ker}\,\theta$. אזי קיים הומומורפיזם יחיד $\theta_N\colon G/N \to H$ כך ש־$\theta = \theta_N \circ \pi$; הוא מוגדר על ידי $\theta_N(gN) = \theta(g)$ ומקיים: θ_N חח"ע $\Leftrightarrow N = \mathrm{Ker}\,\theta$, $\mathrm{Im}(\theta) = \mathrm{Im}(\theta_N)$.*

(ג) *אם $N=\operatorname{Ker}\theta$ אז $\theta_N\colon G/\operatorname{Ker}\theta\to\operatorname{Im}\theta$ הוא איזומורפיזם.*

הוכחה: (ב) אם θ_N קיים, הוא מקיים $\theta_N(gN)=\theta(g)$ ומכאן היחידות; קל לבדוק שהוא הומומורפיזם.

קיום: נראה שההגדרה $\theta_N(gN)=\theta(g)$ טובה. (...)

$\operatorname{Ker}\theta_N=\{gN|\ \theta(g)=e\}=\{gN|\ g\in\operatorname{Ker}\theta\}$, לכן

$$\theta_N \text{ חח"ע } \Leftrightarrow gN=N \text{ לכל } g\in\operatorname{Ker}\theta \Leftrightarrow g\in N \text{ לכל } g\in\operatorname{Ker}\theta$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\theta\le N\Leftrightarrow\operatorname{Ker}\theta=N\,.$$

(ג) לפי (ב) $\theta_N\colon G/\operatorname{Ker}\theta\to H$ חח"ע ועל $\operatorname{Im}(\theta)$. ∎

דוגמה 7.15: העתקת הדטרמיננטה $d\colon \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\to\mathbb{C}^\times$ היא הומומורפיזם. היא על: $d(\mathrm{diag}(a,1,\dots,1)=a$, וגרעינה $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})=\{A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})|\ |A|=1\}$. לכן

$$\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})\lhd\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \qquad \text{ו-} \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})\cong\mathbb{C}^\times.$$

משפט 7.16 (משפט האיזומורפיזם השלישי):

(א) *תהי $G\lhd N$ ונסמן $\bar G=G/N$. אם $N\le A\le G$ אז $N\lhd A$. כמו כן $\bar A=\{aN|\ a\in A\}$ היא חבורה חלקית של $\bar G$.*

(ב) *ההעתקה $A\mapsto\bar A$ היא העתקה חח"ע ממשפחה $\{A|\ N\le A\le G\}$ על משפחת כל החבורות החלקיות של $\bar G=G/N$.*

(ג) *יתר על כן: העתקה זו שומרת:*

(1) *הכלה:* $A_1\le A_2\Leftrightarrow\bar A_1\le\bar A_2$

(2) *חיתוכים:* $\overline{\bigcap_{i\in I}A_i}=\bigcap_{i\in I}\bar A_i$

(3) *נורמליות:* $A_1\lhd A_2\Leftrightarrow\bar A_1\lhd\bar A_2$

(4) *מנות: אם* $A_1\lhd A_2$ *אז* $\bar A_2/\bar A_1\cong A_2/A_1$

הוכחה:

(א) ברור ש-$N\lhd A$. יהי $\pi\colon G\to\bar G$ האפימורפיזם הטבעי אז $\pi(A)=\bar A$. לכן $\bar A\le\bar G$. (כמו כן, $\bar A=A/N$.)

(ב)

על: תהי $B\le\bar G$. אז $N=\operatorname{Ker}\pi\le\pi^{-1}(B)\le G$ ו-$\pi(\pi^{-1}(B))=B$ (כי π על.)

חח"ע: נניח $B=\pi(A)$ באשר $N\le A\le G$. נראה ש $A=\pi^{-1}(B)$. ההכלה "$A\subseteq\pi^{-1}(B)$" ברורה. להיפך, אם $g\in\pi^{-1}(B)$, כלומר $\pi(g)\in B$, אז יש $a\in A$ כך ש-$\pi(g)=\pi(a)$. מכאן $\pi(ga^{-1})=1$, ולכן $ga^{-1}\in\operatorname{Ker}\pi\le N\le A$. לכן $g=(ga^{-1})a\in A$.

אם כן, ההעתקה ההפוכה נתונה על ידי $B \mapsto \pi^{-1}(B)$. בפרט $A = \pi^{-1}(\bar{A})$ לכל $N \le A \le G$.

(ג) (1) $A_1 \le A_2 \Leftarrow \pi(A_1) \le \pi(A_2)$; $\bar{A}_1 \le \bar{A}_2 \Leftarrow \pi^{-1}(\bar{A}_1) \le \pi^{-1}(\bar{A}_2)$.

(2) $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} \pi^{-1}(\bar{A}_i) = \pi^{-1}(\bigcap_{i\in I} \bar{A}_i)$; הפעל π על שני האגפים.

(3)

$$\bar{A}_1 \lhd \bar{A}_2 \Leftrightarrow (a_2N)^{-1}(a_1N)(a_2N) \in \bar{A}_1 \quad \text{לכל} \quad a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$$

$$\Leftrightarrow \pi(a_2^{-1}a_1a_2) = \pi(a_2)^{-1}\pi(a_1)\pi(a_2) \in \bar{A}_1 \quad \text{לכל} \quad a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$$

$$\Leftrightarrow a_2^{-1}a_1a_2 \in \pi^{-1}(\bar{A}_1) = A_1 \quad \text{לכל} \quad a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$$

$$\Leftrightarrow A_1 \lhd A_2$$

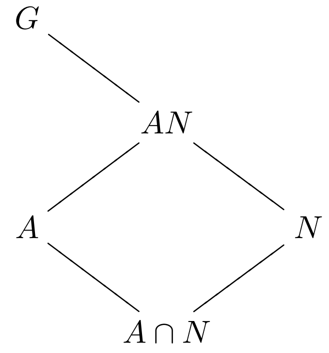
(4) יהי $\lambda\colon A_2 \to \bar{A}_2/\bar{A}_1$ ההרכבה של האפימורפיזמים הטבעיים $\rho\colon \bar{A}_2 \to \bar{A}_2/\bar{A}_1$ ו־$\pi\colon A_2 \to \bar{A}_2$.

אזי λ אפימורפיזם, לכן לפי משפט האיזומורפיזם הראשון יש איזומורפיזם $A_2/\operatorname{Ker}\lambda \to \bar{A}_2/\bar{A}_1$. אבל

$$\operatorname{Ker}\lambda = \lambda^{-1}(e) = \pi^{-1}(\rho^{-1}(e)) = \pi^{-1}(\bar{A}_1) = A_1 \qquad \blacksquare$$

דוגמה 7.17: $kn\mathbb{Z} \lhd n\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}$; לפי (ג)3, $n\mathbb{Z}/kn\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Z}/kn\mathbb{Z}$; לפי (ג)4, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/kn\mathbb{Z})/(n\mathbb{Z}/kn\mathbb{Z})$.

משפט 7.18 (משפט האיזומורפיזם השני): *תהי* $N \lhd G$ *ותהי* $A \le G$. *אזי* $A \cap N \lhd A$ *ו־*$AN/N \cong A/A\cap N$ *על ידי* $aN \mapsto a(A\cap N)$.



הוכחה: יהי $\pi\colon G \to G/N$ האפימורפיזם הטבעי. גרעינו N. צמצומו $\theta\colon A \to G/N$ ל־A הוא הומומורפיזם. תמונתו [שאמורה לפי משפט האיזומורפיזם השלישי להיות מהצורה H/N באשר $N \le H \le A$] היא

$$\operatorname{Im}\theta = \{\pi(a) |\ a \in A\} = \{\pi(a)\pi(n) |\ a \in A, n \in N\} = AN/N$$

כמו כן $\operatorname{Ker}\theta = \{a \in A |\ \pi(a) = e\} = A \cap \operatorname{Ker}\pi = A \cap N$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון יש איזומורפיזם $\theta_{A\cap N}\colon A/A\cap N \to AN/N$ הנתון על ידי $a(A\cap N) \mapsto \theta(a) = aN$. $\blacksquare$

תרגיל 7.19: *תהיינה* $N \lhd G$ ו־$H_1 \lhd H \le G$. *אז* $H_1N \lhd HN$.

הוכחה: מתקיים $N \le H_1N \le HN \le G$. לפי משפט האיזומורפיזם השלישי די להוכיח $H_1N/N \lhd HN/N$. אבר ב־HN/N הוא מהצורה $hnN = hN$, באשר $h \in H, n \in N$, ובאותו אפן אבר ב־H_1N/N הוא מהצורה h_1N, באשר $h_1 \in H_1$. כעת $(hN)^{-1}(h_1N)(hN) = h^{-1}h_1hN \in H_1N/N$. ∎

למת הפרפר 7.20 (Zassenhaus): *יהיו* $A_1 \lhd A \le G$ *ו־*$B_1 \lhd B \le G$*. אזי*

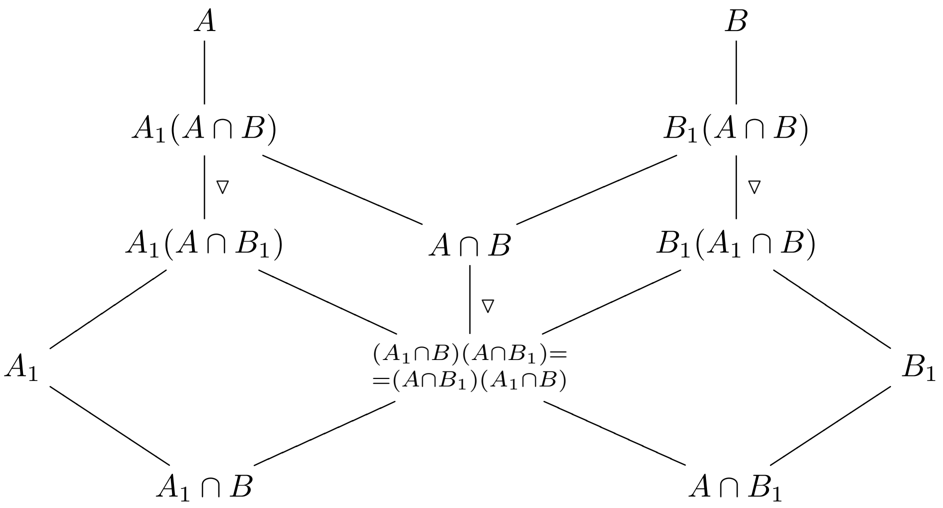
(א) $A_1(A \cap B_1), A_1(A \cap B) \le G$

(ב) $A_1(A \cap B_1) \lhd A_1(A \cap B)$ *ובאפן סימטרי* $B_1(A_1 \cap B) \lhd B_1(A \cap B)$

(ג) $B_1(A \cap B)/B_1(A_1 \cap B) \cong A_1(A \cap B)/A_1(A \cap B_1)$.

הוכחה:

(א) $A \cap B_1 \le A \cap B \le A$, $A_1 \lhd A$, לכן $A_1(A \cap B_1), A_1(A \cap B) \le A \le G$, לפי למה 7.9.



(ב) $B_1 \lhd B$, לכן לפי משפט האיזומורפיזם השני $B_1 \cap (A \cap B) \lhd A \cap B$, כלומר $A \cap B_1 \lhd A \cap B$. שתי החבורות האלה חלקיות ל־A, ו־$A_1 \lhd A$, לכן לפי התרגיל נובע (ב).

כמו כן, כיון ש־$A \cap B_1 \lhd A \cap B$ ובאופן סימטרי גם $A_1 \cap B \lhd A \cap B$, לפי למה 7.9 החבורה הנוצרת על ידי $A_1 \cap B, A \cap B_1$ היא $(A_1 \cap B)(A \cap B_1) = (A \cap B_1)(A_1 \cap B)$ ולפי התרגיל היא נורמלית ב־$A \cap B$.

(ג) קל לראות ש־$[B_1(A_1 \cap B)](A \cap B) = B_1(A \cap B)$, כי $A_1 \cap B \subseteq A \cap B$. כמו כן, $[B_1(A_1 \cap B)] \cap (A \cap B) = (A \cap B_1)(A_1 \cap B)$: אכן, $\supseteq$ ברור ואם $b_1 \in B_1, c \in A_1 \cap B$ כך ש־$b_1c \in A \cap B$ אז $b_1c, c \in A$ ולכן גם $b_1 \in A$. מכאן $b_1 \in A \cap B_1$.

לפי משפט האיזומורפיזם השני $B_1(A \cap B)/B_1(A_1 \cap B) \cong (A \cap B)/(A_1 \cap B)(A \cap B_1)$ ואז (ג) נובע מטעמי סימטריה. ∎

התרגיל הבא יהיה בתרגול:

תרגיל 7.21: *מצא כל החבורות מסדר* 6 *(עד כדי איזומורפיזם)*

השאלה הבאה איננה קשורה לחומר הלימוד, ואין לה, לפי מיטב ידיעתי, שימושים בתורת החבורות. אך היא מעניינת לשם ידע כללי.

שאלת אתגר 7.22: *תהי* G *חבורה סופית ותהי* $H \leq G$ *תת חבורה שלה. הוכח שקיימת* $R \subseteq G$ *שהינה מערכת מייצגים הן למחלקות השמאליות של* H *ב־*G *והן למחלקות הימניות של* H *ב־*G*. כלומר,* $G = \dot\bigcup_{g\in R} gH = \dot\bigcup_{g\in R} Hg$.

הטענה היא תוצאה של משפט Hall בקומבינטוריקה שנקרא גם משפט נישואין (marriage theorem). נביא את הניסוח הפופולרי שלו:

נתונה קבוצה W של נשים וקבוצה M של גברים. נניח $|W| = |M|$. רוצים לחתן את הנשים עם הגברים כך שכל אישה תהיה מרוצה (גבר ממילא מרוצה אם אשתו מרוצה...). לשם כך מכינה כל אישה $w \in W$ רשימה M_w של גברים אתם היא מוכנה להתחתן. (כלומר, M_w היא תת קבוצה של M, לכל $w \in W$.) כעת רוצים להתאים לכל אישה חתן מתוך רשימתה, ועל ידי כך לחתן כל אישה עם גבר אחד וכל גבר עם אישה אחת, כמובן.

מובן שזה אינו תמיד אפשרי. תנאי הכרחי ברור (בדוק!) להצלחת המבצע הוא שלכל תת קבוצה W' של W יתקיים $|\bigcup_{w\in W'} M_w| \geq |W'|$.

משפט הנישואין אומר שתנאי זה הוא גם מספיק!

פתרון שאלה 7.22: יהי $n = \frac{|G|}{|H|}$. תהיינה

$$W = \{\tau H \mid \tau \in G\} \quad , M = \{H\sigma \mid \sigma \in G\}$$

קבוצות המחלקות הימניות והשמאליות של H ב־G, בהתאמה. אז $|W| = |M| = n$, לפי משפט לגרנז'.

נניח שאפשר לרשום $W = \{\tau_i H\}_{i=1}^n$, $M = \{H\sigma_i\}_{i=1}^n$ (כלומר, לסדר את W, M) כך ש־$\tau_i H \cap H\sigma_i \neq \emptyset$ לכל $i = 1, \ldots, n$. אז, לכל $1 \leq i \leq n$, נבחר $g_i \in \tau_i H \cap H\sigma_i$. הוא יקיים, לפי למה 5.8, $\tau_i H = g_i H$ וגם $H\sigma_i = Hg_i$. לכן $R = \{g_i\}_{i=1}^n$ המערכת המבוקשת.

כדי להוכיח שיש התאמה כזאת בין אברי W ואברי M, נגדיר לכל $w \in W$

$$M_w = \{m \in M \mid m \cap w \neq \emptyset\}.$$

לפי משפט הנישואין די לבדוק שלכל $W' \subseteq W$ מתקיים $|\bigcup_{w\in W'} M_w| \geq |W'|$. נסמן $X = \bigcup_{w\in W'} w$. קל לראות שמתקיים

$$\bigcup_{w\in W'} M_w = \{H\sigma \in M \mid H\sigma \cap X \neq \emptyset\}$$

לכן די להראות כי X חותכת באופן לא טריוויאלי לפחות $|W'|$ מחלקות ימניות.

כעת, X היא איחוד זר של מחלקות שמאליות τH, כל אחת בת $|H|$ איברים, לכן $|X| = |W'| \cdot |H|$. כל איבר של G נמצא באיזו מחלקה ימנית $H\sigma$, וכל מחלקה ימנית מכילה בדיוק $|H|$ איברים, לכן X חותכת באופן לא טריוויאלי לפחות $|W'| = \frac{|X|}{|H|}$ מחלקות ימניות. ∎

הגדרה 8.1: **אוטומורפיזם** של חבורה G הוא איזומורפיזם מ־G על G. אוסף כל האוטומרפיזמים של G יסומן $\mathrm{Aut}(G)$. זוהי חבורה ביחס לפעולת ההרכבה

$$(\alpha\beta)(g) = \alpha(\beta(g)), \qquad a, \in G,\ \alpha,\beta \in \mathrm{Aut}(G).$$

לפעמים רושמים $\alpha * g$ במקום $\alpha(g)$. אז $\alpha\beta * g = \alpha * (\beta * g)$.

דוגמה 8.2: יהי $a \in G$. ההעתקה $g \mapsto a * g = aga^{-1}$ היא אוטומורפיזם של G (מסקנה 7.3). הוא נקרא **האוטומורפיזם הפנימי** המתאים ל־a וגם **ההצמדה ב־**a (**משמאל**).

תרגיל 8.3: *(א) ההעתקה $G \to \mathrm{Aut}(G)$ המעתיקה a לאוטומורפיזם הפנימי המתאים לו, היא הומומורפיזם. תמונתה $\mathrm{Inn}(G)$, היא אוסף כל האוטומרפיזמים הפנימיים של G.*

(ב) *(הגרעין של הומומרפיזם זה:) האוטומורפיזם הפנימי המתאים ל־ a הוא זהות אם ורק אם a שייך ל**מֶרכָּז** של G,*

$$Z(G) = \{a \in G |\ ag = ga \text{ לכל } g \in G\}.$$

הגדרה 8.4: תהי G חבורה ותהי X קבוצה. **פעולה** (**משמאל**) של G על X היא העתקה $\pi\colon G \times X \to X$ [בד"כ נרשום $g * x$ במקום $\pi(g,x)$] המקיימת

(א) $\pi(g_1g_2, x) = \pi(g_1, \pi(g_2, x))$ $[g_1g_2 * x = g_1 * (g_2 * x)]$ לכל $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$,

(ב) $\pi(e,x) = x$ $[e * x = x]$ לכל $x \in X$.

דוגמה 8.5:

(1) חבורת המטריצות ההפיכות $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ מסדר $n \times n$ מעל $\mathbb{C}$ פועלת על $\mathbb{C}^n$ על ידי הכפל: $A * v = Av$.

(2) $S(X)$ פועלת על X; בפרט, S_n פועלת על $\{1, 2, \dots, n\}$.

(3) חבורה G פועלת על עצמה על ידי ההצמדה משמאל .

(4) חבורה G פועלת על האוסף $\{H |\ H \le G\}$ על ידי ההצמדה משמאל.

(5) חבורה G פועלת על עצמה על ידי כפל משמאל: $\pi(g,x) = gx$.

(6) אוסף כל הפעולות שאפשר לעשות על הקוביה ההונגרית הוא חבורה; היא פועלת על אוסף כל הקונפיגורציות של מרכיבי הקוביה.

(7) הפעולה הטריוויאלית של חבורה G על קבוצה X: $g * x = x$ לכל $g \in G$, $x \in X$.

(8) יש גם **פעולה מימין** $(x,g) \mapsto x^g$ של חבורה G על קבוצה X ($x^{g_1g_2} = (x^{g_1})^{g_2}$, $x^e = x$). אך היא מגדירה פעולה משמאל על ידי $g * x = x^{g^{-1}}$.

הגדרה 8.6: אם G פועלת על X אז היחס על X: "$x_1 \sim x_2$ אם יש $g \in G$ כך ש־$x_2 = g * x_1$" הוא יחס שקילות. מחלקת השקילות נקראת **מסלול**־G. עוצמת מסלול נקראת **אורך** המסלול. בפרט: X היא אחוד זר של מסלולי־G השונים: $X = \dot\bigcup_{i\in I}\{g * x_i |\ g \in G\}$, באשר $\{x_i\}_{i\in I}$ היא מערכת מיצגים של מסלולי־G (כלומר מכילה בדיוק אבר אחד מכל מסלול־G).

למה 8.7: *נניח כי G פועלת על X ויהי $x \in X$. אזי*

(א) *$G_x = \{g \in G|\ g * x = x\}$ היא חבורה חלקית של G הנקראת* ***חבורת המייצב*** *של x.*

(ב) $g_1 * x = g_2 * x \Leftrightarrow g_1G_x = g_2G_x \Leftrightarrow G_xg_1^{-1} = G_xg_2^{-1}$.

(ג) *אורך המסלול X' של x הוא $(G : G_x)$. יש התאמה חח"ע ועל $X' \to R$ על ידי $g \mapsto g * x$, באשר R מערכת מייצגים של המחלקות השמאליות של G_x ב־G. (כלומר, $G = \dot\bigcup_{g\in R} gG_x$).*

תרגיל 8.8: *חבורה מעגלית $G = \langle\sigma\rangle$ מסדר n פועלת על קבוצה X. יהי $x \in X$ ונניח כי $d = (G : G_x)$. הראה כי $x, \sigma * x, \ldots, \sigma^{d-1} * x$ הם כל איבריו השונים של מסלול־G של x ו־$G_x = \langle\sigma^d\rangle$.*

פתרון: יהי X' מסלול־G של x. לפי הלמה יש לו בדיוק d איברים. ברור ש־$x, \sigma * x, \ldots, \sigma^{d-1} * x \in X'$. לפי הלמה, $\sigma^i * x = \sigma^j * x$ אם ורק אם $\sigma^iG_x = \sigma^jG_x$, כלומר, $\sigma^{j-i} \in G_x$. לפי משפט לגרנז' $|G_x| = \frac{n}{d}$, לכן לפי למה 6.9, $G_x = \langle\sigma^d\rangle$. לכן $\sigma^i * x = \sigma^j * x$ אם ורק אם $\sigma^{j-i} \in \langle\sigma^d\rangle$. כלומר, $d|j-i$. מכאן ש־$x, \sigma * x, \ldots, \sigma^{d-1} * x$ שונים זה מזה. ∎

מסקנה 8.9: *אם חבורה G פועלת על קבוצה סופית X, ו־$\{x_i\}_{i\in I}$ היא מערכת מיצגים של מסלולי־G אז מתקיים $|X| = \sum_{i\in I}(G : G_{x_i})$. אם $\{x_i\}_{i\in I'}$ היא מערכת מיצגים של מסלולי־G בעלי אורך > 1 אז*

$$|X| = \sum_{i\in I'}(G : G_{x_i}) + |\{x \in X|\ g * x = x \text{ לכל } g \in G\}|.$$

הגדרות 8.10: נתבונן בפעולת ההצמדה משמאל.

אם $a \in G$ אז $\{g \in G|\ aga^{-1} = g\} = \{g \in G|\ g * a = a\}$ הוא **הַמְּרַכֵּז** $C_G(a)$ של a. בפרט $C_G(a) \le G$.

אם $H \le G$ אז $\{g \in G|\ aHa^{-1} = H\} = \{g \in G|\ g * H = H\}$ הוא **הַמְשַׁמֵּר** (**נורמליזטור**) $N_G(H)$ של H. בפרט $N_G(H) \le G$.

מסקנה 8.11: *אם חבורה G סופית, ו־$\{x_i\}_{i\in I}$ מערכת מיצגים של מחלקות הצמידות ב־G אז* $|G| = \sum_{i\in I}(G : G_{x_i})$. *אם $\{x_i\}_{i\in I'}$ היא מערכת מיצגים של מחלקות הצמידות ב־G בעלות יותר מאבר אחד אז*

$$|G| = \sum_{i\in I'}(G : C_G(x_i)) + |Z(G)|.$$

משפט 8.12: *פעולה π של G על X מגדירה הומומורפיזמים $\varphi\colon G \to S(X)$ על ידי*

$$(*) \qquad \varphi(g)(x) = \pi(g,x) \quad [= g * x].$$

ההעתקה $\{$הומומורפיזמים מ־G ל־$S(X)\} \to \{$פעולות של G על $X\}$ על ידי $\varphi \mapsto \pi$ הנתונה על ידי (*) היא חח"ע ועל. ההעתקה ההפוכה נתונה גם על ידי (*).

הוכחה: ההעתקה $\varphi\colon G \to \{f\colon X \to X\}$ המוגדרת על ידי (*) מקיימת

$$\varphi(g_1g_2)(x) = (g_1g_2) * x = g_1 * (g_2 * x) = \varphi(g_1)(\varphi(g_2)(x)), \qquad \text{לכל } g_1, g_2 \in G, x \in X,$$

וכן $\varphi(e)(x) = x$ לכל $x \in X$, כלומר

$$\varphi(e) = \mathrm{id}, \quad \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2), \qquad \text{לכל } g_1, g_2 \in G.$$

בפרט לכל $g \in G$ מתקיים $\varphi(g)\varphi(g^{-1}) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(e) = \mathrm{id}$, ובאופן דומה $\varphi(g^{-1})\varphi(g) = \mathrm{id}$, כלומר $\varphi(g)$ תמורה על X. ברור ש־φ הומומורפיזמים. זה מוכיח את הטענה הראשונה.

לגבי הטענה השניה: אם $\varphi\colon G \to S(X)$ הומומורפיזם, אז π המוגדרת על ידי (*) אכן פעולה. ההעתקות $\varphi \mapsto \pi$ ו־$\pi \mapsto \varphi$ הפוכות זו לזו (כי הן נתונות על ידי אותה נוסחה.) ∎

מסקנה 8.13: *תהיינה $H \le G$ חבורות. נניח כי $n = (G:H) < \infty$. תהי $K = \bigcap_{g \in G} H^g$. אז $K \lhd G$, $K \le H$ ו־G/K איזומורפית לתת חבורה של S_n. בפרט, אם G סופית ו־$|G| \nmid n!$ אז $K \ne 1$.*

הוכחה: תהי $X = \{gH \mid g \in G\}$. אז $|X| = n$. החבורה G פועלת על X על ידי כפל משמאל: $\sigma * gH = \sigma gH$. לפי (*), פעולה זו מגדירה הומומורפיזם $\varphi\colon G \to S(X) \cong S_n$. הגרעין של φ הוא

$$\{\sigma \in G \mid \sigma gH = gH \text{ לכל } g \in G\} = \{\sigma \in G \mid g^{-1}\sigma g \in H \text{ לכל } g \in G\} = \bigcap_g gHg^{-1} = K.$$

לכן $K \lhd G$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $G/K \cong \varphi(G) \le S(X) \cong S_n$. אם $\sigma \in K$ אז $\sigma 1H = 1H$, לכן $\sigma \in H$. לכן $K \le H$. ∎

חבורת התמורות על $X=\{1,2,\dots,n\}$ נקראת **החבורה הסימטרית** S_n. **חישוק** (cyclus) $\pi=(a_1a_2\dots a_k)$ **מאורך** k, באשר $a_1,a_2,\dots,a_k\in X$ שונים זה מזה, מוגדר על ידי

$$\pi(a_1)=a_2,\ \pi(a_2)=a_3,\dots,\pi(a_k)=a_1, \qquad \pi(a)=a \text{ לכל } X\ni a\neq a_1,a_2,\dots,a_k.$$

קל לראות ש־$\mathrm{ord}\pi=k$. חישוק מאורך 2 נקרא **חישוקון** (transposition).

שני חישוקים $(a_1a_2\dots a_k),(b_1b_2\dots b_m)$ **זרים** אם $a_i\neq b_j$ לכל i,j. חישוקים זרים מתחלפים ביניהם בכפל!

הערה 9.1: $\dots=(a_3\dots a_ka_1a_2)=(a_2\dots a_ka_1)=(a_1a_2\dots a_k)$.

למה 9.2: *כל $\sigma\in S_n$ ניתן להציג כמכפלה $\sigma=\pi_1\pi_2\cdots\pi_r$ של חישוקים זרים מאורך >1. הצגה זו הנה יחידה עד כדי סדר החישוקים.*

הוכחה: **קיום:** $\langle\sigma\rangle$ פועלת על $X=\{1,\dots,n\}$. יהיו $X_1,\dots,X_r$ המסלולים מאורך >1 של $\langle\sigma\rangle$, נאמר, X_i מאורך k_i, ונבחר $x_i\in X_i$. לפי תרגיל 8.8, $X_i=\{x_i,\sigma(x_i),\dots\sigma^{k_i-1}(x_i)\}$ ו־$\sigma^{k_i}(x_i)=x_i$. יהי $\pi_i=\big(x_i\ \sigma(x_i)\ \dots\ \sigma^{k_i-1}(x_i)\big)$. אז $\sigma=\pi_1\pi_2\cdots\pi_r$, כי (בדוק!) שני האגפים פועלים באותו אופן על אבר מהצורה $\sigma^j(x_i)\in X_i$ ועל אבר במסלול מאורך 1.

יחידות: נניח כי $\sigma=\rho_1\rho_2\cdots\rho_m$, באשר $\rho_i=(a_{i1}a_{i2}\dots a_{il_i})$ חישוק מאורך $l_i>1$ ו־$\rho_1,\dots,\rho_m$ זרים. אז

$$\begin{aligned}
\sigma(a_{i1})&=(\rho_1\rho_2\cdots\rho_m)(a_{i1})=\rho_i(a_{i1})=a_{i_2},\\
\sigma^2(a_{i1})&=\sigma(a_{i2})=(\rho_1\rho_2\cdots\rho_m)(a_{i2})=\rho_i(a_{i2})=a_{i3},\\
&\dots\\
\sigma^{l_i-1}(a_{i1})&=a_{il_i},\\
\sigma^{l_i}(a_{i1})&=a_{i1}
\end{aligned}$$

לכן $\{\sigma^j(a_{i1})|\ j\geq 0\}=\{a_{i1},a_{i2},\dots,a_{il_i}\}=X'_i$ הוא מסלול של $\langle\sigma\rangle=\{1,\sigma,\sigma^2,\dots\}$ מאורך l_i. המסלולים $X'_1,\dots,X'_m$ זרים (כי $\rho_1,\dots\rho_m$ זרים), והם כל מסלולי־$\langle\sigma\rangle$ מאורך>1: אם $x\in X\setminus\bigcup_{i=1}^m X'_i$ אז $\rho_i(x)=x$ לכל i, לכן $\sigma(x)=x$, ולכן $\{x\}$ מסלול מאורך 1 של $\langle\sigma\rangle$. לכן $m=r$ ובה"כ $X'_i=X_i$ לכל i. בפרט $l_i=k_i$ לכל i. כעת $x_i=a_{ij_i}$ עבור איזה j_i, ובה"כ $x_i=a_{i1}$ (לפי ההערה 9.1). לכן

$$\rho_i=(a_{i1}a_{i2}\dots a_{ik_i})=(x_i\ \sigma(x_i)\ \dots\ \sigma^{k_i-1}(x_i))=\pi_i. \qquad \blacksquare$$

דוגמה 9.3: $(138)(25)(49)=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\3&5&8&9&2&6&7&1&4\end{pmatrix}$.

מסקנה 9.4: *כל תמורה $\sigma \in S_n$ אפשר לכתוב כמכפלה של חישוקונים (לא בהכרח באופן יחיד).*

הוכחה: בה"כ σ היא חישוק. אז $(a_1a_2\dots a_k) = (a_ka_1)(a_{k-1}a_1)\cdots(a_3a_1)(a_2a_1)$. ∎

דוגמה 9.5: אין יחידות בהצגה כמכפלה של חישוקונים: $(13) = (23)(13)(12)$.

תרגיל 9.6: *יהיו* $\sigma \in S_n, \pi = (a_1\dots a_k) \in S_n$. *אז* $\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\dots\sigma(a_k))$.

פתרון: כל $n \geq i \geq 1$ הוא מהצורה $\sigma(j)$, באשר $n \geq j \geq 1$. בדוק את פעולת שתי התמורות $(\sigma(a_1)\dots\sigma(a_k))$, $\sigma(a_1\dots a_k)\sigma^{-1}$ עליו. ∎

הערה 9.7: זוגיות של תמורות. תהי $X = \{(i,j)|\ 1 \leq i,j \leq n, i \neq j\}$. נקרא ל־$Y \subseteq X$ **תקנית** אם היא מכילה בדיוק אבר אחד מכל זוג $(i,j),(j,i) \in X$. למשל $T = \{(i,j)|\ 1 \leq i < j \leq n\}$ תקנית.

S_n פועלת על X על ידי $\sigma * (i,j) = (\sigma(i),\sigma(j))$. אם $Y \subseteq X$ תקנית אז גם $\sigma * Y$ תקנית (כי קל לראות שאם $\sigma * Y$ אינה תקנית, אז Y אינה תקנית).

(1) לכל $x = (i,j) \in X$ נסמן $\mathrm{Sg}(x) = \begin{cases} 1 & i<j \text{ אם} \\ -1 & i>j \text{ אם} \end{cases}$.

(2) לכל $Y \subseteq X$ (תקנית) נגדיר $\mathrm{Sg}(Y) = \prod_{x\in Y}\mathrm{Sg}(x) \in \{\pm 1\}$.

(3) לכל $\sigma \in S_n$ נגדיר $\mathrm{Sg}(\sigma) = \prod_{x\in Y}\mathrm{Sg}(\sigma * x)/\mathrm{Sg}(x) = \mathrm{Sg}(\sigma * Y)/\mathrm{Sg}(Y) \in \{\pm 1\}$, באשר $Y \subseteq X$ תקנית. הגדרה זו אינה תלויה ב־Y כי $\mathrm{Sg}(i,j) = -\mathrm{Sg}(j,i), \mathrm{Sg}\sigma * (i,j) = -\mathrm{Sg}\sigma * (j,i)$, ולכן אם נחליף את (i,j) ב־(j,i), לא תשתנה ההגדרה.

תמורה $\sigma \in S_n$ תקרא **זוגית** אם $\mathrm{Sg}(\sigma) = 1$ **ואי זוגית** אם $\mathrm{Sg}(\sigma) = -1$. בפרט (קח $Y = T$) σ זוגית אם ורק אם המספר $|\{(i,j)|\ i<j,\ \sigma(i) > \sigma(j)\}|$ הוא זוגי.

דוגמה 9.8: חישוקון $\sigma = (12)$ הוא אי זוגי.

אכן, יהיו $i < j$. אז $\sigma(i) > \sigma(j)$ אם ורק אם $i = 1, j = 2$. ∎

משפט 9.9: $\mathrm{Sg}(\sigma\tau) = \mathrm{Sg}(\sigma)\mathrm{Sg}(\tau)$.

הוכחה: אם Y תקנית ו־$\sigma \in S_n$ אז לפי ההגדרות $\mathrm{Sg}(\sigma * Y) = \mathrm{Sg}(\sigma)\mathrm{Sg}(Y)$. לכן

$$\mathrm{Sg}(\sigma\tau)\mathrm{Sg}(Y) = \mathrm{Sg}(\sigma\tau * Y) = \mathrm{Sg}(\sigma * (\tau * Y)) = \mathrm{Sg}(\sigma)\mathrm{Sg}(\tau * Y) = \mathrm{Sg}(\sigma)\mathrm{Sg}(\tau)\mathrm{Sg}(Y),$$

ומכאן המסקנה. ∎

מסקנה 9.10: *ההעתקה* $\mathrm{Sg}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ *היא אפימורפיזם (עבור $n > 1$).*

מסקנה 9.11: $A_n = \{\sigma \in S_n|\ \mathrm{Sg}(\sigma) = 1\}$ *היא חבורה חלקית נורמלית ב־S_n מאינדקס 2. נקראת חבורת החילופין.*

מסקנה 9.12: *(א) אם π חישוק מארך k אז $\mathrm{Sg}(\pi) = (-1)^{k-1}$. בפרט,*

(ב) כל חישוקון הוא אי זוגי.

הוכחה: (ב) יהי (kl) חישוקון. יש $\sigma \in S_n$ כך ש־$\sigma(1) = k, \sigma(2) = l$. לפי תרגיל **9.6**, $(kl) = \sigma(12)\sigma^{-1}$, לכן

$$.\mathrm{Sg}(kl) = \mathrm{Sg}(\sigma)\mathrm{Sg}(12)\mathrm{Sg}(\sigma)^{-1} = \mathrm{Sg}(12) = -1$$

(א) $(a_1a_2 \ldots a_k) = (a_ka_1) \cdots (a_3a_1)(a_2a_1)$ הוא מכפלה של $k-1$ חישוקונים. ∎

מסקנה 9.13: *σ זוגית אמ"ם אפשר לכתוב אותה כמכפלה של מספר זוגי של חישוקונים.*

למה 9.14: *A_n נוצרת על ידי החישוקים מארך 3 ב־S_n.*

הוכחה: מצד אחד כל חישוק מארך 3 הינו זוגי ולכן נמצא ב־A_n. מצד שני כל אבר ב־A_n הוא מכפלה של מספר זוגי של חישוקונים, לכן די להראות שמכפלה של שני חישוקונים אפשר לכתוב כמכפלה של חישוקים מאורך 3. ואכן, יהיו i, j, k, l שונים זה מזה, אז

$$(ij)(ij) = 1\ , \qquad (ik)(ij) = (ijk)\ , \qquad (kl)(ij) = (kl)(jk)(jk)(ij) = (jlk)(ikj)\ ,$$

ו־1 הוא מכפלה ריקה של חישוקים. ∎

הגדרה 9.15: חבורה $G\ ne\{1\}$ נקראת **פשוטה** אם אין $N \triangleleft G$, $\{1\} \neq N \neq G$.

דוגמה 9.16: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ פשוטה לכל p ראשוני. S_n אינה פשוטה לכל $n \geq 3$, כי $A_n \triangleleft S_n$ ו־$1 < A_n < S_n$.

משפט 9.17: *A_n פשוטה לכל $n \geq 5$.*

הוכחה: יהי $n \geq 5$ ותהי $N \triangleleft A_n$.

טענה א: *אם N מכילה חישוק מארך 3 אז $N = A_n$.*

נניח $(abc) \in N$. לפי הלמה הקודמת די להראות ש־N מכילה כל חישוק $(a'b'c')$ מאורך 3. נבחר $\sigma \in S_n$ כך ש־$\sigma(a) = a'$, $\sigma(b) = b'$, $\sigma(c) = c'$. אזי $\sigma(abc)\sigma^{-1} = (a'b'c')$, לכן אם $\sigma \in A_n$ אז $(a'b'c') \in N$. אם σ אי זוגית, נבחר d, f שונים מ־a, b, c (אפשר, כי $n \geq 5$) ואז $\tau := \sigma(df) \in A_n$ ו־$\tau(abc)\tau^{-1} = (a'b'c')$. לכן שוב $(a'b'c') \in N$.

טענה ב: *אם $N \neq 1$, יש חישוק מארך 3 ב־N.*

יש $1 \neq \pi \in N$. נכתוב אותו כמכפלה של $r \geq 1$ חישוקים זרים $\pi = \pi_1\pi_2\cdots\pi_r$, מאורכים $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r \geq 2$. יהיו $\pi_1 = (a_1 \ldots a_{k_1}),\ \pi_2 = (a_{k_1+1} \ldots, a_{k_1+k_2}), \ldots$, באשר $a_1, a_2, \ldots, a_n$ סידור של המספרים $1, 2, \ldots, n$.

שיטת ההוכחה: לכל $\sigma \in A_n$ מתקיים $\sigma\pi\sigma^{-1} \in N$ לכן π^{-1},

$$N \ni \pi^{-1}\,\sigma\pi\sigma^{-1} = \pi_r^{-1}\cdots\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}(\sigma\pi_1\sigma^{-1})(\sigma\pi_2\sigma^{-1})\cdots(\sigma\pi_r\sigma^{-1}) =$$
$$= \pi_1^{-1}\pi_2^{-1}\cdots\pi_r^{-1}(\sigma\pi_r\sigma^{-1})\cdots(\sigma\pi_2\sigma^{-1})(\sigma\pi_1\sigma^{-1}).$$

נרצה לבחור σ כך שאיבר זה יהיה חישוק מארך 3. נשים לב שאם σ שומרת כל אות שמופיעה ב־π_i אז לפי תרגיל 9.6, $\sigma\pi_i\sigma^{-1} = \pi_i$. זה מפשט את החישוב לעיל.

נבדיל בין כמה מקרים:

(1) אם $k_1 \geq 4$ או $k_1 = k_2 = 3$, נקח $\sigma = (a_2a_3a_4)$.

1.1 אם $k_1 \geq 5$ אז

$$\pi^{-1}\,\sigma\pi\sigma^{-1} = \pi_1^{-1}\,\sigma\pi_1\sigma^{-1} = (\ldots a_5a_4a_3a_2a_1)(a_1a_3a_4a_2a_5\ldots) = (a_1a_2a_4)$$

1.2 ואם $k_1 = 4$ אז

$$\pi^{-1}\,\sigma\pi\sigma^{-1} = \pi_1^{-1}\,\sigma\pi_1\sigma^{-1} = (a_4a_3a_2a_1)(a_1a_3a_4a_2) = (a_1a_2a_4)$$

1.3 ואם $k_1 = k_2 = 3$ אז

$$\pi^{-1}\,\sigma\pi\sigma^{-1} = \pi_2^{-1}\pi_1^{-1}\,\sigma\pi_1\sigma^{-1}\sigma\pi_2\sigma^{-1} =$$
$$= (a_6a_5a_4)(a_3a_2a_1)(a_1a_3a_4)(a_2a_5a_6) = (a_1a_2a_4a_3a_6)$$

זהו חישוק מאורך 5, ולכן לפי מקרה (1.1) יש חישוק מאורך 3 ב־N.

(2) אם $k_1 = 3, k_2 = \cdots = k_r = 2$ אז $\pi_2^2 = \cdots = \pi_r^2 = 1$, ולכן

$$N \ni \pi^2 = \pi_1^2 = (a_1a_2a_3)^2 = (a_1a_3a_2).$$

(3) אם $k_1 = k_2 \cdots = k_r = 2$, נקח $\sigma = (a_3a_4a_5)$. אז

3.1 אם $r = 2$,

$$\pi^{-1}\,\sigma\pi\sigma^{-1} = (a_4a_3)(a_2a_1)(a_1a_2)(a_4a_5) = (a_4a_3)(a_4a_5) = (a_3a_4a_5)$$

3.2 אם $r \neq 2$, ולכן $r \geq 4$ (כי π זוגית),

$$\pi^{-1}\,\sigma\pi\sigma^{-1} = (a_6a_5)(a_4a_3)(a_2a_1)(a_1a_2)(a_4a_5)(a_3a_6) = (a_3a_5)(a_4a_6)$$

ולכן לפי מקרה (3.1) יש חישוק מאורך 3 ב־N. ∎

משפט 9.18 (Cayley): *תהי G חבורה סופית מסדר n. אזי G איזומורפית לחבורה חלקית של S_n.*

הוכחה: נזהה את הקבוצה G עם הקבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$. אז $S(G)=S_n$ (ראה גם תרגיל בהמשך). נגדיר פעולה של G על עצמה על ידי הכפל משמאל: $\sigma g \mapsto (\sigma,g)$. פעולה זו מגדירה הומומורפיזם $\psi\colon G\to S(G)$ על ידי $\psi(\sigma)(g)=\sigma g$ (משפט 8.12).

$$\operatorname{Ker}\psi=\{\sigma\in G|\ \psi(\sigma)=id\}=\{\sigma\in G|\ g\in G \text{ לכל } \sigma g=g\}=\{1\},$$

לכן ψ חח"ע. ∎

תרגיל 9.19: *אם X,Y קבוצות מאותה העצמה אז $S(X)\cong S(Y)$.*

פתרון: יש $g\colon X\to Y$ חח"ע ועל. נגדיר $\psi\colon S(X)\to S(Y)$ על ידי $f\mapsto gfg^{-1}$. אז ψ מוגדרת היטב (כלומר, $gfg^{-1}\colon Y\to Y$ אכן חח"ע ועל) ושומרת הרכבה. ההעתקה ההפוכה נתונה על ידי $h\mapsto g^{-1}hg$. ∎

10. מכפלות ישרות.

תהיינה $G_1, \dots, G_n$ חבורות. אזי

$$G^* = G_1 \times \cdots \times G_n = \{(g_1, \dots, g_n) |\ g_1 \in G_1, \dots, g_n \in G_n\}$$

היא חבורה ביחס לכפל המוגדר לפי מרכיבים (היחידה: $(e_1, \dots, e_n)$). נקראת **המכפלה הישרה** (**החיצונית**) של $G_1, \dots, G_n$.

קיים הומומורפיזם $G_i \to G_1 \times \cdots \times G_n$ הנתון על ידי

$$g_i \mapsto (e_1, \dots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \dots, e_n).$$

הוא חח"ע. לכן תמונתו G_i^* איזומורפית ל־G_i.

קל לראות (נזניח את הכוכבית *):

(1) $G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$; [ואפילו (1') $G = G_1 \cdots G_n$]

(2) $G_i \triangleleft G$ לכל i;

(3) $G_i \cap \langle G_1, \dots, \widehat{G_i}, \dots, G_n \rangle = \{1\}$;

(4) $xy = yx$ לכל $x \in G_i, y \in G_j$, $i \neq j$;

(5) אם $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_n$, באשר $x_i, y_i \in G_i$ אז $x_i = y_i$ לכל i.

משפט 10.1: *תהי G חבורה ו־$G_1, \dots, G_n \le G$. התנאים הבאים שקולים:*

(א) *קיים איזומורפיזם $G^* = G_1 \times \cdots \times G_n \to G$ אשר מעתיק את G_i^* על G_i.*

(ב)

(1) $G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$.

(2) $G_i \triangleleft G$ *לכל* i;

(3) $G_i \cap \langle G_1, \dots, \widehat{G_i}, \dots, G_n \rangle = \{1\}$.

(ג)

(1) $G = \langle G_1, \dots, G_n \rangle$.

(4) $xy = yx$ *לכל* $x \in G_i, y \in G_j$, $i \neq j$;

(5) *אם* $x_1 \cdots x_n = y_1 \cdots y_n$, *באשר* $x_i, y_i \in G_i$ *אז* $x_i = y_i$ *לכל* i.

הוכחה: (א) $\Leftarrow$ (ב) — ברור.

(ב) $\Leftarrow$ (ג): נראה (4). לפי (2) $x^{-1}y^{-1}xy = (y^{-1})^x y \in G_j$, וגם $x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y \in G_i$, ולפי (3) $G_i \cap G_j = \{1\}$, לכן $x^{-1}y^{-1}xy = 1$. מכאן (4).

נראה (5). אם $x_1\cdots x_n = y_1\cdots y_n$, באשר $x_i, y_i \in G_i$, אז לפי (4) $x_1y_1^{-1}\cdots x_ny_n^{-1} = 1$, לכן $x_iy_i^{-1} \in G_i \cap \langle G_1,\dots,\widehat{G_i},\dots,G_n\rangle$. מכאן $x_iy_i^{-1} = 1$ לפי (3), כלומר, (5) מתקיים.

(ג) $\Leftarrow$ (א): נגדיר העתקה $\theta\colon G^* = G_1\times\cdots\times G_n \to G$ על ידי $\theta(g_1,\dots,g_n) = g_1\cdots g_n$. אז θ הומומורפיזם: אם $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in G^*$ אז לפי (4)

$$\theta((x_1,\dots,x_n)(y_1,\dots,y_n)) = \theta(x_1y_1,\dots,x_ny_n) = x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n =$$
$$x_1\cdots x_ny_1\cdots y_n = \theta(x_1,\dots,x_n)\theta(y_1,\dots,y_n).$$

θ חח"ע לפי (5).

כמו כן $\theta(G_i^*) = G_i$. בפרט $\langle G_1,\dots,G_n\rangle \le \theta(G^*)$, לכן לפי (1) θ על. ∎

הגדרה 10.2: אם התנאים של המשפט מתקיימים, G נקראת **מכפלה ישרה** (**פנימית**) של $G_1,\dots,G_n$ ונכתוב $G = G_1\times\cdots\times G_n$. אם הפעולות של $G_1,\dots,G_n$ הן חיבור, נכתוב בד"כ $G_1\oplus\cdots\oplus G_n$ (סכום ישר) במקום $G_1\times\cdots\times G_n$. קל לראות ש-$G_1\times\cdots\times G_n$ חילופית אם $G_1,\dots,G_n$ חילופיות.

דוגמה 10.3: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ היא חבורת קליין. אם $m,n\in\mathbb{N}$ זרים אז $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ (המכפלה היא חילופית, מסדר mn, והאבר $([1],[1])$ מסדר mn.)

למה 10.4: *תהי G חבורה סופית ו-$G_1,\dots,G_n \lhd G$. נניח שהמספרים $|G_1|,\dots,|G_n|$ זרים בזוגות ומתקיים $|G| = |G_1|\cdots|G_n|$. אז*

(א) $G = G_1\times\cdots\times G_n$;

(ב) $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(G_1)\times\cdots\times\mathrm{Aut}(G_n)$.

הוכחה:

(א) תחלה נעיר שאם $A,B \le H$ מסדרים זרים אז $A\cap B = \{1\}$, כי $|A\cap B|$ מחלק הן את $|A|$ והן את $|B|$. אם גם $A\lhd H$, אז $AB \le H$ מסדר $|A|\cdot|B|$, כי לפי משפט האיזומורפיזם השני $AB/A \cong B/(A\cap B)$. לכן (באינדוקציה על n):

(1) $G_1\cdots G_n \le G$ מסדר $|G_1|\cdots|G_n| = |G|$, לכן $G = G_1\cdots G_n$.

(3) $G_i\cdots\widehat{G_i}\cdots G_n$ מסדר $|G_1|\cdots|\widehat{G_i}|\cdots|G_n|$, שהנו זר ל-$|G_i|$. מכאן $G_i\cap(G\cdots\widehat{G_i}\cdots G_n) = 1$.

(ב) קודם נוכיח

טענה: *$\alpha(G_i) = G_i$ לכל $\alpha\in\mathrm{Aut}(G)$ ולכל i.*

אכן, $\alpha(G_i)/G_i\cap\alpha(G_i) \cong \alpha(G_i)G_i/G_i \le G/G_i$, לכן $|\alpha(G_i)/G_i\cap\alpha(G_i)|$ מחלק את

$$(G:G_i) = |G_1|\cdots|\widehat{G_i}|\cdots|G_n|$$

ולכן הנו זר ל־$|G_i|$. אך הוא גם מחלק את $|G_i| = |\alpha(G_i)|$. לכן $\alpha(G_i)/G_i \cap \alpha(G_i) = 1$, ומכאן $\alpha(G_i) = G_i \cap \alpha(G_i)$. בפרט $\alpha(G_i) \leq G_i$ ומשויון הסדרים $\alpha(G_i) = G_i$.

מהטענה נובע שהצמצום α_i של α ל־G_i שייך ל־$\mathrm{Aut}(G_i)$. נגדיר העתקה $\varphi\colon \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{Aut}(G_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(G_n)$ על ידי $\varphi(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. אזי:

(1) φ הומומורפיזם [אם $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(G)$ אז הצמצום של $\alpha\beta$ ל־G_i הוא מכפלת הצמצומים של α, β ל־G_i].

(2) φ חח"ע: אם $\varphi(\alpha) = (1, \ldots, 1)$ אז הצמצום של α ל־G_i הוא זהות ולכן α הינו זהות על $G = G_1 \cdots G_n$.

(3) φ על: אם $\alpha_i \in \mathrm{Aut}(G_i), i = 1, \ldots, n$, נגדיר העתקה $\alpha\colon G \to G$ באופן הבא: $\alpha(g_1 \cdots g_n) = \alpha_1(g_1) \cdots \alpha_n(g_n)$ באשר $g_i \in G_i$. זוהי הגדרה טובה (כי לכל $g \in G$ יש הצגה יחידה $g = g_1 \cdots g_n, g_i \in G_i$), α הומומורפיזם (בדוק), והוא חח"ע (בדוק). לכן $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ וברור ש־$\varphi(\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. ∎

מסקנה 10.5: *יהי m טבעי ויהי $m = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ פירוקו לחזקות של מספרים ראשוניים שונים. אז*

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_k^{n_k}\mathbb{Z}$$

ו־$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p_k^{n_k}\mathbb{Z})$.

משפט 10.6:

(א) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

(ב) *$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ עבור p ראשוני.*

(ג) *$(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^{r-1}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^{r-1}(p-1)\mathbb{Z}$ מעגלית עבור p ראשוני $\neq 2$.*

(ד) *$(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2^{r-2}\mathbb{Z}$ עבור $r \geq 2$.*

הוכחה:

(א) נגדיר פעולה של $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ על $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ על ידי $x * y = xy$. פעולה זו מגדירה הומומורפיזם $\varphi\colon (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \to S(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ על ידי $\varphi(x)(y) = xy$. ההעתקה $\varphi(x)$ היא הומומורפיזם (שומרת חיבור), כי $x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2$; היא תמורה, כלומר חח"ע ועל, לכן $\varphi(x) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$.

φ חח"ע: אם $x \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ אז $xy = y$ לכל $y \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, לכן (קח $y = [1]$) $x = [1]$.

φ על: יהי $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. נסמן $x = \alpha([1])$ ונראה ש־$x \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ ו־$\alpha = \varphi(x)$. לכל $y = [k] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ מתקיים $\alpha(y) = \alpha(k[1]) = k\alpha([1]) = kx = k[1]x = yx = xy$ כלומר, $\alpha = \varphi(x)$, בתנאי שנראה כי $x \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. יהי $y = \alpha^{-1}([1])$, אז $[1] = \alpha(\alpha^{-1}([1])) = \alpha(y) = xy$, ולכן $x \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

(ב) $|(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times| = p-1$, ו־$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ מעגלית. (משפט שלא הוכח: כל תת חבורה סופית של החבורה הכפלית של שדה היא מעגלית.)

(ג,ד) לא נוכיח. רק נציין ש־ $|(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})^\times| = p^r - p^{r-1} = (p-1)(p^r-1)$.

דוגמה 10.7:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2^2\cdot 3^3\cdot 7\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/2^2\cdot 3^3\cdot 7\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/2^2\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/3^3\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \cong$$
$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/3^2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$$

סדרה נורמלית מאורך m של חבורה G היא סדרה סופית

$$\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_m = G \tag{1}$$

(לא בהכרח $G_i \lhd G$ לכל i; לא בהכרח $G_{i-1} \neq G_i$). אם $G_{i-1} \neq G_i$ לכל i, אומרים שהסדרה היא **ללא חזרות.**

החבורות G_i/G_{i-1} נקראות **מנות הסדרה.**

סדרה נורמלית נוספת

$$\{1\} = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = G \tag{2}$$

תקרא **שקולה** ל־(1) אם לשתיהן אותו האורך ואותן המנות, עד כדי הסדר, כלומר, אם $m = n$ ואם קיימת תמורה $i \mapsto j$ של S_n כך שלכל $1 \leq i \leq n$ $G_i/G_{i-1} \cong H_j/H_{j-1}$.

(2) תקרא **עידון** של (1) אם כל ה־G_i־ים מופיעים בין ה־H_j־ים.

דוגמה 11.1: $\{1\} \lhd \langle(12)(34)\rangle \lhd K \lhd S_4$; כאן $K = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

מנות הסדרה $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, S_4/K \cong S_3$.

סדרה נוספת: $\{1\} \lhd A_4 \lhd S_4$; מנות הסדרה $A_4, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

עידון לשתיהן: $\{1\} \lhd \langle(12)(34)\rangle \lhd K \lhd A_4 \lhd S_4$; מנות הסדרה $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

אם $\langle\sigma\rangle$ חבורה מעגלית מסדר 6 אז $\{1\} \lhd \langle\sigma^2\rangle \lhd \langle\sigma\rangle$, $\{1\} \lhd \langle\sigma^3\rangle \lhd \langle\sigma\rangle$ שקולות (לשתיהן מנות הסדרה $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$), אבל אין להן עידון משותף.

משפט 11.2 (Schreier): *לכל שתי סדרות נורמליות של אותה החבורה קיימים עידונים שקולים זה לזה.*

הוכחה: תהיינה (1), (2) — לעיל — שתי סדרות נורמליות של G. נסמן $G_{i,j} = G_{i-1}(G_i \cap H_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$. אז

$$G_{i-1} = G_{i,0} \subseteq G_{i,1} \subseteq \cdots \subseteq G_{i,n} = G_i.$$

באופן דומה נגדיר $H_{i,j} = H_{j-1}(G_i \cap H_j)$, $i = 0, 1, \ldots, m$ אז

$$H_{j-1} = H_{0,j} \subseteq H_{1,j} \subseteq \cdots \subseteq H_{m,j} = H_j.$$

לפי למת הפרפר 7.20, $G_{i,j-1} \lhd G_{i,j}$, $H_{i-1,j} \lhd H_{i,j}$ ומתקיים

$$G_{i,j}/G_{i,j-1} \cong H_{i,j}/H_{i-1,j}. \tag{3}$$

לכן

$$\begin{array}{rcccccccl}
\{1\} = G_0 = & G_{1,0} & \triangleleft & G_{1,1} & \triangleleft & \cdots & \triangleleft & G_{1,n} & = G_1 = \\
= & G_{2,0} & \triangleleft & G_{2,1} & \triangleleft & \cdots & \triangleleft & G_{2,n} & = G_2 = \\
\cdots = & G_{m,0} & \triangleleft & G_{m,1} & \triangleleft & \cdots & \triangleleft & G_{m,n} & = G_m = G \\
\{1\} = H_0 = & H_{0,1} & \triangleleft & H_{1,1} & \triangleleft & \cdots & \triangleleft & H_{m,1} & = H_1 = \\
= & H_{0,2} & \triangleleft & H_{1,2} & \triangleleft & \cdots & \triangleleft & H_{m,2} & = H_2 = \\
\cdots = & H_{0,n} & \triangleleft & H_{1,n} & \triangleleft & \cdots & \triangleleft & H_{m,n} & = H_n = H
\end{array}$$

סדרות נורמליות. הן בודאי עידונים של (1), (2) בהתאמה, ויש להן mn אברים (לא כולל $\{1\}$): $\{H_{i,j}, G_{i,j}\}_{i=1}^{m}{}_{j=1}^{n}$. הן שקולות לפי (3). ∎

מסקנה 11.3: *אם (1), (2) ללא חזרות, יש להן עידונים שקולים ללא חזרות.*

הוכחה: לפי המשפט לסדרות (1), (2) עידונים שקולים. נשמיט מהם אברים שמופיעים יותר מפעם אחת ("חזרות"); מנות הסדרה המתאימות להם טריויאליות ובשני העידונים בהכרח אותו מספר של אברים כאלה, כי העידונים שקולים. לכן אחרי ההשמטה עידונים יישארו שקולים. ∎

הגדרה 11.4: **סדרת הרכב** היא סדרה נורמלית ללא חזרות שאין לה עידון ללא חזרות (פרט לעצמה).

הערה 11.5: לחבורה סופית יש, כמובן, סדרת הרכב. ל־$\mathbb{Z}$ אין סדרת הרכב.

מהמסקנה נובע מידית:

משפט 11.6 (Jordan-Hölder): *אם לחבורה G יש סדרת הרכב אז כל שתי סדרות הרכב שלה שקולות.*

לפי משפט זה ־ אם ל־G יש סדרת הרכב ־ מנות סדרת הרכב של G אינן תלויות בסדרת הרכב. הם נקראות **מנות ההרכב** של G.

למה 11.7: *תהי (1) סדרה נורמלית. התנאים הבאים שקולים:*

(א) *(1) סדרת הרכב.*

(ב) G_{i-1} *נורמלית מקסימלית ב־* G_i *(כלומר:* $G_{i-1} < G_i$ *ואין* $G_{i-1} < H < G_i$ *כך ש־* $H \triangleleft G_i$*)*, $i = 1, \dots m$.

(ג) $G_i/G_{i-1} \neq \{1\}$ *חבורה פשוטה*, $i = 1, \dots m$.

הוכחה:

(א) $\Leftrightarrow$ (ב): ברור.

(ב) $\Leftrightarrow$ (ג): לפי משפט האיזומורפיזם השלישי

(ב)$\Leftrightarrow$ $G_{i-1}/G_{i-1} < G_i/G_{i-1}$ ואין $G_{i-1}/G_{i-1} < B < G_i/G_{i-1}$ כך ש־$B \triangleleft G_i/G_{i-1}$

$\Leftrightarrow$ $\{1\} < G_i/G_{i-1}$ ואין $\{1\} < B < G_i/G_{i-1}$ כך ש־$B \triangleleft G_i/G_{i-1}$ $\Leftrightarrow$ (ג)

תרגיל 11.8: *חבורה חילופית G היא פשוטה אם ורק אם היא מעגלית מסדר ראשוני.*

(אם היא פשוטה, יהי $G \ni g \neq 1$. אז $1 < \langle g \rangle \lhd G$, לכן $G = \langle g \rangle$. אם $\mathrm{ord}(g)$ אינו ראשוני (או אם הוא אינסופי), יש ל־G חבורה חלקית ממש.

הגדרה 11.9: חבורה (סופית) נקראת **פתירה** אם כל מנות ההרכב שלה חילופיות.

למה 11.10: *תהי G חבורה סופית ותהי $K \lhd G$. אז G פתירה אם ורק אם $K, G/K$ פתירות.*

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות $K \neq \{1\}, G$, אחרת הטענה טריוויאלית. די להראות שסדרת מנות ההרכב של G היא הצירוף של סדרת מנות ההרכב של K סדרת מנות ההרכב של G/K.

לסדרה הנורמלית $\{1\} \lhd K \lhd G$ יש עדון לסדרת הרכב. כלומר, יש סדרת הרכב (1), בה $G_k = K$ עבור איזה $0 < k < m$. אז $\{1\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_k = K$ סדרת הרכב של K שמנותיה $G_1/G_0, \ldots, G_k/G_{k-1}$, ואילו $\{1\} = K/K = G_k/K \lhd G_{k+1}/K \lhd \cdots \lhd G_m/K = G/K$ סדרת הרכב של G/K שמנותיה, לפי משפט האיזומורפיזם השלישי, הן $G_{k+1}/G_k, \ldots, G_m/G_{m-1}$. ∎

משפט 11.11 (Feit-Thompson, 1963): *כל חבורה מסדר אי זוגי הנה פתירה.*

לא ניתן הוכחה למשפט זה (וגם לא נסתמך עליו בעתיד.) ההוכחה המקורית שלו משתרעת על פני 255 עמודים. עד כמה שידוע לי, לא הצליחו לקצר אותה מאז באופן משמעותי.

מהמשפט נובע בפרט, שכל חבורה סופית פשוטה לא חילופית הינה מסדר זוגי.

הערה 11.11: מיון חבורות סופיות פשוטות. שאלה חשובה במתמטיקה היתה, מהן כל החבורות הסופיות הפשוטות ("מיון החבורות הפשוטות"). מלבד החבורות המעגליות מסדר ראשוני ומלבד $\{A_n\}_{n=5}^{\infty}$ ידועות עוד כמה משפחות אינסופיות של חבורות פשוטות. (למשל החבורות $\mathrm{PSL(n,q)} = \mathrm{SL_n(\mathbb{F}_q)}/\mathbb{F}_\mathrm{q}^\times$ עבור $n > 2$ או $q > 3$, באשר $\mathbb{F}_q$ שדה בן q אברים, כאשר את אבריו רואים גם כמטריצות סקלריות.) בנוסף אליהן היו ידועות עוד חבורות פשוטות בודדות ("ספוראדיות").

תוך כדי המאמץ להוכיח שאלה כל החבורות הסופיות הפשוטות, מצאו חוקרים במחצית השניה של המאה ה־20 חבורות ספוראדיות נוספות, 26 בסך הכל.

משפט Feit-Thompson היה אבן דרך במיון החבורות הפשוטות.

בתחילת שנות ה־80 הודיע צוות של מתמטיקאים שהם הצליחו במשימה זו: החבורות הפשוטות המוכרות הן כל החבורות הפשוטות.

יש לציין שעדיין אין הוכחה כתובה **מלאה** (אולי בגלל שרוב המומחים עזבו את השטח מאז שהוא איבד מיוקרתו) ולכן יש כאלה שאינם מקבלים את המיון כסגור (בעקר חתן פרס וולף ז'אן־פייר סֵר).

12. חבורות־p.

יהי p מספר ראשוני. חבורה G נקראת **חבורת־p** אם $|G|$ הוא חזקה של p. בפרט G כזו סופית.

למה 12.1: *חבורה חלקית וחבורת מנה של חבורת־p היא חבורת־p. מכפלה ישרה של חבורות־p היא חבורת־p.*

משפט 12.2: *תהי $G \neq \{1\}$ חבורת־p. אז $Z(G) \neq \{1\}$ (=המֶרכז של G).*

הוכחה: לפי נוסחת המחלקות (מסקנה 8.11) $|G| = \sum_{i\in I'}(G : C_G(x_i)) + |Z(G)|$, באשר $\{x_i\}_{i\in I'}$ היא מערכת מיצגים של מחלקות הצמידות ב־G בעלות יותר מאבר אחד. גם $|G|$ וגם $(G : C_G(x_i))$ הם חזקות של p, לא טריוויאליות (כי $x_i \notin Z(G)$, לכן $C_G(x_i) \neq G$), לכן הם מתחלקים ב־p. מכאן ש־$|Z(G)|$ מתחלק ב־p, ובפרט $Z(G) \neq \{1\}$. ∎

מסקנה 12.3: *כל חבורה G מסדר p^2 היא חילופית.*

הוכחה: יהי $1 \neq a \in Z(G)$. אם $G = \langle a\rangle$ אז G מעגלית ולכן חילופית. אחרת יש $b \in G \smallsetminus \langle a\rangle$. אז $G \geq \langle a, b\rangle > \langle a\rangle > \{1\}$. היות ו־$|G| = p^2$, גם $|\langle a, b\rangle| = p^2$, ולכן $G = \langle a, b\rangle$. הואיל ו־$ab = ba$, G חילופית. ∎

למה 12.4: *תהי G חבורת־p ותהי $U < G$. אזי $U < N_G(U) = \{g \in G|\ g^{-1}Ug = U\}$.*

הוכחה: ברור ש־$U \leq N_G(U)$. לכן די למצוא $g \in G \smallsetminus U$ כך ש־$g^{-1}Ug = U$.

נגדיר פעולה של U על הקבוצה $X = \{gU|\ g \in G\}$ על ידי הכפל משמאל: $\pi(u, gU) = ugU$. לפי מסקנה 8.9

$$|X| = \sum_{i\in I'}(U : U_{x_i}) + |X_0| \,,$$

באשר $X_0 = \{gU \in X|\ ugU = gU$ לכל $u \in U\}$ ו־$\{x_i\}_{i\in I'}$ מיצגים מסלולי־U מאורך $(U : U_{x_i}) > 1$. גם $|X| = (G : U) > 1$, כי $U < G$. כמו כן $(U : U_{x_i})$ מחלק את $|U|$ ולכן את $|G|$, וגם $|X| = (G : U)$ מחלק את $|G|$, לכן שניהם חזקות של p. לכן שניהם חזקות לא טריוויאליות של p, ובפרט מתחלקים ב־p. מכאן שגם $|X_0|$ מתחלק ב־p, ובפרט $|X_0| \geq 2$.

כיון שבבירור $U = eU \in X_0$, זה אומר שיש $g \in G$ כך ש־$gU \neq U$ ו־$ugU = gU$ לכל $u \in U$. התנאי הראשון אומר ש־$g \in G \smallsetminus U$. התנאי השני שקול ל־$g^{-1}Ug = U$:

$$ugU = gU \text{ לכל } u \in U \Leftrightarrow g^{-1}ug \in U \text{ לכל } u \in U \Leftrightarrow g^{-1}Ug \subseteq U \Leftrightarrow g^{-1}Ug = U$$

כאשר השקילות הראשונה נובעת מלמה 5.8, והאחרונה מכך ש־$|g^{-1}Ug| = |U|$. ∎

משפט 12.5: *תהי G חבורת־p ותהי U חבורה חלקית מרבית שלה (כלומר $U < G$ ואין $U < H < G$). אזי*

(א) $U \lhd G$.

(ב) $(G : U) = p$.

(ג) *ל־G סדרת הרכב שכל גורמיה מעגליים מסדר p. בפרט G פתירה.*

הוכחה:

(א) לפי הלמה $U < N_G(U) \leq G$, לכן $N_G(U) = G$, כלומר $U \lhd G$.

(ב) G/U חבורת־p שונה מ־$\{1\}$, וחבורות חלקיות שלה מתאימות לפי משפט האיזומורפיזם השלישי לחבורות חלקיות של G המכילות את U. לכן אין לה חבורה חלקית לא טריוויאלית. מכאן ש־G/U מעגלית (כי כל חבורה חלקית $\neq \{1\}$ מעגלית שלה שווה לה) מסדר ראשוני (כי לחבורה מעגלית יש תת חבורה מסדר d לכל מחלק d של סדרה), כלומר מסדר p (כי היא חבורת־p).

(ג) באינדוקציה נבנה סדרה $G = U_0 > U_1 > \cdots > U_n = \{1\}$, באשר U_i מרבית ב־U_{i-1}. לפי (א) ו־(ב) זוהי סדרת הרכב. ∎

יהי p מספר ראשוני ותהי G חבורה סופית. חבורה חלקית $P \leq G$ נקראת **חבורת סילוב**־p של G אם $|P|$ הוא החזקה המרבית של p, אשר מחלקת את $|G|$, ז.א., אם $|G| = p^n m$ ו־m זר ל־p אז $|P| = p^n$. כלומר, P חבורת־p ו־$(G : P)$ זר ל־p. בפרט אם $|G|$ זר ל־p אז P חבורת סילוב־p אם ורק אם $P = \{1\}$.

למה 13.1: *תהי G חבורה* ***חילופית*** *סופית. אם p מחלק את $|G|$ אז יש אבר ב־G מסדר p.*

הוכחה: די להוכיח שיש $g \in G$ כך ש־$p \big| \mathrm{ord} g$, כי אז, לפי למה 6.5(ד), $g^{(\mathrm{ord} g)/p}$ הוא מסדר p.

תהי $H \leq G$ תת חבורה מסדר מרבי שסדרה זר ל־p. אז $H \neq G$, לכן יש $g \in G \setminus H$. אז $H < H\langle g \rangle$, לכן $p \big| |H\langle g \rangle|$. מכאן

$$\mathrm{ord} g = |\langle g \rangle| \Big| \frac{|\langle g \rangle|}{|H \cap \langle g \rangle|} = |\langle g \rangle / H \cap \langle g \rangle| = |H\langle g \rangle / H| = \frac{|H\langle g \rangle|}{|H|} \Big| p. \qquad \blacksquare$$

משפט 13.2 (המשפט הראשון של סילוב): *לכל חבורה סופית G יש חבורת סילוב־p.*

הוכחה: באינדוקציה על $|G|$. המקרה $|G| = \{1\}$ טריוויאלי.

(א) אם קיימת $N \lhd G$ כך ש־$N \neq \{1\}$ חבורת־p אז לפי הנחת האינדוקציה יש ל־G/N חבורת סילוב־p; לפי משפט האיזומ' השלישי חבורה זו מהצורה P/N באשר $N \leq P \leq G$. כעת P חבורת־p (כי $P/N, N$ חבורות־p) ו־$(G : P) = (G/N : P/N)$ זר ל־p, לכן P חבורת סילוב־p של G.

(ב) אם קיימת $H < G$ כך ש־$(G : H)$ זר ל־p אז לפי הנחת האינדוקציה יש ל־H חבורת סילוב־p P; היא חבורת־p ו־$(G : P) = (G : H) \cdot (H : P)$ זר ל־p, לכן P גם חבורת סילוב־p של G.

(ג) נניח איפוא ש־$|G| > 1$ ושלכל $H < G$ מתקיים $p \big| (G : H)$. בפרט $p \big| |G| = (G : 1)$ ואם $x \in G \setminus Z(G)$ אז $C_G(x) < G$ ולכן $p \big| (G : C_G(x))$. מנוסחת המחלקות $|G| = \sum_{i \in I'} (G : C_G(x_i)) + |Z(G)|$ נובע ש־$p \big| |Z(G)|$. המרכז הוא חבורה חילופית, לכן לפי הלמה יש $N \leq Z(G)$ מסדר p. אך $N \lhd G$, כי לכל $n \in N$ ולכל $g \in G$ מתקיים $g^{-1} n g = n \in N$. לפי (א) סיימנו. $\blacksquare$

דוגמה 13.3: ל־S_6 יש חבורה חלקית מסדר 9 וחבורה חלקית מסדר 16. ($|S_6| = 6! = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.)

משפט 13.4 (המשפט השני והמשפט השלישי של סילוב): *תהי G חבורה סופית.*

(א) *אם H חבורת־p חלקית של G אז H מוכלת בחבורת סילוב־p של G.*

(ב) *כל חבורות סילוב־p של G צמודות זו לזו.*

(ג) (המשפט השלישי של סילוב) *יהי $n_p(G)$ מספר חבורות סילוב־p של G. אז $n_p(G) \equiv 1 (\bmod p)$.*

הוכחה:

(א) נראה (כביכול) קצת יותר:

(א') תהי P חבורת סילוב־p של G. אז יש $g \in G$ כך ש־$H \leq P^g$ (וכמובן, גם P^g חבורת סילוב־p).

טענה 1: *יהי* $X = \{P^g|\ g \in G\} = \{gPg^{-1}|\ g \in G\}$. *אז* $|X|$ *זר ל־*p. אכן, G פועלת על X על ידי ההצמדה. ברור ש־X היא מסלול־G (של P), ולכן $|X| = (G : G_P)$, באשר $G_P = \{g \in G|\ P^g = P\} = N_G(P)$. אבל $P \leq G_P \leq G$, $(G : P)$ זר ל־p, לכן $|X| = (G : G_P)$ זר ל־p.

חלק 2: חבורת־p H פועלת על X על ידי ההצמדה. לכן $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ באשר X_i מסלול־H, ואם $P_i \in X_i$ אז $|X_i| = (H : H_{P_i})$. לכן $|X_i|$ חזקה של p. אבל $|X| = \sum_i |X_i|$, לכן לפי (1) יש $i \in I$ כך ש־$|X_i| = 1$.

טענה 3: $|X_i| = 1 \Leftrightarrow H \leq P_i$. אכן, אם $H \leq P_i$ אז $P_i^h = P_i$ לכל $h \in H$, ולכן $H_{P_i} = H$. מכאן $|X_i| = (H : H_{P_i}) = 1$.

להיפך, נניח $|X_i| = 1$, אז

$$H = H_{P_i} = \{h \in H|\ P_i^h = P_i\} \leq \{g \in G|\ P_i^g = P_i\} = N_G(P_i).$$

אבל $P_i \triangleleft N_G(P_i)$, לכן $HP_i = \langle H, P_i \rangle \leq G$. כעת $|HP_i| = |H||P_i|/|H \cap P_i|$ הוא חזקה של p. אך P_i חבורת סילוב־p של G ו־$P_i \leq HP_i$, לכן בהכרח $P_i = HP_i$. מכאן $H \leq P_i$.

חלק 4: לפי (2), (3) יש i כך ש־$H \leq P_i$ (ו־$P_i \in X$). זה מוכיח את (א').

כדי להוכיח את (ב) ו־(ג) נניח עתה כי H חבורת סילוב־p של G (ואז $|H| = |P| = |P_i|$).

(ב) לפי (א') יש $g \in G$ כך ש־$H \leq P^g$. משוויון הסדרים נובע $H = P^g$.

(ג) בגלל שוויון הסדרים נובע מ־(3) $|X_i| = 1 \Leftrightarrow H = P_i$, לכל $i \in I$. לכן יש i_0 יחיד כך ש־$|X_{i_0}| = 1$ ו־$|X_i| \neq 1$ לכל $i \neq i_0$. אך $|X_i|$ חזקה של p, לכן $p \big| |X_i|$ לכל $i \neq i_0$. מכאן $|X| = \sum_i |X_i| \equiv 1 (\bmod p)$. ∎

הערה 13.5: תהי P חבורת סילוב־p של G. אז $n_p(G) = (G : N_G(P))$ ובפרט $n_p(G) \big| (G : P)$.

(את החלק הראשון ראינו בהוכחת טענה 1, כאשר לפי (ב) $|X| = n_p(G)$. החלק השני נובע מכך ש־$P \leq N_G(P) \leq G$ ולכן $(G : N_G(P))$ מחלק את $(G : P)$.) זה נותן מידע נוסף אודות $n_p(G)$ על (ג) לעיל. שים לב ש־1 הוא מועמד ל־$n_p(G)$ לפי שני התנאים גם יחד.

הערה 13.6: $n_p(G) = 1$ אם ורק אם יש חבורת סילוב־p נורמלית ב־G.

דוגמה 13.7: כמה חבורות מסדר 5 יש ב־S_5? ־ ($|S_5| = 120 = 5 \cdot 24$.) לפי ההערה מספרן מחלק את 24 ולפי המשפט הוא אחד מהמספרים $1, 6, 11, 16, 21, 26, \ldots$. לכן הוא 6 או 1. אם הוא היה 1, כל אבר מסדר 5 היה מוכל בתת החבורה היחידה מסדר 5 (בה יש בדיוק 4 אברים מסדר 5) ולכן היו רק 4 אברים מסדר 5 ב־S_5. אך יש $24 = 4!$ חישוקים מאורך 5 ב־S_5.

דוגמה 13.8: כמה חבורות מסדר 8 יש ב־S_4? ־ לפי ההערה מספרן מחלק את 3, לכן הנו 1 או 3. (לפי המשפט הוא אי זוגי; אך זה ידענו גם בלי המשפט.) חישוב קל מראה שיש 16 אברים מסדר $2, 4, 8$ או 1. (ביתר פירוט: 6 חישוקים מאורך 4; 3 מכפלות של שני חישוקים זרים; 6 חישוקונים; 1 זהות.) לפי המשפט, כולם מוכלים באיזו חבורת סילוב־2 (מסדר 8), ולכן יש יותר מחבורת סילוב־2 אחת. מספרן איפוא 3. (שים לב שלא יתכן שחיתוך כל שתים מבין שלושתן הוא $\{1\}$, כי אז היו $3 \cdot 7 = 21$ אברים לא טריוויאליים בשלושתן; אך יש רק 15 כאלה.)

למה 13.9: *תהי G חבורה סופית ו־$N \triangleleft G$. תהי P חבורת סילוב־p של G. אזי*

(א) *$P \cap N$ היא חבורת סילוב־p של N.*

(ב) *PN/N היא חבורת סילוב־p של G/N.*

הוכחה: מתקיים $P \leq PN \leq G$. לפי לגרנז' $(G : P) = (G : PN)(PN : P)$ זר ל־p, לכן

(1) $(G : PN), (PN : P)$ זרים ל־p.

לפי משפט האיזומורפיזם השני

(2) $PN/N \cong P/(P \cap N)$ ובפרט $|PN|/|N| = |P|/|P \cap N|$.

(א) $P \cap N \leq P$, לכן $P \cap N$ חבורת־p. לפי (2)

$$(N : (P \cap N)) = |N|/|P \cap N| = |PN|/|P| = (PN : P),$$

לכן לפי (1) $(N : (P \cap N))$ זר ל־p.

(ב) $P/(P \cap N)$ היא מנה של חבורת־p ולכן חבורת־p. לפי (2) גם PN/N חבורת־p. כעת

$$(G/N : PN/N) = (G : PN),$$

לכן לפי (1) $(G/N : PN/N)$ זר ל־p. ∎

תרגיל 13.10: *תהי G חבורה מסדר pq, באשר p, q שני ראשוניים שונים. (א) G פתירה.*

(ב) *אם $p < q$ ו־$q \nmid p - 1$ אז $G \cong \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.*

פתרון: (א) בה"כ $q < p$. ל־G חבורה P מסדר p וחבורה Q מסדר q. כעת $n_p(G) \big| (G : P) = pq/p = q$ ו־$n_p(G) \equiv 1 (\bmod p)$. מכאן $n_p(G) = 1$. לכן $P \triangleleft G$. כעת $P, G/P$ מסדרים ראשוניים, לכן מעגליות, ולכן G פתירה.

(ב) היות ו־p ראשוני, $n_q(G)\big|(G:Q)=pq/q=p$, $n_q(G)=1$ או $n_q(G)=p$. אם $n_q(G)=p$, אז $p\equiv 1(\mod q)$, בסתירה לנתון. לכן $n_q(G)=1$, כלומר, $Q\lhd G$. ברור ש־$P\cap Q=\{1\}$, לכן לפי למה 10.4(א), $G=Q\times P$. מכאן לפי מסקנה 10.5,

$$G=Q\times P\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

תרגיל 13.11: *כל חבורה G מסדר 12 הנה פתירה.*

הוכחה: אם חבורת סילוב־3 של G נורמלית –סיימנו. אחרת יש בדיוק 4 כאלה. זה נותן $4\cdot 2=8$ אברים מסדר 3. נותרו עוד 4 אברים. היות ובכל חבורת סילוב־2 של G יש 4 אברים שלא מסדר 3, יש רק חבורת סילוב־2 אחת; ושוב ־ סיימנו.

תרגיל 13.12: *כל חבורה G מסדר $2^m\cdot 3$ הנה פתירה.*

פתרון: באינדוקציה על m. עבור $m=0,1$ זה ברור. נניח $m\geq 2$. תהי $P\leq G$ חבורת סילוב־2. אז $(G:P)=3$ ו־ $|G|=2^m\cdot 3\nmid 6=3!$, לכן לפי מסקנה 8.13 יש $K\lhd G$ לא טריוויאלית. אז $|K|,|G/K|<|G|$, לכן $K, G/K$ פתירות (מי לפי הנחת האינדוקציה ומי כחבורת־2), ולפי למה 11.10 גם G פתירה.

תרגיל 13.13: *יהי $0\leq m\leq 3$. כל חבורה G מסדר $2^m\cdot 3^n$ הנה פתירה.*

פתרון: באינדוקציה על n (לכל m). עבור $n=0,1$ זה ברור (או ש־G חבורת־2 או לפי התרגיל הקודם). נניח $n\geq 2$. תהי $P\leq G$ חבורת סילוב־3. אם $P\lhd G$ אז $P, G/P$ פתירות כחבורות־p, ולכן G פתירה. אחרת יש בדיוק 4 חבורות סילוב־3 (ו־ $m=2$ או $m=3$). G פועלת עליהן על ידי ההצמדה, וזה נותן הומומורפיזם $\psi\colon G\to S_4$ [$\psi(g)(P_i)=gP_ig^{-1}$]. יהי $K=\operatorname{Ker}\psi$. אז $\psi(G)\neq\{id\}$, כי ארבע חבורות סילוב־2 צמודות זו לזו. כמו כן $K\neq\{1\}$, כי $|S_4|<36=2^2\cdot 3^2\leq|G|$. לכן $K, G/K$ פתירות (לפי הנחת האינדוקציה), ולכן (למה 11.10) גם G פתירה.

תרגיל 13.14: *כל חבורה G מסדר 90 אינה פשוטה. (ואז, בהנחה שכל חבורה מסדר שמחלק ממש 90 הנה פתירה, גם G פתירה).*

הוכחה: בה"כ לכל $p\big|90$ ראשוני מספר חבורות סילוב־p אינו 1. לכן יש 6 חבורות סילוב־5 (=24 אברים מסדר 5); יש 10 חבורות סילוב־3 (והן מסדר 9, לכן חילופיות), וחיתוך כל שתיים מהן לא יכול להיות $\{1\}$, כי אז היו 80 אברים מסדר 3 או 9, סתירה. תהיינה איפוא $P_1,P_2\leq G$ שתי חבורות סילוב־3 כך ש־ $|P_1\cap P_2|=3$. אז $P_1\cap P_2\lhd P_1,P_2$, לכן $P_1\cap P_2\lhd\langle P_1,P_2\rangle$.

(א) אם $\langle P_1,P_2\rangle=G$ אז $P_1\cap P_2\lhd G$ –וסיימנו.

(ב) אם $(G:\langle P_1,P_2\rangle)=2$ אז G $\langle P_1,P_2\rangle \lhd G$ –וסיימנו.

(ג) אם $(G:\langle P_1,P_2\rangle)=5$ אז G פועלת על ידי כפל משמאל על $\{g\langle P_1,P_2\rangle\}$ וזה נותן הומומורפיזם לא טריוויאלי $\psi\colon G\to S_5$, לכן $K=\operatorname{Ker}\psi<G$. גם $K\neq\{1\}$ כי אחרת $G\leq S_5$, סתירה. ∎

משפט 13.15 (משפט קושי): *תהי G חבורה סופית. אם p מחלק את $|G|$ אז יש אבר $g\in G$ מסדר p.*

הוכחה: תהי P חבורת סילוב־p של G. לפי ההנחה, $P\neq\{1\}$. נבחר $1\neq g\in P$. אז $\operatorname{ord}(g)||P|$ חזקה של p ו־$\operatorname{ord}(g)\neq 1$. לכן $p|\operatorname{ord}(g)$. לפי למה 6.5(ד), $g^{\frac{\operatorname{ord}g}{p}}$ מסדר p. ∎

משפט 13.16: *יהי F שדה ותהי G תת חבורה סופית של החבורה הכפלית $F^\times$ של F. אז G מעגלית.*

הוכחה: כיון ש־$F^\times$ חילופית, גם G חילופית. בפרט כל תת חבורה שלה נורמלית ב־G.

יהי $|G|=p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r}$ הפירוק של $|G|$ לחזקות של מספרים ראשוניים שונים. לכל i תהי G_i חבורת סילוב־p_i של G. אז G_i מסדר $p_i^{n_i}$. לפי למה 10.4(א), $G=G_1\times\cdots\times G_r$. אם נראה שכל G_i היא מעגלית, אז $G_i\cong\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$, ולפי מסקנה 10.5, $G\cong\mathbb{Z}/p_1^{n_1}\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}/p_r^{n_r}\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r}\mathbb{Z}$ מעגלית. לכן די להניח כי G חבורת־p.

יהי $g\in G$ בעל הסדר הגדול ביותר. הסדר הזה מחלק את $|G|$, לכן הוא חזקה של p, נאמר, $\operatorname{ord}(g)=p^r$. יהי $x\in G$, אז $\operatorname{ord}(x)$ גם חזקה של p, אבל $\operatorname{ord}(x)\leq p^r$, ולכן $\operatorname{ord}(x)|p^r$. מכאן ש־$x^{p^r}=1$, ולכן x הוא שרש של הפולינום $X^{p^r}-1\in F[X]$. אך לפולינום זה לכל היותר p^r שרשים שונים ב־F (משפט שלומדים בדרך כלל באלגברה לינארית 2), לכן $|G|\leq p^r$. כיון ש־$\operatorname{ord}(g)||G|=p^r$, יוצא ש־$|G|=p^r=\operatorname{ord}(g)=|\langle g\rangle|$. מכאן שההכלה $\langle g\rangle\leq G$ היא שוויון. לכן G מעגלית. ∎

הגדרה 14.1: תהי A חבורה חילופית (בכתיב חיבורי). אזי

(א) $A^t = \{a \in A | \operatorname{ord} a < \infty\}$ נקראת **חבורת הפיתול של** A.

(ב) A נקראת **חבורת פיתול** אם $A = A^t$.

(ו) A נקראת **חסרת פיתול** אם $A^t = \{0\}$.

למה 14.2: *(א) $A^t \leq A$ תת חבורה.*

(ב) A/A^t חסרת פיתול.

(ג) אם A חבורת פיתול חילופית נוצרת סופית אז A סופית.

הוכחה: (בכתיב חיבורי!)

(א) ברור ש־$0 \in A^t$. יהיו $a, b \in A^t$. אז יש $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש־$ma = nb = 0$. מכאן

$$mn(a+b) = mna + mnb = n(ma) + m(nb) = 0,$$

לכן $a + b \in A^t$. כמו כן $m(-a) = -(ma) = -0 = 0$, לכן $-a \in A^t$.

(ב) צריך להוכיח לכל $a \in A$: אם $a + A^t$ מסדר $n < \infty$ ב־A/A^t אז $a + A^t = A^t$, כלומר $a \in A^t$. ואכן, $n(a + A^t) = A^t$, לכן $na \in A^t$, כלומר, יש $m \in \mathbb{N}$ כך ש־$m(na) = 0$. מכאן $a \in A^t$.

(ג) באינדוקציה על מספר היוצרים n של A. אם $A = \langle a \rangle$ אז A מעגלית ו־$|A| = \operatorname{ord}(a) < \infty$.

נניח $A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. לפי הנחת האינדוקציה $B = \langle a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$ סופית. כעת $A = B + \langle a_n \rangle$, לכן לפי משפט האיזומורפיזם השני $|A/B| = |\langle a_n \rangle / B \cap \langle a_n \rangle| \leq |\langle a_n \rangle| < \infty$. מכאן לפי נוסחת לגרנז' $|A| = (A : B) \cdot |B| < \infty$. ∎

דוגמאות 14.3: (א) כל חבורה סופית היא חבורת פיתול.

(ב) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ חסרות פיתול.

(ג) $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ חבורת פיתול אינסופית (לכל $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ מתקיים $n\frac{m}{n} = m \in \mathbb{Z}$).

(ד) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ אינה חבורת פיתול ואינה חסרת פיתול.

הגדרה 14.4: תהי F חבורה חילופית. סדרה $v_1, \ldots, v_n$ של אברי F נקראת **בסיס** של F אם לכל $v \in F$ יש הצגה יחידה מהצורה

$$v = m_1 v_1 + \cdots + m_n v_n, \quad m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

חבורה חילופית נוצרת סופית F נקראת **חפשית** אם יש לה בסיס.

משפט 14.5: *תהי F חפשית עם בסיס $v_1,\dots,v_n$. תהי A חילופית ויהיו $a_1,\dots a_n \in A$. אזי קים הומומורפיזם יחיד $\varphi\colon F\to A$ כך ש־ $\varphi(v_i)=a_i$ לכל i. בפרט, אם $A=\langle a_1,\dots a_n\rangle$ אז $A\cong F/\operatorname{Ker}\varphi$.*

הוכחה: נגדיר φ על ידי $\varphi(m_1v_1+\cdots+m_nv_n)=m_1a_1+\cdots+m_na_n$, לכל $m_1,\dots,m_n\in\mathbb{Z}$. זוהי הגדרה טובה, לפי הגדרת בסיס. ברור ש־φ הומומורפיזם, ויחיד כך ש־$\varphi(v_i)=a_i$ לכל i. ∎

למה 14.6: *תהי F חבורה חילופית. סדרה $v_1,\dots,v_n$ בסיס של F אם ורק אם*

(2) $F=\langle v_1\rangle\oplus\cdots\oplus\langle v_n\rangle$ ו־

(3) $\langle v_i\rangle\cong\mathbb{Z}$ לכל i.

הוכחה: לפי משפט 10.1(ג), (2) שקול ל־

(א) $F=\langle\langle v_1\rangle,\dots,\langle v_n\rangle\rangle$. [כלומר: לכל $v\in F$ הצגה (1), אולי לא יחידה.]

(ב) $g_ig_j=g_jg_i$ לכל $g_i\in\langle v_i\rangle$, $g_j\in\langle v_j\rangle$, עבור $i\ne j$; [מתקיים כי F חילופית.]

(ג) אם $x_1+\cdots+x_n=y_1+\cdots+y_n$ באשר $x_i,y_i\in\langle v_i\rangle$ אז $x_i=y_i$ לכל i; כלומר

(ג') אם $m_1v_1+\cdots+m_nv_n=m'_1v_1+\cdots+m'_nv_n$ אז $m_iv_i=m'_iv_i$ לכל i.

ואילו (3) שקול ל־$\mathrm{ord}v_i=\infty$, כלומר $k_iv_i=0 \Leftarrow k_i=0$, כלומר

(3') אם $m_iv_i=m'_iv_i$ אז $m'_i=m_i$.

כעת, (א) שקול לקיום ההצגה (1) [אך לא ליחידותה] ואילו (ג'), (3') שקולים ליחידות של (1) (עבור (1) $\Leftarrow$ (3') קח $m_j=0$ לכל $j\ne i$). ∎

מסקנה 14.7: *חבורה חילופית F חפשית אם ורק אם $F\cong F_n:=\overbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}^{n}$.*

תרגיל 14.8: *תהי F חילופית ותהי $v_1,v_2,\dots,v_n$ סדרת יוצרים [בסיס] של F. יהיו $k_2,\dots,k_n\in\mathbb{Z}$. אז גם*

$$v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n,v_2,\dots,v_n$$

סדרת יוצרים [בסיס] של F.

פתרון: יהי $v\in A$. עלינו להוכיח שיש $m'_1,\dots,m'_n\in\mathbb{Z}$ [יחידים] כך ש־

$$\begin{aligned} v&=m'_1(v_1+k_2v_2+\cdots+k_nv_n)+m'_2v_2+\cdots+m'_nv_n\\ &=m'_1v_1+(k_2m'_1+m'_2)v_2+\cdots+(k_nm'_1+m'_n)v_n \end{aligned} \tag{4}$$

ואכן, יש $m_1,\dots,m_n\in\mathbb{Z}$ [יחידים] כך שמתקיים (1). נגדיר

$$\begin{aligned} m'_1&=m_1\\ m'_2&=m_2-k_2m_1\\ \cdots&\qquad\cdots\\ m'_n&=m_n-k_nm_1 \end{aligned}$$

ואז מתקיים (4). [וכאשר (1) הצגה יחידה, זאת ההגדרה היחידה האפשרית.] ∎

משפט 14.9: *אם A חבורה חילופית נוצרת סופית וחסרת פיתול אז A חפשית.*

הוכחה: יהי n מזערי עבורו יש סדרת יוצרים בת n אברים ל־A. נראה שיש בסיס בן n אברים.

אחרת לכל סדרת יוצרים $v_1, \dots, v_n$ יש $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$, לא כולם 0, כך ש־

$$.m_1 v_1 + \cdots + m_n v_n = 0$$

נבחר סדרת יוצרים $v_1, \dots, v_n$ עם $\delta(v_1, \dots, v_n) := |m_1| + \cdots + |m_n|$ מזערי.

אם יש i יחיד כך ש־$m_i \neq 0$, אז $m_i v_i = 0$ ולכן (A חסרת פתול) $v_i = 0$. אז גם $v_1, \dots, \widehat{v_i} \dots, v_n$ סדרת יוצרים, סתירה למזעריות של n.

אם i כזה אינו יחיד, אז בה"כ $m_1, m_2 \neq 0$. בה"כ $|m_1| \leq |m_2|$ ובה"כ $m_1 > 0$ (אחרת נכפיל כל m_i ב־(-1)). חילוק עם שארית נותן

$$.m_2 = m_1 q + r, \qquad 0 \leq r < m_1 = |m_1| \leq |m_2|$$

לכן

$$m_1(v_1 + q v_2) + r v_2 + m_3 v_3 + \cdots + m_n v_n = 0$$

ולפי תרגיל 14.8 גם $v_1 + q v_2, v_2, v_3, \dots, v_n$ סדרת יוצרים של A. עבורה

$$\delta(v_1 + q v_2, v_2, \dots, v_n) \leq |m_1| + r + |m_3| + \cdots + |m_n| < \delta(v_1, \dots, v_n)$$

סתירה למזעריות. ∎

משפט 14.10: *אם $v_1, \dots, v_n$ בסיס (די להניח שהיא בלתי תלויה), ו־$u_1, \dots, u_k$ סדרת יוצרים, אז $n \leq k$.*

הוכחה: יש הצגות

$$\begin{array}{llll} v_1 & = m_{11} u_1 + & \cdots & + m_{1k} u_k \\ \vdots & \quad \vdots & & \quad \vdots \\ v_n & = m_{n1} u_1 + & \cdots & + m_{nk} u_k \end{array}$$

נניח בשלילה $n > k$. אז שורותיה של המטריצה $(m_{ij}) \in \mathrm{M}_{n \times k}(\mathbb{Q})$ תלויות לינארית מעל $\mathbb{Q}$. לכן יש $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{Q}$, לא כולם 0, כך ש־

$$.\epsilon_1(m_{11}, \dots, m_{1k}) + \cdots + \epsilon_n(m_{n1}, \dots, m_{nk}) = 0$$

בה"כ $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathbb{Z}$ (אחרת נכפיל אותם במכנה משותף). מתקיים $\epsilon_1 v_1 + \cdots + \epsilon_n v_n = 0$, בסתירה לאי תלות (יחידות ב־(1)). ∎

הגדרה 14.11: עבור חבורה נוצרת סופית G תהי $\operatorname{rk} G = \min\{|S| \mid G = \langle S\rangle\}$ **הדרגה** של G.

מסקנה 14.12: *לכל הבסיסים של חבורה חילופית חפשית* F *אותו מספר אברים:* $\operatorname{rk} F$.

משפט 14.13 (משפט החבורות החלקיות של החבורה החילופית החפשית F_n): *תהי* $H \le F_n$. *אזי* H *חילופית חפשית: קיים בסיס* $v_1, \dots, v_n$ *של* F_n *וקיימים* $0 \le k \le n$ *ו־* $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \mathbb{N}$ *כך ש־* $\epsilon_1 \big| \epsilon_2 \big| \cdots \big| \epsilon_k$ *ו־* $\epsilon_1 v_1, \dots, \epsilon_k v_k$ *בסיס של* H.

הוכחה: אם $H = \{0\}$, המשפט ברור ($k = 0$); בפרט המשפט נכון עבור $n = 0$. נניח $n \ge 1$ ונניח נכונות עבור $n - 1$. בה"כ $H \ne \{0\}$.

א. טענה: *יש* $u_1, \dots, u_n, v \in F_n$ *כך ש־*

(5) $u_1, \dots, u_n$ בסיס של F_n, $\quad v \in H$, $\quad v = m_1u_1 + m_2u_2 + \cdots + m_nu_n$, $\quad m_1 > 0$.

אכן, נבחר בסיס $u_1, \dots, u_n$ כלשהו ו־ $0 \ne v \in H$. אז $v = m_1u_1 + m_2u_2 + \cdots + m_nu_n$. יש i כך ש־ $m_i \ne 0$; בה"כ $i = 1$. אם $m_1 < 0$ נחליף את v ב־ $(-v)$.

ב: יהי $\epsilon_1 = \min\{m_1 \mid (5) \text{ ומתקיים } u_1, \dots, u_n, v \in F_n\}$.

טענה: *יש בסיס* $u_1, \dots, u_n$ *של* F_n *כך ש־* $\epsilon_1 u_1 \in H$.

אכן, יש $u_1, \dots, u_n, v$ כך שמתקיים (5) ו־ $m_1 = \epsilon_1$. נחלק עם שארית:

$$m_i = \epsilon_1 q_i + r_i, \qquad 0 \le r_i < \epsilon_1, \qquad i = 2, \dots, n$$

ונגדיר $u_1' = u_1 + q_2u_2 + \cdots + q_nu_n$. אז $u_1', u_2, \dots, u_n$ בסיס של F_n (תרגיל 14.8) ומתקיים

$$v = \epsilon_1 u_1' + r_2u_2 + \cdots + r_nu_n.$$

בגלל המזעריות של ϵ_1 מתקיים $r_2 = \cdots = r_n = 0$, ולכן $v = \epsilon_1 u_1'$.

ג: נבחר בסיס $u_1, \dots, u_n$ של F_n כך ש־ $\epsilon_1 u_1 \in H$. נסמן $F' = \langle u_2, \dots, u_n\rangle$, $H' = H \cap F'$. אז $F_n = \langle u_1\rangle \oplus F'$, לפי משפט 10.1, ו־ F' חפשית עם בסיס $u_2, \dots, u_n$.

טענה: $H = \langle \epsilon_1 u_1\rangle \oplus H'$.

אכן, ברור ש־ $\langle \epsilon_1 u_1\rangle \cap H' \subseteq \langle u_1\rangle \cap \langle u_2, \dots, u_n\rangle = \{0\}$. נראה ש־ $H = \langle \epsilon_1 u_1\rangle + H'$. זה יוכיח את הטענה לפי משפט 10.1(ג). יהי $u = m_1u_1 + m_2u_2 + \cdots + m_nu_n$ אבר של H. אם $m_1 = \epsilon_1 q + r$, $0 \le r < \epsilon_1$ אז

$$H \ni u - q(\epsilon_1 u_1) = ru_1 + m_2u_2 + \cdots + m_nu_n$$

ו־ $r = 0$ בגלל המזעריות של ϵ_1. לכן $u - q(\epsilon_1 u_1) \in H \cap F' = H'$, ומכאן $u \in \langle \epsilon_1 u_1\rangle + H'$.

ד: F' היא חפשית ו־$u_2,\dots,u_n$ בסיס שלה. לפי הנחת האינדוקציה H' היא חפשית ויש בסיס $v_2,\dots,v_n$ של F' ו־$\epsilon_2,\dots,\epsilon_k \in \mathbb{N}$ כך ש־$\epsilon_2\big|\cdots\big|\epsilon_k$ ו־$\epsilon_2 v_2,\dots,\epsilon_k v_k$ בסיס של H'. יהי $v_1 = u_1$. אז $F_n = \langle v_1\rangle \oplus F'$, לכן, לפי למה 14.6, $v_1, v_2,\dots,v_n$ בסיס של F_n, ו־$H = \langle \epsilon_1 v_1\rangle \oplus H'$, לכן, שוב לפי למה 14.6, $\epsilon_1 v_1, \epsilon_2 v_2,\dots,\epsilon_k v_k$ בסיס של H.

ה טענה: $\epsilon_1\big|\epsilon_2$. אכן, נכתוב $\epsilon_2 = \epsilon_1 q + r, 0 \le r < \epsilon_1$. יהי $v_1' = v_1 - qv_2$, אזי $v_1', v_2,\dots,v_n$ בסיס של F_n ו־

$$H \ni \epsilon_2 v_2 - \epsilon_1 v_1 = \epsilon_1 q v_2 + r v_2 - \epsilon_1 v_1 = -\epsilon_1 v_1' + r v_2 = -\epsilon_1 v_1' + r v_2 + 0 v_3 + \cdots + 0 v_n.$$

ולפי המזעריות של ϵ_1 יוצא $r = 0$. לכן $\epsilon_1\big|\epsilon_2$. ∎

מסקנה 14.14: אם F *חפשית,* $H \le F$ *אז* $\operatorname{rk} H \le \operatorname{rk} F$.

תרגיל 15.1: *תהי* $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ *ולכל* i *תהי* $N_i \lhd G_i$. *נגדיר* $N = N_1 \cdots N_n$. *אז* $N \lhd G$ ו־$G/N \cong G_1/N_1 \times \cdots \times G_n/N_n$.

פתרון: נגדיר $\lambda \colon G \to G_1/N_1 \times \cdots \times G_n/N_n$ על ידי $(g_1, \cdots, g_n) \mapsto (g_1N_1, \cdots, g_nN_n)$. העתקה זו מוגדרת היטב והיא על. קל לראות שהיא הומומורפיזם. גרעינה N. לכן $N \lhd G$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $G/N \cong G_1/N_1 \times \cdots \times G_n/N_n$. ∎

משפט 15.2 (המשפט היסודי של החבורות החילופיות הנוצרות סופית): *כל חבורה חילופית נוצרת סופית* A *היא סכום ישר של מספר סופי של חבורות מעגליות. ביתר דיוק:* $A \cong \mathbb{Z}/\epsilon_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\epsilon_k\mathbb{Z} \oplus \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{r}$ *באשר* $\epsilon_1 \big| \cdots \big| \epsilon_k$ *מספרים טבעיים ו־*$k, r \geq 0$.

הוכחה: לפי משפט 14.5 קים n ו־$H \leq F_n$ כך ש־$A \cong F_n/H$. לפי משפט החבורות החלקיות של F_n (משפט 14.13) יש בסיס $v_1, \ldots, v_n$ של F_n כך ש־

$$\begin{aligned} F_n &= & & \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_k \rangle \oplus \langle v_{k+1} \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle \\ H &= \langle \epsilon_1 v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \epsilon_k v_k \rangle &=& \langle \epsilon_1 v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \epsilon_k v_k \rangle \oplus \overbrace{\langle 0 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle 0 \rangle}^{n-k} \end{aligned}$$

ומכאן לפי תרגיל 15.1

$$\begin{aligned} F_n/H &\cong \langle v_1 \rangle/\langle \epsilon_1 v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_k \rangle/\langle \epsilon_k v_k \rangle \oplus \langle v_{k+1} \rangle/\langle 0 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle/\langle 0 \rangle \\ &\cong \mathbb{Z}/\epsilon_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\epsilon_k\mathbb{Z} \oplus \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{n-k} \end{aligned}$$ ∎

לפי מסקנה 10.5 חבורה מעגלית $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ הינה איזומורפית לסכום ישר של חבורות מעגליות מהצורה $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, באשר q חזקה של ראשוני. לכן:

משפט 15.3: *תהי* A *חבורה חילופית נוצרת סופית. אזי*

$$A \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z} \oplus F_r. \tag{1}$$

באשר $p_1, \ldots, p_k$ *מספרים ראשוניים (לא בהכרח שונים),* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$, ו־$F_r = \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{r}$.

נרצה להוכיח יחידות של ההצגה (1). לשם כך נזדקק להכנות:

תרגיל 15.4: *תהי A חבורה חילופית. יהי $m \in \mathbb{N}$ ויהי $p \in \mathbb{N}$ ראשוני.*

(א) *ההעתקה $A \to A$ הנתונה על ידי $a \mapsto ma$ היא הומומורפיזם.*

בפרט, גרעינו $A_m = \{a \in A \mid ma = 0\}$ ותמונתו $mA = \{ma \mid a \in A\}$ הם תת חבורות של A.

(ב) $A^t = \bigcup_m A_m$.

(ג) $A^{(p)} = \{a \in A \mid \text{ord}a$ *הוא חזקה של* $p\} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} A_{p^\alpha}$ *היא תת חבורה של* A.

(ד) *אם A סופית אז $A^{(p)}$ היא חבורת סילוב־p היחידה של A.*

(ה) $p^\beta(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/p^{\alpha-\beta}\mathbb{Z} & \beta \le \alpha \\ \{0\} & \beta \ge \alpha \end{cases}$.

(ו) *אם $p \big| m$ אז $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

(ז) *יהי $\theta\colon A \to B$ איזומורפיזם של חבורות חילופיות. אז $\theta(A^t) = B^t$, $\theta(A_m) = B_m$, $\theta(mA) = mB$, $\theta(A^{(p)}) = B^{(p)}$, ו־$A/A^t \cong B/B^t$.*

פתרון: (ג) אם $p^\alpha a = 0$ ו־$p^\beta b = 0$ אז $p^{\alpha+\beta}(a+b) = p^{\alpha+\beta}a + p^{\alpha+\beta}b = 0$.

(ד) תהי P חבורת סילוב־p של A. היא יחידה כי האחרות צמודות לה, ו־A חילופית. ברור ש־$P \subseteq A^{(p)}$. להיפך, יהי $a \in A^{(p)}$. אז $\langle a \rangle$ היא חבורת־p ולכן (המשפט השני של סילוב) מוכלת ב־P. בפרט $a \in P$.

(ה) תהי $A = \mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ ויהי a יוצר שלה. אז $\text{ord}(a) = p^\alpha$ ו־$A = \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$. לכן

$$p^\beta A = \{p^\beta ka \mid k \in \mathbb{Z}\} = \langle p^\beta a \rangle \le A$$

מעגלית (זה גם נובע מכך שהיא חבורה חלקית של מעגלית) וסדרה הוא

$$|p^\beta A| = \text{ord}(p^\beta a) = \begin{cases} \text{ord}(a)/p^\beta & p^\beta \big| \text{ord}(a) \\ 1 & \text{ord}(a) \big| p^\beta \end{cases}.$$

(ו) בחבורה $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})_p = \{k[1] \mid pk[1] = [0]\} = \{k[1] \mid m \big| pk\} = \{k[1] \mid \frac{m}{p} \big| k\}$ יש בדיוק p איברים: $\frac{m}{p}[1], 2\frac{m}{p}[1], \ldots, p\frac{m}{p}[1] = [0]$.

(ז) נראה רק ש־$A/A^t \cong B/B^t$. הגרעין של ההרכבה $A \xrightarrow{\theta} B \to B/B^t$ הוא A^t. לכן האיזומורפיזם נובע ממשפט האיזומורפיזם הראשון. ∎

למה 15.5: *תהיינה $A_1, \ldots, A_k$ חבורות חילופיות ותהי $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$. יהי $m \in \mathbb{N}$ ויהי p ראשוני. אזי*

(א) $A^t = A_1^t \oplus \cdots \oplus A_k^t$.

(ב) $A_m = (A_1)_m \oplus \cdots \oplus (A_k)_m$.

(ג) $A^{(p)} = A_1^{(p)} \oplus \cdots \oplus A_k^{(p)}$

(ד) $mA = mA_1 \oplus \cdots \oplus mA_k$.

הוכחה: כל $a \in A$ הוא מהצורה $(a_1, \ldots, a_k)$ באשר $a_i \in A_i$. אז די להוכיח:

$$a \in A^t\ [a \in A_m,\ a \in mA] \quad \Leftrightarrow \quad a_i \in A^t\ [a_i \in A_m,\ a_i \in mA] \text{ לכל } i.$$

זה נובע בקלות מהעובדה $m(a_1, \ldots, a_k) = (ma_1, \ldots, ma_k)$. ∎

משפט 15.6 (משפט יחידות הפירוק של חבורה חילופית נוצרת סופית): *תהי A חילופית נוצרת סופית. אזי הפירוק (1)*

$$A \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z} \oplus F_r \qquad (1)$$

יחיד, עד כדי סדר המחוברים. ביתר דיוק:

(א) $r = \mathrm{rk}(A/A^t)$.

(ב) *יהי p ראשוני ויהי $0 \le \beta \in \mathbb{Z}$. נסמן $s_\beta = s_\beta(p) = \#\{i|\ p_i = p,\ \alpha_i > \beta\}$. אז*
$|(p^\beta A^{(p)})_p| = p^{s_\beta}$, ולכן $\#\{i|\ p_i = p,\ \alpha_i = \beta\} = s_{\beta-1} - s_\beta$ תלוי רק ב־A, לכל $\beta \in \mathbb{N}$.

הוכחה: נסמן את אגף ימין של (1) ב־B. לפי למה 15.5, $B^t = \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z} \oplus \{0\}$ ולפי תרגיל 15.1 $B/B^t \cong F_r$. לכן $A/A^t \cong B/B^t = F_r$. מכאן $\mathrm{rk}(A/A^t) = \mathrm{rk}(F_r) = r$.

(ב) לפי למה 15.5,

$$
\begin{aligned}
B^{(p)} &= (\mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z})^{(p)} \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z})^{(p)} \oplus (F_r)^{(p)}, \\
&= \oplus_{\{i|\ p_i=p\}} \mathbb{Z}/p^{\alpha_i}\mathbb{Z} \\
p^\beta B^{(p)} &= \oplus_{\{i|\ p_i=p\}} p^\beta(\mathbb{Z}/p^{\alpha_i}\mathbb{Z}), \\
&\cong \oplus_{\{i|\ p_i=p,\ \beta<\alpha_i\}} \mathbb{Z}/p^{\alpha_i-\beta}\mathbb{Z} \qquad \text{לפי תרגיל 15.4(ה)} \\
(p^\beta B^{(p)})_p &\cong \oplus_{\{i|\ p_i=p,\ \beta<\alpha_i\}} (\mathbb{Z}/p^{\alpha_i-\beta}\mathbb{Z})_p, \\
&\cong \oplus_{\{i|\ p_i=p,\ \beta<\alpha_i\}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \qquad \text{לפי תרגיל 15.4(ו)}
\end{aligned}
$$

מכאן

$$|(p^\beta A^{(p)})_p| = |(p^\beta B^{(p)})_p| = \prod_{\{i|\ p_i=p,\ \beta<\alpha_i\}} p \quad = \quad p^{s_\beta}. \qquad ∎$$

תרגיל 15.7: *כמה חבורות חילופיות מסדר 24 יש, עד כדי איזומורפיזם?*

פתרון: אם A חילופית מסדר 24 אז $A = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \oplus B$ באשר $B = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ או $B = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ או $B = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. לכן יש 3 חבורות כאלה, לא איזומורפיות זו לזו.

משפט 15.8 (משפט החבורות החלקיות של חבורות חילופיות נוצרות סופית): *תהי A חילופית נוצרת סופית ותהי $B \le A$. יהי p מספר ראשוני. נניח כי בפירוק של A [של B] לחבורות מעגליות אי פריקות מופיעים $r \ge 0$ [$s \ge 0$] חמחוברים מעגליים אינסופיים, ו־$k = k(p)$ [$l = l(p)$] חמחוברים מעגליים מסדרים $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \dots, p^{\alpha_k}$ [$p^{\beta_1}, p^{\beta_2}, \dots, p^{\beta_l}$] באשר $1 \le \alpha_k \le \cdots \le \alpha_2 \le \alpha_1$ [$1 \le \beta_l \le \cdots \le \beta_2 \le \beta_1$]. אזי $s \le r$, $l \le k$, ו־$\beta_i \le \alpha_i$ לכל $1 \le i \le l$.*

הוכחה:

(א) $B^t = B \cap A^t$, לכן לפי משפט האיזומורפיזם השני $B/B^t \cong (B+A^t)/A^t \le A/A^t$. לפי למה 14.14(ב), $B/B^t, A/A^t$ חסרות פיתול, לכן לפי משפט 14.9 הן חפשיות. מכאן לפי מסקנה 14.14

$$s = \mathrm{rk}(B/B^t) \le \mathrm{rk}(A/A^t) = r.$$

(ב) $B \le A$, לכן $B^{(p)} \le A^{(p)}$, לכן $p^\beta B^{(p)} \le p^\beta A^{(p)}$, ולכן $(p^\beta B^{(p)})_p \le (p^\beta A^{(p)})_p$, לכל $\beta \ge 0$.

מכאן

$$p^{\#\{i|\ \beta<\beta_i\}} = |(p^\beta B^{(p)})_p| \le |(p^\beta A^{(p)})_p| = p^{\#\{i|\ \beta<\alpha_i\}}.$$

ולכן

$$\#\{i|\ \beta < \beta_i\} \le \#\{i|\ \beta < \alpha_i\}..$$

נציב $\beta = 0$: נקבל $l \le k$.

נציב $\beta = \beta_j - 1$: $j \le \#\{i|\ \beta_j \le \beta_i\} \le \#\{i|\ \beta_j \le \alpha_i\}$. הקבוצה השמאלית מכילה לפחות את האינדקסים $1, 2, \dots, j$ ולכן יש בה לפחות j אברים. מכאן שגם בקבוצה הימנית לפחות j אינדקסים. לכן $\alpha_1 \ge \cdots \ge \alpha_j \ge \beta_j$. ∎

הגדרה 20.1: עבור $H,K\le G$ מסמנים $G \ge \langle [h,k]=h^{-1}k^{-1}hk \mid h\in H, k\in K\rangle = [H,K]$. אנו נשתמש רק במקרה פרטי $[H,G]$. נעיר ש-$G' = [G,G]$.

תרגיל 20.2:

(א) אם $H_1\le H_2\le G$ אז $[H_1,G]\le[H_2,G]$.

(ב) $H\lhd G \Leftrightarrow [H,G]\le H$.

(ג) תהי $K\le H\le G, K\lhd G$. אז $H/K\le Z(G/K)\Leftrightarrow [H,G]\le K$.

פתרון: (א) ברור.

(ב) $[H,G]\le H \Leftrightarrow$

$$h^{-1}g^{-1}hg=[h,g]\in H \text{ לכל } h\in H, g\in G \Leftrightarrow g^{-1}hg\in H \text{ לכל } h\in H, g\in G \Leftrightarrow H\lhd G.$$

(ג) $[H,G]\le K \Leftrightarrow h^{-1}g^{-1}hg\in K$ לכל $h\in H, g\in G \Leftrightarrow ghK=hgK$ לכל $h\in H,g\in G$
$\Leftrightarrow (gK)(hK)=(hK)(gK)$ לכל $h\in H, g\in G \Leftrightarrow H/K\le Z(G/K)$. ∎

הגדרה 20.3: נגדיר באינדוקציה $G \ge \Phi_i(G) = \Phi_i$ באפן הבא:

$$\Phi_1=G,\ \Phi_2=[G,G]=G',\ \Phi_{i+1}=[\Phi_i,G].$$

למה 20.4:

(א) $\Phi_{i+1}\le\Phi_i$.

(ב) $\Phi_i\lhd G$.

(ג) $\Phi_i/\Phi_{i+1}\le Z(G/\Phi_{i+1})$.

הוכחה:

(א) באינדוקציה: עבור $i=1$ זה ברור, ואם $\Phi_{i+1}\le\Phi_i$ אז לפי תרגיל 20.2(א)
$\Phi_{i+2}=[\Phi_{i+1},G]\le[\Phi_i,G]=\Phi_{i+1}$.

(ב) נובע מ־(א) לפי תרגיל 20.2(ב).

(ג) נובע מ־(א) לפי תרגיל 20.2(ג), כי $\Phi_{i+1} = [\Phi_i,G]$.

הגדרה 20.5:

$$\cdots \lhd \Phi_i \lhd \cdots \lhd \Phi_2 \lhd \Phi_1 = G \qquad (1)$$

נקראת **הסדרה המרכזית היורדת של** G.

הגדרה 20.6: **הסדרה המרכזית העולה** היא סדרה של חבורות נורמליות ב־G

$$\{1\} = Z_0(G) \lhd Z_1(G) \lhd \cdots \lhd Z_i(G) \lhd \cdots$$

המוגדרות כך: $Z_1(G) = Z(G), Z_0(G) = \{1\}$, ו־$Z_{i+1}(G)/Z_i(G) = Z(G/Z_i(G))$. נסמן גם $Z_i = Z_i(G)$. לפי משפט האיזומורפיזם השלישי $Z_i \lhd G$ לכל i.

משפט 20.7: *(א)* $Z_m = G \Leftrightarrow \Phi_{m+1} = 1$. *יתר על כן: (ב) אם* $Z_m = G$ *אז* $\Phi_{i+1} \leq Z_{m-i}$.

הוכחה:

(1) נניח $Z_m = G$, ונוכיח את (ב). (ואז עבור $i = m$ נקבל $\Phi_{m+1} \leq Z_0 = 1$.) עבור $i = 0$ שני האגפים הם G. נניח $\Phi_{i+1} \leq Z_{m-i}$, אז לפב תרגיל 20.2, $\Phi_{i+2} = [\Phi_{i+1}, G] \leq [Z_{m-i}, G] \leq Z_{m-i-1}$.

(2) נניח $\Phi_{m+1} = 1$, ונוכיח את (ב). (ואז עבור $i = 0$ נקבל $G = \Phi_1 \leq Z_m$.) צ"ל $\Phi_{m-j+1} \leq Z_j$. עבור $j = 0$ שני האגפים הם 1. נניח $\Phi_{m-j+1} \leq Z_j$. אז האפימורפיזם הקנוני $\pi\colon G \to G/Z_j$ משרה את האפימורפיזם $\pi'\colon G/\Phi_{m-j+1} \to G/Z_j$. לפי למה 20.2, $\Phi_{m-j}/\Phi_{m-j+1} \leq Z(G/\Phi_{m-j+1})$, ומכאן (הסבר!) $\pi'(\Phi_{m-j}/\Phi_{m-j+1}) \leq Z(G/Z_j)$ כלומר $\Phi_{m-j}Z_j/Z_j \leq Z_{j+1}/Z_j$ ומכאן $\Phi_{m-j} \leq \Phi_{m-j}Z_j \leq Z_{j+1}$. ∎

הגדרה 20.8: G נקראת **נילפוטנטית** אם יש m כך ש־$\Phi_{m+1}(G) = 1$, ואז m מזערי כזה נקרא **המחלקת הנילפוטניות** של G.

דוגמה 20.9: כל חבורה חילופית היא נילפוטנטית. ($Z = 1$) כל חבורת־p (ז.א. סופית) היא נילפוטנטית. (המרכז לא טריוויאלי) כל חבורה נילפוטנטית היא פתירה. (גורמי הסדרה המרכזית חילופיים) S_3 אינה נילפוטנטית, כי $Z = 1$.

למה 20.10: *אם* $G_1, \ldots, G_r$ *נילפוטנטיות אז* $G_1 \times \cdots \times G_r$ *נילפוטנטית.*

הוכחה: די להראות כי $\Phi_i(G_1 \times \cdots \times G_r) \subseteq \Phi_i(G_1) \times \cdots \times \Phi_i(G_r)$. באינדוקציה: עבור $i = 0$ יש זהות.

$$\Phi_{i+1}(G_1 \times \cdots \times G_r) = [\Phi_i(G_1 \times \cdots \times G_r), G_1 \times \cdots \times G_r] \subseteq$$

$$[\Phi_i(G_1) \times \cdots \times \Phi_i(G_r), G_1 \times \cdots \times G_r] \subseteq [\Phi_i(G_1), G_1] \times \cdots \times [\Phi_i(G_r), G_r] =$$

$$\Phi_{i+1}(G_1) \times \cdots \times \Phi_{i+1}(G_r).$$

למה 20.11: *אם G נילפוטנטית ו־$H < G$ אז $H < N_G(H)$. (משפט זה הוכח עבור G חבורת־p.)*

הוכחה: יהי i השלם הראשון כך ש־$\Phi_{i+1} \leq H$. אז יש $a \in \Phi_i \setminus H$. נראה ש־$a \in N_G(H)$. לכל $h \in H$

$$a^{-1}hah^{-1} = [a, h^{-1}] \in [\Phi_i, G] = \Phi_{i+1} \leq H$$

ולכן $a^{-1}ha \in H$. מכאן $a \in N_G(H)$. ∎

תרגיל 20.12: *תהי P חבורת סילוב־p של חבורה סופית G. אם $N_G(P) \leq H \leq G$ אז $N_G(H) = H$.*

פתרון: אכן, נסמן $G_0 = N_G(H)$. מתקיים $P \lhd N_G(P) \leq H \lhd G_0 \leq G$. נשים לב, ש־$P$ היא גם חבורת סילוב־p של G_0. לפי הארגומנט של פרטיני (תרגיל בית) $G_0 = HN_{G_0}(P)$. אבל $N_{G_0}(P) \leq N_G(P) \leq H$, לכן $HN_{G_0}(P) = H$. מכאן $H = G_0$. ∎

משפט 20.13: *תהי G חבורה סופית. התנאים הבאים שקולים:*

(א) *G נילפוטנטית.*

(ב) *כל חבורות סילוב־p של G הן נורמליות ב־G.*

(ג) *G היא המכפלה הישרה של חבורות סילוב־p שלה.*

הוכחה:

(א) $\Leftarrow$ (ב): תהי P חבורת סילוב־p של G, ויהי $H = N_G(P)$. צ"ל $H = G$. לפי התרגיל $N_G(H) = H$. לכן לפי הלמה $H = G$.

(ב) $\Leftarrow$ (ג): יהי $|G| = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ הפירוק של $|G|$ לחזקות של מספרים ראשוניים שונים. לכל $1 \leq i \leq r$ תהי P_i חבורת סילוב־p_i של G. אז $|P_i| = p_i^{m_i}$. לכן $|P_1|, \ldots, |P_r|$ זרים בזוגות ו־$|G| = |P_1| \cdots |P_r|$. לפי ההנחה $P_1, \ldots, P_r \lhd G$. לכן לפי למה 10.4, $G = P_1 \times \cdots \times P_r$.

(ג) $\Leftarrow$ (א): לפי דוגמה 20.9 חבורות סילוב־p של G הינן נילפוטנטיות. לפי למה 20.10 המכפלה הישרה שלהן G נילפוטנטית. ∎

הגדרה 16.1: תהי S קבוצה חלקית של חבורה [חילופית] F. נאמר כי F היא **חבורה [חילופית] חפשית על** S אם כל העתקה $A \to S :\varphi_0$ לתוך איזושהי חבורה [חילופית] A ניתנת להרחבה להומומורפיזם יחיד $\varphi\colon F \to A$.

דוגמה 16.2:

(1) $\mathbb{Z}$ היא חפשית על $\{1\}$ ולכן גם חילופית חפשית על $\{1\}$ $S = \{1\}$.

(2) תהי S קבוצה. תהי

$$F(S) = \oplus_{s\in S}\mathbb{Z} = \{f\colon S \to \mathbb{Z} \mid f(s) = 0 \text{ כמעט לכל } s \in S\}.$$

ההעתקה $\hat{s} \mapsto s$ מ־S לתוך $F(S)$ הנתונה על ידי

$$\hat{s}(s) = 1$$

$$\hat{s}(s') = 0 \text{ לכל } s' \neq s$$

היא חח"ע. נסמן את תמונתה ב־$\hat{S}$.

טענה: $F(S)$ *חילופית חפשית על* $\hat{S}$.

אכן, לכל $f \in F(S)$ הצגה יחידה מהצורה

$$f = \sum_{s\in S} n_s\hat{s}, \qquad n_s \in \mathbb{Z},\ n_s = 0 \text{ כמעט לכל } s \in S. \tag{1}$$

אם $\varphi\colon F(S) \to A$ הומומורפיזם המרחיב $\varphi_0\colon \hat{S} \to A$ אז בהכרח

$$\varphi(f) = \sum_{s\in S} n_s\varphi_0(\hat{s}) \tag{2}$$

ומכאן היחידות של φ.

קיום: נגדיר את φ על פי (2); זוהי הגדרה טובה בגלל יחידות ההצגה (1), וקל לראות ש־φ הומומורפיזם המרחיב את φ_0.

אם נזהה כל $s \in S$ עם $\hat{s}$ אז $F(S)$ חילופית חפשית על S. אבל גם אם לא נזהה, הלמה הבאה מראה איך לקבל חבורה חילופית חפשית על S מתוך $F(S)$:

למה 16.3: *אם $\theta\colon F_1 \to F_2$ איזומורפיזם של חבורות ו־ F_1 [חילופית] חפשית על S_1 אז F_2 [חילופית] חפשית על $S_2 = \theta(S_1)$.*

הוכחה: אם $\varphi_0\colon S_2 \to A$ העתקה לתוך חבורה [חילופית] A, יהי $\psi\colon F_1 \to A$ ההומומורפיזם שמרחיב את $\psi_0 = \varphi_0 \circ \theta\colon S_1 \to A$ ואז $\varphi = \psi \circ \theta^{-1}\colon F_2 \to A$ הומומורפיזם שמרחיב את φ_0. אם גם $\varphi'\colon F_2 \to A$ הומומורפיזם שמרחיב את φ_0 אז $\psi' = \varphi' \circ \theta\colon F_1 \to A$ הומומורפיזם שמרחיב את ψ_0. בגלל היחידות $\psi = \psi'$ ומכאן $\varphi' = \psi \circ \theta^{-1} = \varphi$. ∎

למה 16.4: *תהי $\theta_0\colon S_1 \to S_2$ העתקה חח"ע ועל של קבוצות. אם F_i [חילופית] חפשית על S_i, $i = 1, 2$, אז קיים איזומורפיזם $\theta\colon F_1 \to F_2$ יחיד אשר מרחיב את θ_0.*

הוכחה: (abstract nonsense) לפי החפשיות של F קים הומומורפיזם יחיד $\theta\colon F_1 \to F_2$ שמרחיב את $\theta_0\colon S_1 \to S_2$. לפי החפשיות של F_2 קים הומומורפיזם יחיד $\rho\colon F_2 \to F_1$ שמרחיב את $\theta_0^{-1}\colon S_2 \to S_1$. כעת $\rho \circ \theta\colon F_1 \to F_1$ וגם $\mathrm{id}_{F_1}\colon F_1 \to F_1$ הומומורפיזמים שמרחיבים את $\mathrm{id}\colon S_1 \to S_1$, לכן לפי היחידות $\rho \circ \theta = \mathrm{id}_{F_1}$. באפן דומה $\theta \circ \rho = \mathrm{id}_{F_2}$.

מסקנה 16.5: *לכל S קיימת חבורה חילופית חפשית על S, והיא יחידה, עד כדי איזומורפיזם (יחיד).*

סימון: F_n = חבורה [חילופית] חפשית על קבוצה בת n אברים. (יחידה עד כדי איזומורפיזם)

תרגיל 16.6: *אם F חבורה [חילופית] חפשית על S אז $F = \langle S \rangle$.*

אכן, קיים הומומורפיזם $\varphi\colon F \to \langle S \rangle$ אשר מרחיב את $\mathrm{id}_S\colon S \to S$. גם $\mathrm{id}_F\colon F \to F$ מרחיב את id_S. בגלל היחידות $\mathrm{id}_F = \varphi$, ומכאן $F = \varphi(F) \subseteq \langle S \rangle$. ∎

מסקנה 16.7: *תהי F חילופית, $S \subseteq F$. התנאים הבאים שקולים:*

(א) *F חילופית חפשית על S.*

(ב) *קיים איזומורפיזם $F \to F(S) = \oplus_{s\in S}\mathbb{Z}$ כך ש־ $s \mapsto \hat{s}$.*

(ג) *$F = \oplus_{s\in S}\langle s \rangle$ ו־ $\langle s \rangle \cong \mathbb{Z}$ לכל $\in S$.*

(ד) *S בסיס של F: לכל $f \in F$ הצגה יחידה מהצורה*

$$f = \sum_{s\in S} n_s s \,, \qquad n_s \in \mathbb{Z} \,,\ n_s = 0 \text{ כמעט לכל } s \in S. \tag{1}$$

הוכחה:

(א) $\Leftarrow$ (ב): לפי הלמה הקודמת.

(ב) $\Leftarrow$ (ג): בגלל ש־ $F(S) = \oplus_{s\in S}\langle \hat{s} \rangle$ ו־ $\langle \hat{s} \rangle = \mathbb{Z}$ לכל $s \in S$.

(ג) $\Leftarrow$ (ד): תכונה של סכום ישר: לכל $x \in F$ הצגה יחידה מהצורה $x = \sum_{s\in S} x_s$, באשר $x_s \in \langle s \rangle$ ו־$x_s = 0$ כמעט לכל $s \in S$. אבל $\langle s \rangle \cong \mathbb{Z}$, לכן לכל x_s יש $n_s \in \mathbb{Z}$ יחיד כך ש־$x_s = n_s s$.

(ד) $\Leftarrow$ (א): כמו בהוכחה ש־$F(S)$ חילופית חפשית על S. ∎

למה 16.8: *כל חבורה [חילופית] A איזומורפית למנה של חבורה [חילופית] חפשית. ביתר דיוק, אם $A = \langle S \rangle$ אז A איזומורפית למנה של חבורה [חילופית] חפשית F על S.*

הוכחה: את $\mathrm{id}\colon S \to S$ אפשר להרחיב להומומורפיזם $\varphi\colon F \to A$. הוא על, כי $S \subseteq \varphi(F)$ ולכן $A = \langle S \rangle \subseteq \varphi(F)$. לכן $A \cong F/\operatorname{Ker}\varphi$. ∎

הגדרה 16.9: תהי G חבורה. $\mathrm{rk}(G) = min\{|S|| \ \langle S \rangle = G\}$ נקרא **הדרגה** של G.

דוגמה 16.10: $\mathrm{rk}(G) = 0$ אמ"ם $G = \{1\}$.

$\mathrm{rk}(G) = 1$ אמ"ם $G \neq \{1\}$ מעגלית.

$\mathrm{rk}(S_n) = 2$ עבור $n \geq 3$, כי $S_n = \langle (12), (12\ldots n) \rangle$.

תהי $A = \overbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}^{n\times}$. אזי $\mathrm{rk}(A) = n$. (אכן, A הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. לכל $a \in A$ מתקיים $pa = 0$, ולכן לכל $m \in \mathbb{Z}$ מתקיים $ma = ra$, באשר $0 \leq r < p$ השארית של m לאחר החילוק ב־p. יהיו $a_1, \ldots, a_k \in A$. אז

$$\begin{aligned}\langle a_1, \ldots, a_k \rangle &= \{m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k | \ m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{r_1 a_1 + \cdots + r_k a_k | \ 0 \leq r_1, \ldots, r_n < p\} = \mathrm{Span}(a_1, \ldots, a_k)\end{aligned}$$

ולכן $\mathrm{rk}(A) = \dim(A)$.)

יתכן ש־$G \leq H$ ו־$\mathrm{rk}(G) < \mathrm{rk}(H)$ (למשל את A לעיל אפשר לראות כחבורה חלקית של S_{p^n}).

נשים לב ש־$\mathrm{rk}(G) \geq \mathrm{rk}(G/N)$.

למה 16.11: *תהי F [חילופית] חפשית על S סופית. אז* $|S| = \mathrm{rk}(F)$.

הוכחה: (רק עבור S סופית).

(א) $F = \langle S \rangle$. לכן $\mathrm{rk}(F) \leq |S|$.

(ב) תהי A הסכום הישר של $|S|$ העתקים של $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. אז $\mathrm{rk}(A) = |S|$. לכן קיימת העתקה חח"ע $\varphi_0\colon S \to A$ כך ש־$\varphi_0(S)$ קבוצת יוצרים של A. היא ניתנת להרחבה להומומורפיזם $\varphi\colon F \to A$. הוא על, כי $A = \langle \varphi(S) \rangle \subseteq \langle \varphi(F) \rangle = \varphi(F)$ אך $\mathrm{rk}(A) = |S|$, כלומר A איזומורפית למנה של F. מכאן $\mathrm{rk}(F) \geq \mathrm{rk}(A) = |S|$.

תרגיל 16.12: תהי F חילופית חפשית עם בסיס $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}$, ויהיו $k_2,\ldots k_n\in\mathbb{Z}$. אז גם

$$\{s_1+k_1s_2+\cdots+k_ns_n,s_2,\ldots,s_n\},\{-s_1+k_1s_2+\cdots+k_ns_n,s_2,\ldots,s_n\}$$

בסיסים של F.

תרגיל 16.13: . נניח כי $G=G_1\times\cdots\times G_n$ ותהיינה $H_i\triangleleft G_i$ לכל $i=1,\ldots,n$. נסמן $H=H_1H_2\cdots H_n$.

אזי

(א) $H\triangleleft G$.

(ב) $G/H=(G_1/H_1)\cdots\times(G_n/H_n)$

תהי $X \neq 0$ קבוצה. תהי X^{-1} קבוצה זרה לה עם העתקה חח"ע ועל $X \to X^{-1}$ אשר תסומן כך: $x \mapsto x^{-1}$. גם ההעתקה ההופכית $X^{-1} \to X$ תסומן באותו הסימון, כלומר $x = (x^{-1})^{-1}$. יהי $F(X)$ אוסף הסדרות הסופיות $x_1 x_2 \cdots x_n$ של אברי $X \cup X^{-1}$ המקיימות $x_{i+1} \neq x_i^{-1}$ לכל $1 \leq i < n$. (גם $n = 0$ יתכן.) נגדיר פעולה בינרית ("צירוף עם צמצום") על $F(X)$: אם $u = x_1 \cdots x_n, v = y_1 \cdots y_m \in F(X)$ אז

$$uv = x_1 \cdots x_{n-i} y_{i+1} y_{i+2} \cdots y_m (1)$$

באשר i מוגדר על ידי

$$x_n = y_1^{-1}, x_{n-1} = y_2^{-1}, \ldots, x_{n-i+1} = y_i^{-1} \qquad x_{n-i} \neq y_{i+1}^{-1}$$

(או $i = min\{m, n\}$).

תרגיל 18.1: *אם* $u, v, \in F(X)$ *אז* $(uv)w = u(vw)$.

הוכחה: באינדוקציה על האורך של u. אם הוא מאורך 0, הטענה ברורה. נניח לרגע שהטענה ברורה גם אם u מאורך 1. יהי u מאורך> 1 ונכתוב $u = u_1 u_2$, באשר אורכיהם של u_1, u_2 קטנים מהאורך של u. אזי לפי הנחת האינדוקציה

$$(uv)w = ((u_1 u_2)v)w = (u_1(u_2 v))w = u_1((u_2 v)w) = u_1(u_2(vw)) = (u_1 u_2)(vw) = u(vw)$$

באפן אנלוגי אפשר לעשות אינדוקציה על האורך של w במקום האורך של u. לכן די להניח כי u, w שניהם מאורך 1. אז הטענה קלה (רצוי להפריד בין המקרים: v מאורך $0, 1$, וגדול מ־1).

מסקנה 18.2: *$F(X)$ היא חבורה, X קבוצת יוצרים שלה. (אבר היחידה הוא הסדרה מאורך 0.)*

הגדרה 18.3: תהי F חבורה ו־$X \subseteq F$ קבוצה. אזי F חבורה חפשית על X אם יש לה התכונה האוניברסאלית: כל העתקה $X \to G$ לתוך חבורה G אפשר להרחיב להומומורפיזם יחיד $F \to G$.

דוגמה 18.4: $\mathbb{Z}$ היא חבורה חפשית על $\{1\}$.

הערה: אם F_i חבורה חופשית על X_i, $i = 1, 2$, ו־$X_1 \to X_2$ היא העתקה חח"ע ועל אז קיים איזומורפיזם יחיד $F_1 \to F_2$ אשר מרחיב את $X_1 \to X_2$. אכן, לפי ההנחה קיימים הומומורפיזמים יחידים $F_1 \to F_2$ ו־$F_2 \to F_1$ המרחיבים $X_1 \to X_2$ ואת ההופכי שלה $X_2 \to X_1$, בהתאמה. הם הופכיים זה לזה (ולכן $F_1 \to F_2$ איזומורפיזם) כי ההרכבות שלהם הם הומומורפיזמים $F_2 \to F_2, F_1 \to F_1$ המרחיבים את הזהויות $X_2 \to X_2, X \to X_1$ בהתאמה, ולכן, לפי היחידות של הרחבות כאלה, הם העתקות הזהות. בפרט (אם נקח $X_1 = X_2 = X$) קימת חבורה חפשית אחת לכל היותר על קבוצה X, עד כדי איזומורפיזם (יחיד).

משפט 18.5: *$F(X)$ היא חבורה חופשית על X.*

הוכחה: תהי $f\colon X \to G$ העתקה לתוך חבורה G. האפשרות היחידה להרחיבה להומומורפיזם $F(X) \to G$ היא על ידי ההגדרה $f(x) = f(x^{-1})^{-1}$ עבור $x \in X^{-1}$ ואח"כ $f(x_1 \cdots x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n)$, באשר $x_1, \ldots, x_n \in X \cup X^{-1}$, ומכאן היחידות של ההרחבה. הרחבה זו היא הומומורפיזם: בסימון של (1)

$$f(x_1x_2 \cdots x_n \cdot y_1y_2 \cdots y_m) = f(x_1x_2 \cdots x_{n-i}y_{i+1}y_{i+2} \cdots y_m) =$$

$$f(x_1) \cdots f(x_{n-i})f(y_{i+1}) \cdots f(y_m) =$$

$$f(x_1) \cdots f(x_n)f(y_1 \cdots f(y_m) = f(x \cdots x_n)f(y \cdots y_m)$$

למה 18.6: *תהי F חבורה ותהי $X \subseteq F$. אזי F היא חבורה חופשית על X אם ורק אם:*

(א) $F = \langle X \rangle$

(ב) אם $x_1, \ldots, x_n \in X \cup X^{-1}$ *כך ש־* $x_{i+1} \neq x_i^{-1}$ *לכל* $1 \le i < n$ *ו־* $1 = x \cdots x_n$ *אז* $n = 0$.

הוכחה: נניח כי F חפשית על X. בה"כ $F = F(X)$ ואז זה קל.

להיפך, נניח (א), (ב). תהי $F(X)$ החבורה החופשית על X. לפי התכונה האוניברסאלית קיים הומומורפיזם $\varphi\colon F(X) \to F$ אשר הינו הזהות של X. לפי (א) הוא על. יהי $u = x_1 \cdots x_n \in \operatorname{Ker}\varphi$. אזי $1 = \varphi(x_1 \cdots x_n) = x_1 \cdots x_n$ ב־F, לכן לפי (ב) $n = 0$ ומכאן $u = 1$. לכן φ איזומורפיזם. ∎

תהיינה A, N חבורות, ויהי $\psi\colon A \to \mathrm{Aut}(N)$ הומומורפיזם. הוא מגדיר פעולה של A על N (אבל כך שכל $a \in A$ פועל לא רק כתמורה של N, אלא כאוטומורפיזם של n). נסמן ב־$A \ltimes N$ את הקבוצה $A \times N$ ונגדיר עליה כפל באופן הבא:

$$(a_1, n_1)(a_2, n_2) = (a_1 a_2, n_1 \cdot (a_1 * n_2)) = (a_1 a_2, n_1 \cdot \psi(a_1)(n_2))$$

תהיינה $\beta\colon N \to A \ltimes N, \alpha\colon A \to A \ltimes N$ נתונות על ידי $\beta(n) = (1, n), \alpha(a) = (a, 1)$.

למה 21.1:

(א) *$A \ltimes N$ עם פעולה זו היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה למחצה של A ו־ N (ביחס ל־ ψ).*

(ב) *ההעתקות α ו־ β הן הומומורפיזמים חח"ע.*

נזהה את A עם תמונתה A^* על ידי α ואת N עם תמונתה N^* על ידי β.

(ג) $A \cap N = \{1\}$,$AN = A \ltimes N$,$A \leq A \ltimes N$,$N \lhd A \ltimes N$.

(ד) $ana^{-1} = a * n$ *(כלומר: $\alpha(a)\beta(n)\alpha(a)^{-1}) = \beta(a * n)$).*

הוכחה: (א) הכפל הנו אסוציאטיבי:

$$\big((a_1, n_1)(a_2, n_2)\big)(a_3, n_3) = (a_1 a_2, n_1(a_1 * n_2))(a_3, n_3) = ((a_1 a_2)a_3, (a_1 * n_2)(a_1 a_2 * n_3))$$

$$(a_1, n_1)\big((a_2, n_2)(a_3, n_3)\big) = (a_1 n_1)(a_2 a_3, n_2(a_3 * n_3)) = (a_1(a_2 a_3), n_1(a_1 * (n_2(a_3 * n_3)))$$

וברור ששני הביטויים שווים.

אבר היחידה הוא $(1, 1)$. ההופכי של (a, n) הוא $(a^{-1}, (n^{-1})^{\psi(a^{-1})})$.

(ב) ברור

(ג) מתוך (ב) נובע ש־ $A, N \leq A \ltimes N$.

$$(a_2, n_2)^{-1}(1, n_1)(a_2, n_2) = (a_2^{-1}, (n_2^{-1})^{\psi(a_2^{-1})})(a_2, n_1^{\psi(a_2)} n_2) = (a_2^{-1} a_2, n_2^{-1}) n_1 n_2) \in N,$$

לכן $N \lhd A \ltimes N$. ∎

משפט: *תהי G חבורה ו־ $N \lhd G, A \leq G$ כך ש־ $A \cap N = \{1\}, AN = G$. אזי $n^{\psi(a)} = n^a = a^{-1} n a$ מגדיר הומומורפיזם $\psi\colon A \to \mathrm{Aut}(N)$ וההעתקה $A \ltimes N \to G$ הנתונה על ידי $(a, n) \mapsto an$ היא איזומורפיזם אשר הינו זהות על A ועל N.*

הוכחה: הוכחה ההעתקה האמורה היא הומומורפיזם:

$$(a_1, n_1)(a_2, n_2) = (a_1 a_2, n_1^{\psi(a_2)} n_2) \mapsto a_1 a_2, n_1^{\psi(a_2)} n_2 = a_1 a_2 a_2^{-1} n_1 a_2 n_2 = (a_1 n_1)(a_2 n_2).$$

היא על, כי $AN = G$, וגרעינה $\{1\}$, כי $A \cap N = \{1\}$. ∎

הערה: מתקיים $A \ltimes N = A \times N$ אם ורק אם ψ טריוויאלי, ז.א. $\psi(A) = \{1\}$. (אכן, ההצגה $g = an$ של כל $g \in A \ltimes N$ היא יחידה, כי ההעתקה $(a,n) \mapsto an$ חח"ע. מתקיים $an = na$ אם ורק אם $n^{\psi(a)} = n$ לכל $a \in A, n \in N$.

דוגמה: $N = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, באשר $m > 2$. אזי $n \mapsto n^{-1}$ הוא אוטומורפיזם ω של N מסדר 2. נגדיר הומומורפיזם $\psi\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\} \to N$ על ידי $\psi(1) = 1$, $\psi(-1) = \omega$. אז $D_m = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ חבורה מסדר $2m$, הנקראת חבורה דיהדרית. היא מכילה את N כתת חבורה נורמלית. כל אבר ב־$D_m \setminus N$ הוא מסדר 2 (אכן, $1 = (1, n^{-1}n) = (1, n^{\psi(-1)}n) = (-1,n)(-1,n)$). היא אינה חילופית לפי (ד). $D_3 = S_3$, D_4 היא חבורה לא חילופית מסדר 8.

דוגמה: כל חבורה G מסדר 2001 היא מעגלית.

אכן, $2001 = 3 \cdot 23 \cdot 29$. (נסמן ב־$n_p$ את מספר חבורות סילוב־p של G.) אז $n_{23} | 3 \cdot 29$ וגם $n_{23} \equiv 1 \pmod{23}$, ולכן $n_{23} = 1$. באותו אופן $n_{29} = 1$. לכן יש $P \lhd G$ מסדר 23 ו־$Q \lhd G$ מסדר 29. מכאן $PQ \lhd G$ היות ו־$P, Q \lhd PQ$ ו־P, Q מסדרים זרים, $PQ = P \times Q$. ובפרט $|PQ| = 23 \cdot 29$. תהי S חבורת סילוב־3 של G. אז $S \cap (PQ) = \{1\}$, $|S(PQ)| = 3 \cdot 23 \cdot 29$ (כי הסדר מתחלק בכל אחד מהראשוניים באגף ימין), ולכן $S(PQ) = G$. לכן $G = S \ltimes (PQ)$ ביחס לאיזה הומומורפיזם $\psi\colon S \to \mathrm{Aut}(PQ)$ אבל $S \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, ואילו

$$\mathrm{Aut}(PQ) = \mathrm{Aut}(P) \times \mathrm{Aut}(Q) \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/22\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$$

מסדר זר ל־3, לכן ψ טריוויאלי. לפי ההערה,

$$G = S \times (P \times Q) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/23\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/29\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/(3 \cdot 23 \cdot 29\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2001\mathbb{Z}.$$

תרגיל: *א. יהי $\beta\colon N \to N'$ איזומורפיזם של חבורות. אז β מגדיר איזומורפיזם $\hat{\beta}\colon \mathrm{Aut}(N) \to \mathrm{Aut}(N')$ על ידי $\omega^{\hat{\beta}} = \beta^{-1}\omega\beta$. (ראה גם תרשים למטה מצד ימין.)*

ב. יהיו $\alpha\colon A \to A'$ ו־$\beta\colon N \to N'$ שני איזומורפיזמים של חבורות. תהיינה $A \ltimes^{\psi} N$, $A' \ltimes^{\psi'} N'$ שתי מכפלות ישרות למחצה, מוגדרות בעזרת הומומורפיזמים $\psi\colon A \to \mathrm{Aut}(N)$ ו־$\psi'\colon A' \to \mathrm{Aut}(N')$ כך שהתרשים הבא מצד שמאל חילופי

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Aut}(N) \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\hat{\beta}} \\ A' & \xrightarrow{\psi'} & \mathrm{Aut}(N') \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\omega} & N \\ \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ N' & \xrightarrow{\omega^{\hat{\beta}}} & N' \end{array}$$

הראה שההעתקה $A \ltimes^{\psi} N \to A' \ltimes^{\psi'} N'$, הנתונה על ידי $(a,n) \mapsto (a^{\alpha}, n^{\beta})$ היא איזומורפיזם.

הערה: חבורת הסימטריות. יהי $P_n \subseteq \mathbb{R}^2$ מצולע משוכלל בעל n קדקדים. סימטריה של P_n היא העתקה $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ששומרת מרחקים ומעתיקה את P_n על עצמו. (דוגמה - משולש שוה־צלעות.) אוסף הסימטריות של P_n הוא חבורה $\mathrm{Sym}(P)$ תחת ההרכבה. סימטריה נקבעת על ידי פעולתה על קודקודי P_n, ולכן אפשר לראותה כתמורה ב־S_n. מכאן $\mathrm{Sym}(P_n) \leq S_n$.

טענה: $\mathrm{Sym}(P_n) = D_n$.

הוכחה: הוכחה יהי $\sigma \in \mathrm{Sym}(P_n)$ הסיבוב ב־π/n ויהי $\epsilon \in \mathrm{Sym}(P_n)$ השיקוף ביחס לציר העובר דרך המרכז ואחד הקדקדים. כלומר

$$\sigma = (12\cdots n),\ \epsilon = (1\ n-1)(2\ n-2)(3\ n-3)\cdots \in \mathrm{Sym}(P_n).$$

אז $\epsilon^2 = 1$. תהי $H = \langle \sigma, \epsilon \rangle$. אזי $H \leq \mathrm{Sym}(P_n)$. נראה:

(א) $H = D_n$;

(ב) $H = \mathrm{Sym}(P_n)$.

(א) $\mathrm{ord}(\sigma) = n$, ולכן $\langle \sigma \rangle \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\mathrm{ord}(\epsilon) = 2$, לכן $\langle \epsilon \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. בודאי $\langle \sigma \rangle \cap \langle \epsilon \rangle = 1$. מתקיים

$$\sigma^\epsilon = (12\cdots n)^{(1\ n-1)(2\ n-2)(3\ n-3)\cdots} = (n-1 n-2\cdots 21n) = \sigma^{-1}.$$

בפרט $\sigma^\epsilon \in \langle \sigma \rangle$; לכן $\langle \sigma \rangle^\epsilon = \langle \sigma \rangle$; ובודאי $\sigma^\sigma, \sigma^{\sigma^{-1}} \in \langle \sigma \rangle$, לכן $\sigma^h \in \langle \sigma \rangle$ לכל $h \in H$. מכאן $\langle \sigma \rangle \triangleleft H$.

(ב) תהי $\tau \in \mathrm{Sym}(P_n)$. משיקולים גיאומטריים נובע (בלי הוכחה): "אם $n^\tau = n$ אז $1^\tau = 1$ או $1^\tau = n-1$ ובמקרה הראשון $\tau = 1$". נניח $n^\tau = i$. יש $\sigma' \in \langle \sigma \rangle \leq H$ כך ש־$i^{\sigma'} = n$ ולכן $n^{\tau\sigma'} = n$. כעת $\tau\sigma' \in \mathrm{Sym}(P_n)$, ודי להראות $\tau\sigma' \in H$. לכן בה"כ $n^\tau = n$. אם $1^\tau = 1$ אז $\tau = 1 \in H$. אם $1^\tau = n-1$ אז $1^{\tau\epsilon} = 1$ ולכן $\tau\epsilon = 1$, כלומר $\tau = \epsilon \in H$.

הערה: באפן דומה אפשר לדון בחבורת הסימטריות של גוף משוכלל, למשל פירמידה (= טֶטראֶדֶר).

הערה: חבורת הקווטרניונים של Hamilton. $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j \pm k\}$ עם כלל הכפל:

$ij = k, jk = i, ki = j$;

$ji = -k, kj = -i, ik = -j$;

$(\pm i)^2 = (\pm j)^2 = (\pm k)^2 = -1$;

$1a = a$; $(-1)a = -a$, באשר $-a$ נבדל מ־a בסימן.

תרגיל: *Q היא חבורה מסדר 8. היא איננה חילופית. יש לה 6 אברים מסדר 4 ואחד מסדר 2. בפרט $Q \neq D_4$.*

תרגיל: *תהי G חבורה לא חילופית מסדר 8. אזי $G = D_4$ או $G = Q$.*

הוכחה: הוכחה כל אברי $G \setminus \{1\}$ הם מסדר $2, 4, 8$. לא כולם מסדר 2, כי G אינה חילופית; אין אבר מסדר 8, כי G אינה מעגלית. לכן יש $\sigma \in G$ מסדר 4; אז $\langle\sigma\rangle \triangleleft G$. יהי $\tau \in G/\langle\sigma\rangle$. אז $G = \langle\sigma, \tau\rangle$, כי $\langle\sigma\rangle < \langle\sigma, \tau\rangle \leq G$. מתקיים

$$\sigma\tau \in \langle\sigma\rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma\}$$

ו־$\sigma\tau$ מסדר 4; לכן $\sigma\tau = \sigma$ או $\sigma\tau = \sigma^{-1}$. המקרה הראשון לא יתכן, כי אז G חילופית. נבדיל בין שני מקרים:

(א) $\mathrm{ord}(\tau) = 2$. אז כמו בטענה (א) לעיל $G = D_4$.

הגדרה: יהי F שדה. המספר הטבעי הקטן ביותר n כך ש־$n1_F = 0_F$ נקרא **האפיון** (characteristic) של F ויסומן $\mathrm{char}F$. אם לכל n טבעי $n1_F \neq 0_F$ אז $\mathrm{char}F = 0$.

הערה: הערות (1) האפיון הוא הסדר של 1_F בחבורה החיבורית של F (רק שמשום מה כותבים 0 במקום ∞).

(2) אם $\mathrm{char}F = n > 0$ אז $na = 0_F$ לכל $a \in F$: אכן,

$$na = \overbrace{a + \cdots + a}^{n} = \overbrace{(1_F + \cdots + 1_F)}^{n} a = (n1_F)a = 0_F a = 0_F.$$

(3) אם $F_1 \leq F_2$ שדות אז $\mathrm{char}F_1 = \mathrm{char}F_2$.

דוגמה: $\mathrm{char}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = p, \mathrm{char}\mathbb{Q}, \mathrm{char}\mathbb{R}, \mathrm{char}\mathbb{C} = 0$.

למה: *אם $\mathrm{char}F = n > 0$ אז n ראשוני.*

הוכחה: הוכחה אם $n = k_1k_2$ אז $0_F = (k_1 1_F)(k_2 1_F)$ ומכאן $k_1 1_F = 0_F$ או $k_2 1_F = 0_F$, ובגלל המזעריות של n: $k_1 = n$ או $k_2 = n$. לכן n ראשוני.

למה: *יהי F שדה בעל אפיון $p > 0$. אז $F_0 = \{k1_F \mid 0 \leq k < p\}$ הוא שדה חלקי של F, וההעתקה $\lambda\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to F_0$ הנתונה על ידי $[k] \mapsto k1_F$ היא איזומורפיזם של שדות. F_0 הוא השדה החלקי הקטן ביותר של F (מוכל בכל שדה חלקי של F).*

הוכחה: הוכחה בחבורה החבורית של F מתקיים $\mathrm{ord}1_F = p$. הוכחנו בעבר ש־λ איזומורפיזם מוגדר היטב של חבורות חבוריות. הוא גם שומר כפל:

$$\lambda([k_1][k_2]) = ([k_1k_2]) = (k_1k_2)1_F = (k_1 1_F)(a_2 1_F) = \lambda([k_1])\lambda([k_2]).$$

ברור שכל שדה חלקי של F מכיל את 1_F ולכן גם את $\{k1_F \mid 0 \leq k < p\}$.

סימון: אם ו־$F \ni a, , 0 \neq b$, נסמן $a/b = ab^{-1}$.

הערה: הערה אם F שדה (בפרט חוג) ו־R חוג חלקי שלו אז השדה החלקי הקטן ביותר של F שמכיל את R הוא $R' = \{a/b \mid a, b \in R, b \neq 0\}$. (נקרא שדה המנות של R.) אכן, R' מוכל בכל שדה חלקי של F שמכיל את R, וקל לראות שהוא שדה חלקי.

דוגמה: $\mathbb{Z}$ חוג חלקי של $\mathbb{R}$, שדה המנות שלו הוא $\mathbb{Q}$.

הערה: הרחבות יהי R חוג חילוף עם יחידה, ויהי $u \in S$. אם $f = a_1 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in R[X]$ נגדיר $f(u) = a_1 + a_1u + \cdots + a_nu^n \in R$. קל לראות ש־$(fg)(u) = f(u)g(u)$, $(f+g)(u) = f(u)+g(u)$, כלומר העתקת ההצבה $f \mapsto f(u)$ היא הומומורפיזם חוגים מ־$R[X]$ לתוך R.

1. יהיו $R \leq S$ חוגים חילופים עם יחידה כך ש־$1R = 1S$. יהי $u \in S$. נסמן ב־$R[u]$ את החוג הקטן ביותר שמכיל את R, u. קל לראות: $R[u] = \{\sum a_iu^i |\ a_i \in R, i \geq 0 \text{ (סכום סופי) } \} = \{f(u)|\ f \in R[X]\}$.
2. אם $K \leq L$ שדות, $u \in L$, נסמן ב־$K(u)$ את השדה החלקי הקטן ביותר של L שמכיל את K, u. קל לראות: $K(u)$ הוא שדה המנות של $K[u]$. אם $R \leq S$ שדות, $R(u)$ הוא שדה המנות של $R[u]$ (אם $R[u]$ במקרה שדה אז $R[u] = R(u)$).

דוגמה:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} + c(\sqrt{2})^2 \cdots |\ a, b, c, .. \in \mathbb{Z}\} = \{a + b\sqrt{2}|\ a, \in \mathbb{Z}\}$$

$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}|\ a, \in \mathbb{Q}\}$ הוא שדה, לכן $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

$$\mathbb{Q}[\pi] = \{a + b\pi + c\pi^2 + \cdots |\ a, b, c, \ldots \in \mathbb{Q}\},$$

אבל $\mathbb{Q}[\pi] \neq \mathbb{Q}(\pi)$ (לא נוכיח).

הגדרה: יהיו $K \leq L$ שדות. $u \in L$ ייקרא אלגברי מעל K אם יש פולינום $0 \neq f(X) \in K[X]$ כך ש־$f(u) = 0$ (בה"כ f מתוקן =בעל מקדם עליון 1). אחרת u טרנסצנדנטי מעל K.

דוגמה: $\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{-1}$ אלגבריים מעל $\mathbb{Q}$ (ברור). e, π טרנסצנדנטיים מעל $\mathbb{Q}$ (קשה!).

משפט: *יהיו $K \leq L$ שדות, $u \in L$ אלגברי מעל K. יהי $f \in K[X]$ מתוקן מהמעלה הקטנה ביותר כך ש־$f(u) = 0$; יהי $n = \deg f$. אזי*

(א) *אם $g \in K[X]$ כך ש־$g(u) = 0$ אז g הוא כפולה של f: יש $\in K[X]$ כך ש־$g = hf$.*

(ב) *f הוא אי פריק: אם $f = f_1f_2$, באשר $f_1, f_2 \in K[X]$, אז $f_2 \in K^\times$ או $f_1 \in K^\times$.*

(ג) *אם $\in K[X]$ אי פריק מתוקן כך ש־$g(u) = 0$ אז $f = g$.*

(ד) *אם $\in K[X]$ ממעלה n מתוקן כך ש־$g(u) = 0$ אז $f = g$. כלומר: f כנ"ל הוא יחיד. סימון: $f = irr(u, K)$.*

הוכחה: הוכחה

(א) יש $h, r \in K[X]$ כך ש־$g = fh + r, \deg r < n$. אז $0 = g(u) = f(u)h(u) + r(u) = r(u)$, ולפי ההגדרה של n יוצא $r = 0$. לכן $g = fh$.

(ב) נניח $f = f_1f_2$, באשר $f_1, f_2 \in K[X]$ מתוקנים. אז $0 = f(u) = f_1(u)f_2(u)$, לכן, בה"כ, $f_1(u) = 0$. לפי (א) $f|f_1$. אך גם $f_1|f$, לכן $\deg f_1 = \deg f$, ואז $f_2 \in K^\times$. (ג,ד) יש $\in K[X]$ כך ש־$g = hf$.

(ג) g אי פריק, $f \in K^\times$, כי $f(u) = 0$, לכן $h \in K^\times$. אבל h בהכרח מתוקן, לכן $h = 1$.

(ד) $\deg h = \deg g - \deg f = 0$, לכן $h \in K^\times$. אבל h בהכרח מתוקן, לכן $h = 1$.

אם L חוג (ובפרט שדה) ו־$K \le L$ הנו שדה (ו־$1K = 1L$) אז L הוא גם מרחב וקטורי מעל K!! $dimKL$ תקרא המעלה של L/K, ותסומן $[L : K]$ (יתכן גם $[L : K] = \infty$).

דוגמה: $[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$, כי $1, i$ הוא בסיס של $\mathbb{C}$ מעל $\mathbb{R}$. $[K[X] : K] = \infty$, כי $1, X, X^2, \ldots$ בת"ל מעל K.

תרגיל: $[L : K] = 1$ *אמ"ם* $K = L$ *(אכן,* $\in L$*, הוא בת"ל מעל* K*,* $Span(1) = K$).

משפט: *תהי* L/K *הרחבת שדות, כלומר* $K \le L$ *שדות,* $u \in L$ *אלגברי מעל* K*,* $f = irr(u, K)$ *ממעלה* n*. אזי*

(א) $K(u) = K[u]$.

(ב) $S =: Span(1, u, u^2, \ldots, u_{n-1}) = K[u]$ *כמרחב וקטורי מעל* K.

(ג) $[K(u) : K] = n$.

הוכחה: הוכחה

(ב)

$$K[u] = \{g(u) |\ g \in K[X]\},$$

$$S = \{a_0 1 + a_1 u + \cdots + a_n - 1u^n - 1 |\ a_i \in K\} = \{r(u) |\ r \in K[X], \deg r < n\}.$$

ברור ש־$SaK[u]$. יהי $g \in K[X]$. יש $h, r \in K[X]$ כך ש־$g = fh + r, \deg r < n$. אז $g(u) = f(u)h(u) + r(u) = r(u)$. לכן $K[u]aS$.

(ג) די להראות ש־$1, u, u^2, \ldots, u_{n-1}$ הם בלתי תלויים לינארית מעל K. יהיו $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ כך ש־$a_0 1 + a_1 u + \cdots a_{n-1} u_{n-1} = 0$. נסמן $r = a_0 + a_1 X + \cdots a_{n-1} X^{n-1}$. אז $r(u) = 0, \deg r < n$. לפי המינימליות של n יוצא $r = 0$, כלומר $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

(א) ברור ש־$K[u]aK(u)$. צ"ל ש־$K[u]$ שדה, כלומר $\alpha^{-1} \in K[u] \le 0 \neq \alpha \in K[u]$. לפי (ב) $\alpha = r(u)$, באשר $r \in K[X], \deg r < n$. אז r, f זרים, כי f אי פריק. לכן יש $g, h \in K[X]$ כך ש־$1 = gr + hf$. מכאן $1 = g(u)r(u) + h(u)f(u) = g(u)r(u)$, לכן $\alpha^{-1} = g(u) \in K[u]$.

משפט: *תהיינה* $K \le L \le M$ *הרחבות של שדות. אזי* $[M : K] = [M : L][L : K]$.

הוכחה: הוכחה [המשפט דומה למשפט על אינדקסים של חבורות, וגם הוכחתו דומה.] יהי L' בסיס של L מעל K ויהי M' בסיס של M מעל L. נוכיח כי $M'L'$ הוא בסיס של M מעל K וכי ההעתקה $M'fL' \to M'L'$ הנתונה על ידי $x\mathbb{Z}.(x, \mathbb{Z})$ היא חח"ע (ועל).

$M'L'$ קבוצת יוצרים: יהי $\alpha \in M$. אז יש $x_1, \dots x_m \in M'$ ו־$b_1, \dots b_m \in L$ כך ש־ $\alpha = b_1x_1 + \cdots b_mx_m$. כעת יש $y_1, \dots, y_n \in L'$ ו־$a_{ij} \in K$ כך ש־$bi = a_{i1}y_1 + \cdots + a_{in}y_n$ לכל $1 \leq i \leq m$. מכאן $\alpha = jijaij \leq i \geq j$.

$M'L'$ בלתי תלויה לינארית: יהיו $x_1, \dots, x_m \in M'$ (שונים זה מזה), $y_1, \dots, y_n \in L'$ (שונים זה מזה). נראה כי $1 \leq j \leq n$, $(x_i \geq j)1x_ix_m$ בלתי תלויה לינארית (ובפרט אבריה שונים זה מזה, לכן $M'L' \to M'fL'$ חח"ע). יהיו $aij \in K$ כך ש־$0 = j \geq i \leq jijaij$. אזי $b_i = jjaij \geq j \in L$ לכל i, $b_1x_1 + \cdots b_mx_m = 0$, לכן $b_1 = \cdots = b_m = 0$. מכאן $0 = j \geq jja_{ij}$ לכל i, לכן $a_{ij} = 0$ לכל i, j.

תרגיל 29.01: *. תהי G חבורה מסדר 1225. הראה שהיא חילופית. כמה חבורות מסדר זה ישנן?*

הוכחה: פתרון: $|G| = 1225 = 5^2 \cdot 7^2$. יש חבורת סילוב־5 יחידה A וגם חבורת סילוב־7 יחידה B. לכן הן נורמליות ב־G. הן מסדרים זרים ו־$|G| = |B| \cdot |A|$, לכן $G = A \times B$. A ו־B חילופיות, לכן G חילופית. יש 4 חבורות כאלה.

תרגיל 29.02: *. תהי G חבורה מסדר 150. הראה שיש $N \triangleleft G$ מסדר 25 או מסדר 5.*

הוכחה: פתרון: $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$. אם יש רק חבורת סילוב־5 אחת, סיימנו. אחרת יש בדיוק 6 חבורות סילוב־5 ב־G. תהי P אחת מהן.

(א) נניח שחיתוך של כל שתים מביניהן הוא טריוויאלי. אז יש $6 \cdot 24$ אברים מסדר 25 או מסדר 5 ב־G. נותרו עוד 6 אברים. יש 25 או 10 או 1 חבורות סילוב־3, לכן יש רק אחת. נסמן אותה K. אז $K \triangleleft G$. $|G/K| = 2 \cdot 5^2$, ומכאן שיש ל־G/K חבורת סילוב־5 יחידה, היא PK/K. לכן $PK/K \triangleleft G/K$, ומכאן ש־$PK \triangleleft G$. אבל $|PK| = 3 \cdot 5^2$, ומכאן שיש ל־PK חבורת סילוב־5 יחידה, היא P. מכאן $P \triangleleft G$. סתירה.

(ב) נניח שיש עוד חבורת סילוב־5 P' כך ש־$P \cap P' \neq \{1\}$. אז $|P \cap P'| = 5$, ומכאן $|\langle P, P' \rangle| \geq |PP'| = |P| \cdot |P'|/|P \cap P'| = 125$. היות ו־$|\langle P, P' \rangle| \mid |G|$, יוצא $\langle P, P' \rangle = G$. אך $P \cap P' \triangleleft P, P'$, כי P, P' חילופיות. לכן $P \cap P' \triangleleft G$.

הוכחה נוספת: כמו קודם, אך במקום (א),(ב)

יהי $\psi\colon G \to S_6$ הומומורפיזם מגדירה הפעולה של G על $\{gP \mid g \in G\}$ על ידי כפל משמאל. $K = \mathrm{Ker}(\psi)$. אז $K \leq P$ ו־$|G/K|$ מחלק את $|S_6| = 6!$. כיון ש־$150 \nmid 6! = |G|$, יוצא $K \neq 1$.

תרגיל 29.03: *. מצא את כל החבורות מסדר 105, עד כדי איזומורפיזם.*

הוכחה: פתרון: אם G חילופית אז היא מעגלית. נניח כי G אינה חילופית. מספר חבורות סילוב־3 הוא 1 או 7, ולכן יש ב־G 2 או 14 אברים מסדר 3. מספר חבורות סילוב־5 הוא 1 או 21, ולכן יש ב־G 4 או 84 אברים מסדר 5. מספר חבורות סילוב־7 הוא 1 או 15, ולכן יש ב־G 6 או 90 אברים מסדר 7. חשבון קל מראה שלפחות עבור שני ראשונים שונים חבורות סילוב־p המתאימות הן יחידות ב־G, ולכן נורמליות. (לכאורה יתכן $P_7 \triangleleft G$, $P_3, P_5 \not\triangleleft G$, כי אז יש $104 = 6 + 84 + 4$ איברים מסדרים $7, 5, 3$ ועוד איבר היחידה ־ ותו לא. אך $P_5 P_7 \leq G$ מסדר 35 הינה מעגלית ולכן יש בה איבר מסדר 35, סתירה.) אז גם מכפלתן נורמלית ב־G; חבורה זו היא מכפלה ישרה של שתי חבורות מסדרים ראשונים זרים ולכן מעגלית. לכן G אחת המכפלות הישרות להמחצה הבאות:

(א) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ פועלת על $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(ב) $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ פועלת על $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

(ג) $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ פועלת על $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

אם הפעולה טריויאלית אז המכפלה הישרה למחצה היא המכפלה הישרה, ולכן G חילופית. זה המצב במקרים (ב), (ג). במקרה (א) תיתכן פעולה לא טריויאלית:

$$\psi\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})=\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})\times\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

המעתיקה את $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ על החבורה החלקית היחידה מסדר 3 של אגף ימין. העתקה כזאת הינה יחידה, עד כדי הומומורפיזם (לפרט).

תרגיל 29.04 (השערת Schreier): *תהי G חבורה סופית ויהי α אוטומורפיזם של G ללא נקודות שבת, דהיינו:*

$$\{g\in G|\ g^\alpha=g\}=\{1\}.$$

אזי G פתירה.

אנו לא נפתור כאן השערה מפורסמת זו. ידוע הוא (ואנו נקבל זאת ללא הוכחה), שהשערת שרייר נכונה לכל חבורות פשוטות לא חילופיות. (כאן משתמשים כמובן במשפט המיון של חבורות סופיות פשוטות.) נוכיח את ההשערה תחת הנחה זו, באינדוקציה על $|G|$.

תחילה:

טענה 1: *ההעתקה $g\mapsto g^{-1}g^\alpha$ היא תמורה של G.*

אכן, נראה שהיא חח"ע: נניח $g^{-1}g^\alpha=h^{-1}h^\alpha$, אז $hg^{-1}=(hg^{-1})^\alpha$, לכן $hg^{-1}=1$, כלומר $h=g$.

אם G פשוטה (חילופית או לא), סיימנו. נניח כי G אינה פשוטה. אז יש $K\lhd G$ מזערית (כלומר $K\neq 1$, ואין $K_0\lhd G$ כך ש-$1<K_0<K$).

טענה: $K^\alpha=K$.

יהי n המספר הטבעי הקטן ביותר כך ש-$K^{\alpha^n}=K$ ונניח בשלילה כי $n>1$. לכל $1\le i<n$ מתקיים $K^{\alpha^i}\cap K<K$; אבל $K^{\alpha^i}\lhd G^{\alpha^i}=G$, לכן $K^{\alpha^i}\cap K\lhd G$ ומהמזעריות $K^{\alpha^i}\cap K=1$. מכאן, לכל $1\le i<j<n$ מתקיים $K^{\alpha^i}\cap K^{\alpha^j}=(K\cap K^{\alpha^{j-i}})^{\alpha^i}=1$. קיבלנו ש-$K^{\alpha^i}K^{\alpha^j}=K^{\alpha^i}\times K^{\alpha^j}$. ולכן $ab=ba$ לכל $a\in K^{\alpha^i}, b\in K^{\alpha^j}$.

נבחר $1\neq x\in K$. אז $1\neq g=xx^\alpha\cdots x^{\alpha^{n-1}}\in G$. היות ו-$x,x^\alpha,\dots,x^{\alpha^{n-1}}$ מתחלפים ביניהם, $g^\alpha=x^\alpha\cdots x^{\alpha^{n-1}}x=g$, סתירה.

מסקנה: *הצמצום של α ל־K הוא אוטומורפיזם של K ללא נקודות שבת.*

טענה: *2:* $gK \mapsto (gK)^\alpha = g^\alpha K$ *הוא אוטומורפיזם ללא נקודות שבת של* G/K.

אכן, נניח כי $g^\alpha K = gK$. אז $g^{-1}g^\alpha \in K$. לפי טענה 1 (עבור K) יש $k \in K$ כך ש־$k^{-1}k^\alpha = g^{-1}g^\alpha$. בגלל חח"ע $g = k(\in K)$ ומכאן $gK = K$.

לפי הנחת האינדוקציה $K, G/K$ פתירות ולכן G פתירה. ∎

תרגיל 29.05: *תהי H תת חבורה של חבורה סופית G בעלת אינדקס 5 ויהי $a \in Z(G)$ מגדר 3. הוכח כי $a \in H$.*

פתרון: כל תת חבורה של המרכז של G הינה נורמלית ב־G, לכן $\langle a\rangle \lhd G$. מכאן $\langle a\rangle H \leq G$. מתקיים (לא לפי משפט האיזומורפיזם השני) $(\langle a\rangle H : H) = (\langle a\rangle) : ((\langle a\rangle \cap H))$. אך אגף שמאל מחלק את $G : H = 5$ ואילו אגף ימין מחלק את $|\langle a\rangle| = 3$. לכן מספר זה הוא 1. מכאן $\langle a\rangle \leq H$. ∎

תרגיל 29.06: *תהי G חבורה סופית ויהי p הראשוני הקטן ביותר שמחלק את הסדר של G. תהי $H \leq G$ כך ש־$(G : H) = p$. הוכח כי $H \lhd G$.*

פתרון: החבורה G פועלת (משמאל) על $X = \{gH|\ g \in G\}$ על ידי כפל משמאל. פעולה זו מגדירה הומומורפיזם $\psi\colon G \to S(X) \cong S_p$ על ידי $\psi(g')(gH) = g'gH$. יהי $\bar{G} = \psi(G) \leq S(X)$. אז הסדר של $\bar{G}$ מחלק את $|S_p| = p!$ וגם את $|G|$, לכן, לפי הנתון, הוא מחלק את p.

יהי $K = \mathrm{Ker}(\psi)$. אז לכל $g' \in K$ מתקיים $g'H = g'(1H) = 1H$, לכן $g' \in H$. מכאן $K \leq H$.

לכן $p = (G : H)$ מחלק את $|G/K| = (G : K)$

אבל $G/K \cong \bar{G}$. לכן $(G : K) = p = (G : H)$ ומכאן $H = K$. בפרט $H \lhd G$. ∎

תרגיל 29.07: *תהיינה A, B, C חבורות חילופיות נוצרות סופית. נניח כי $A \oplus B \cong A \oplus C$. הוכח כי $B \cong C$. תהי G חבורה סופית ויהי p הראשוני הקטן ביותר שמחלק את הסדר של G.*

פתרון: פתרון שגוי: $(A \oplus B)/A \cong B$, $(A \oplus C)/A \cong C$, לכן מהאיזומורפיזם הנתון נובע $B \cong C$.

נציג את A, B, C כסכום ישר של חבורות מעגליות מסדר אינסופי ומסדר שהוא חזקה של ראשוני. האיזומורפיזם המבוקש יתקבל מיחידות ההצגה הזאת.

ביתר פירוט, נניח כי $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ (באשר p ראשוני) מופיעה

$a \geq 0$ פעמים בפירוק של A;

$b \geq 0$ פעמים בפירוק של B;

$c \geq 0$ פעמים בפירוק של C.

אז היא מפיעה

$a+c\geq 0$ פעמים בפירוק של $A+B$;

$b+c\geq 0$ פעמים בפירוק של $A+C$.

בגלל האיזומורפיזם הנתון ויחידות הפירוק, $a+b=a+c$ ולכן $b=c$. באותו אופן מראים ש־$\mathbb{Z}$ מופיע אותו מספר פעמים בפירוק של B כמו בפירוק של C. מכאן של־B,C אותו פירוק ולכן $B\cong C$. ∎

תרגיל 29.08: *תהיינה G_1,G_2 פשוטות. תהי $G=G_1\times G_2$ ותהי $N\lhd G$ לא טריוויאלית. הוכח:*

(א) $N\cong G_1$ או $N\cong G_2$.

(ב) *תהי $\pi\colon G\to G_1$ ההטלה על הקואורדינטה הראשונה. אז $N=G_2$ או π מעתיק באופן חח"ע את N על G_1.*

(ההוכחות של שני החלקים אינן תלויות; חלק שני חזק יותר מהחלק הראשון.)

פתרון: (א) $1\lhd G_1\lhd G$ היא סדרת הרכב, שמנותיה הן G_1,G_2. גם $1\lhd N\lhd G$ סדרה נורמלית ללא חזרות. יש לה עידון לסדרת הרכב; אך כיון שבסדרת הרכב יש 2 גורמים בדיוק, היא כבר בעצמה סדרת הרכב. לכן $N\cong G_1$ (ו־$G/N\cong G_2$) או $N\cong G_2$ (ו־$G/N\cong G_1$).

(ב) $N\lhd G$, לכן $\pi(N)\lhd\pi(G)=G_1$. אך G_1 פשוטה, לכן $\pi(N)=1$ או $\pi(N)=G_1$. במקרה הראשון $N\leq\operatorname{Ker}\pi=G_2$ ולכן, כיון ש־G_2 פשוטה, $N=G_2$. במקרה השני הגרעין של $\pi|_N$ הוא $G_2\cap N$. הוא אינו N (כי $\pi(N)\neq 1$), ולכן, כיון שהוא נורמלי ב־G_2 הפשוטה, הוא 1. ∎

תרגיל 29.09: *תהיינה G_1,G_2 פשוטות לא אבליות. תהי $G=G_1\times G_2$ ותהי $N\lhd G$ לא טריוויאלית. אז $N=G_1$ או $N=G_2$.*

פתרון: עבור $i=1,2$ תהי $\varphi_i\colon N\to G_i$ הצמצום של ההטלה על הקואורדינטה ה־i ל־N. לפי תרגיל 29.08(ב) אפשר להניח כי φ_1,φ_2 איזומורפיזמים. אז $\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}\colon G_1\to G_2$ הוא איזומורפיזם ומתקיים
$N=\{(g,\varphi(g))|\ g\in G_1\}$

כיון ש־G_1 אינה חילופית, יש $a,g\in G_1$ כך ש־$g^a\neq g$. אז $\varphi(g^a)\neq\varphi(g)$, לכן $(g,\varphi(g))^{(a,1)}=(g^a,\varphi(g))\notin N$, בסתירה ל־$N\lhd G$. ∎

תרגיל 29.10: *תהיינה $K\lhd G$ כך ש־$G/K\cong\mathbb{Z}$. אז יש $H\leq G$ מעגלית אינסופית כך ש־$H\cap K=1$ ו־GHK.*

פתרון: ∎