1. גבולות ישרים והפוכים.

הגדרה 1.1: **קבוצה מכוונת** היא קבוצה I עם יחס סדר חלקי $\leq$, כך שלכל $i, j \in I$ קיים $k \in I$ המקיים $i, j \leq k$.

דוגמה 1.2: (א) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ עם הסדר הרגיל;

(ב) $\mathbb{N}$ עם יחס החילוק (כלומר, $j \leq i$ אם קיים m כך ש־$im = j$).

(ג) I משפחת כל הקבוצות (הסופיות) של קבוצה מסוימת X, עם יחס ההכלה $\subseteq$ או עם $\supseteq$.

קבוצה מכוונת תשמש אותנו כקבוצת אינדקסים של מערכת:

הגדרה 1.3: תהי $(I, \leq)$ קבוצה מכוונת. לכל $i \in I$ תהי S_i קבוצה, ולכל $j \leq i$ ב־I תהי $\pi_{ij}\colon S_i \to S_j$ העתקה.
אז $(S_i, \pi_{ij} |\ i, j \in I,\ i \geq j)$ נקראת **מערכת הפוכה (על I)** אם

(1) $\pi_{ii} = \mathrm{id}$ לכל $i \in I$;

(2) לכל $k \leq j \leq i$ ב־I התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} S_i \arrow[dr, "\pi_{ij}"'] \arrow[drr, "\pi_{ik}"] & & \\ & S_j \arrow[r, "\pi_{jk}"'] & S_k \end{tikzcd}$$

חסם של המערכת הנ"ל היא קבוצה S יחד עם העתקות $\{\pi_i\colon S \to S_i\}_{i\in I}$ כך שלכל $j \leq i$ ב־I התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\pi_i"] \arrow[drrr, "\pi_j"'] & & S_i \arrow[dr, "\pi_{ij}"'] \arrow[drr, "\pi_{ik}"] & & \\ & & & S_j \arrow[r, "\pi_{jk}"'] & S_k \end{tikzcd}$$

חסם $(S, \pi_i |\ i \in I)$ נקרא **גבול הפוך** של המערכת הנ"ל אם לכל חסם $(S', \pi'_i |\ i \in I)$ קיימת העתקה יחידה $\pi\colon S' \to S$ כך שלכל $i \in I$ התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r, "\exists!\pi"] \arrow[dr, "\pi'_i"'] & S \arrow[d, "\pi_i"] \\ & S_i \end{tikzcd}$$

סימון: $S = \varprojlim_{i\in I} S_i$.

דוגמה1.4: דוגמה למערכת הפוכה. לכל $n \in \mathbb{N}$ תהי $A_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. עבור $n|m$ תהי $\pi_{mn}\colon A_m \to A_n$ ההעתקה $k \pmod m \mapsto k \pmod n$. אז (A_n, π_{mn}) מערכת הפוכה על הקבוצה המכוונת $\mathbb{N}$ עם יחס החילוק.

באופן אנלוגי (על ידי הפיכת כל החצים בהגדרה 1.3) נגדיר

הגדרה 1.5: תהי $(I, \leq)$ קבוצה מכוונת. לכל $i \in I$ תהי S_i קבוצה, ולכל $j \leq i$ ב־I תהי $\lambda_{ji}\colon S_j \to S_i$ העתקה.
אז $(S_i, \lambda_{ji} |\ i, j \in I,\ i \geq j)$ נקראת **מערכת ישרה (על I)** אם

(1) $\lambda_{ii} = \mathrm{id}$ לכל $i \in I$;

(2) לכל $k \geq j \geq i$ ב־I התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} S_i & & \\ & S_j \arrow[ul, "\lambda_{ji}"] & S_k \arrow[l, "\lambda_{kj}"] \arrow[ull, "\lambda_{ki}"'] \end{tikzcd}$$

חסם של המערכת הנ"ל היא קבוצה S יחד עם העתקות $\{\lambda_i\colon S_i \to S\}_{i\in I}$ כך שלכל $j \geq i$ ב־I התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} S & S_i \arrow[l, "\lambda_i"'] & \\ & S_j \arrow[ul, "\lambda_j"] \arrow[u, "\lambda_{ji}"] & S_k \arrow[l, "\lambda_{kj}"] \arrow[ul, "\lambda_{ki}"'] \end{tikzcd}$$

חסם $(S, \lambda_i|\ i \in I)$ נקרא **גבול ישר** של המערכת הנ"ל אם לכל חסם $(S', \lambda'_i|\ i \in I)$ קיימת העתקה יחידה $\lambda\colon S \to S'$ כך שלכל $i \in I$ התרשים הבא חילופי

$$\begin{tikzcd} S' & S \arrow[l, "\exists!\lambda"'] \\ & S_i \arrow[u, "\lambda_i"'] \arrow[ul, "\lambda'_i"] \end{tikzcd}$$

סימון: $S = \varinjlim_{i\in I} S_i$.

הערה 1.6: באופן כללי יותר מגדירים גבול הפוך (ישר) **בקטגוריה**, כגון חבורות (עם הומומורפיזמים), מרחבים טופולוגיים (עם העתקות רציפות), מרחבים וקטוריים מעל שדה מסוים (עם העתקות לינאריות), וכד'. (כלומר, כל הקבוצות בהגדרה הם אוביקטים של הקטגוריה וכל ההעתקות הן מורפיזמים בקטגוריה.)

תרגיל 1.7: *הוכח שגבול הפוך (ישר) ־ אם הוא קיים ־ הוא יחיד, עד כדי איזומורפיזם בקטגוריה בה מדובר.*

בעקבות התרגיל הזה אפשר לומר "הגבול ההפוך (הישר)" במקום גבול הפוך (ישר).

למה 1.8: *תהי $\{S_i\}_{i\in I}$ מערכת הפוכה של קבוצות. תהי*

$$S = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} S_i|\ \pi_{ij}(x_i) = x_j \text{ לכל } i \geq j\} \tag{1}$$

ולכל $j \in I$ תהי $\pi\colon S \to S_j$ ההטלה $(x_i)_{i\in I} \mapsto x_j$. אזי $(S, \pi_i|\ i \in I)$ הוא גבול הפוך של המערכת הנ"ל.

הוכחה: לפי הגדרת S, $(S, \pi|\ i \in I)$ הוא חסם של המערכת ההפוכה. יהי $(S', \pi'_i|\ i \in I)$ חסם נוסף. נגדיר $\pi'\colon S' \to S$ כך: $\pi'(x') = (\pi'_i(x'))_{i\in I}$ לכל $x' \in S'$. אז לכל $i \in I$ מתקיים $\pi_i(\pi(x')) = \pi'_i(x')$, וברור שזוהי ההגדרה האפשרית היחידה כדי ששוויון זה יתקיים. ∎

דוגמה 1.9: תהי $\{S_i = (0, \frac{1}{i})\}_{i\in \mathbb{N}}$ מערכת הפוכה של קטעים פתוחים עם ההעתקות $\pi_{ij}\colon S_i \to S_j$ שהן ההכלות. אז $\varprojlim_{i\in\mathbb{N}} S_i = \emptyset$.

משפט 1.10: *גבול הפוך קיים בקטגוריות הבאות:*

(א) *קבוצות (עם העתקות)*

(ב) *חבורות (עם הומומורפיזמים)*

(ג) *מרחבים טופולוגיים (עם העתקות רציפות)*

(ד) *חבורות טופולוגיות (עם הומומורפיזמים רציפים). נעיר כי* **חבורה טופולוגית** *היא חבורה G שהיא גם מרחב טופולוגי (ובד"כ דורשים שזהו מרחב האוסדורף) כך שפעולת הכפל $G \times G \to G$ על ידי $(g,h) \mapsto gh$ והעתקת ההופכי $G \to G$ על ידי $g \mapsto g^{-1}$ הן העתקות רציפות.*

הוכחה: כמו בלמה הקודמת (אשר מוכיחה את (א)), רק צריך להוכיח כי S אובייקט בקטגוריה וההעתקות π_i שהוגדרו שם הן העתקות בקטגוריה. בד"כ מוכיחים זאת כך: קודם מוכיחים כי $\prod_{i\in I} S_i$ עם הטלות על הקואורדינטות הם בקטגוריה, ואח"כ מוכיחים ש־S עם הצמצומים של ההטלות ל־S הם בקטגוריה. למשל, במקרה (ג), הטופולוגיה על $\prod_{i\in I} S_i$ היא טופולוגית המכפלה והטופולוגיה על S היא הטופולוגיה שלו כתת מרחב של $\prod_{i\in I} S_i$. הפרטים מושארים לקורא. ∎

תרגיל: *1.11: תהי $\{S_i\}_{i\in I}$ מערכת הפוכה של מרחבים טופולוגיים. לכל $i \in I$ יהי $\mathcal{B}_i$ בסיס של S_i. יהי $S = \varprojlim_{i\in I} S_i$ נתון על ידי משוואה (1). אז*

$$\mathcal{B} = \{\pi_j^{-1}(V_j) = S \cap (V_j \times \prod_{i\neq j} S_i) |\ V_j \in \mathcal{B}_j,\ j \in I\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה על S.

פתרון: הטופולוגית המכפלה על $\prod_{i\in I} S_i$ נתונה, כידוע, על ידי בסיס של איברים מהצורה הבאה:

$$W = \prod_{j\in J} V_j \times \prod_{i\in I\setminus J} S_i,$$

באשר J תת קבוצה סופית של I ו־$V_j \in \mathcal{B}_j$ תת קבוצה של S_j לכל $j \in J$. אז קבוצות מהצורה

$$W \cap S = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(V_j)$$

מהוות בסיס של S בטופולוגיה של תת מרחב. בפרט בסיס זה מכיל את $\mathcal{B}$. אך, להיפך, כל איבר $S \cap W$ בבסיס זה נמצא ב־$\mathcal{B}$. אכן, יש $i \in I$ כך ש־ $j \geq i$ לכל $j \in J$. אז $V = \bigcap_{j\in J} \pi_{ij}^{-1}(V_j) \subseteq S_i$ פתוחה ב־S_i ולכן היא איחוד של אברי $\mathcal{B}_i$. לכן $\pi_i^{-1}(V)$ היא איחוד של אברי $\mathcal{B}$. אבל

$$W \cap S = \bigcap_{j\in J} \pi_j^{-1}(V_j) = \bigcap_{j\in J} \pi_i^{-1}\big(\pi_{ij}^{-1}(V_j)\big) = \pi_{ij}^{-1}\big(\bigcap_{j\in J} \pi_{ij}^{-1}(V_j)\big) = \pi_i^{-1}(V)$$

∎

משפט 1.12: *תהי* $\{S_i\}_{i\in I}$ *מערכת הפוכה של מרחבי האוסדורף קומפקטיים לא ריקים. אז* $S=\varprojlim_{i\in I} S_i$ *גם מרחב האוסדורף קומפקטי לא ריק.*

הוכחה: נסמן $S'=\prod_{i\in I} S_i$. ודאי $S'\neq\emptyset$ האוסדורף. לפי משפט טיכונוב S' קומפקטי.

נשים לב כי $S=\bigcap_{j\geq k} X_{jk}$, באשר

$$X_{jk}=\{(x_i)_{i\in I}\in S' |\ \pi_{jk}(x_j)=x_k\}$$ לכל $j\geq k$.

ודאי $X_{jk}\neq\emptyset$. כיון שחיתוך של קבוצות סגורות לא ריקות במרחב קומפקטי היא קבוצה לא ריקה וסגורה וקבוצה סגורה במרחב קומפקטי היא קומפקטית ותת מרחב כלשהו של מרחב האוסדורף הוא שוב האוסדורף, די להוכיח ש־X_{jk} סגורה ב־S' לכל $J\geq k$. לשם כך נוכיח כי $S'\smallsetminus X_{jk}$ פתוחה.

ואכן, יה $(x_i)\in S'\smallsetminus X_{jk}$. אז $\pi_{jk}(x_j)\neq x_k$. כיון ש־S_k הוא האוסדורף, יש $U,V\subseteq S_k$ פתוחות זרות כך ש־$\pi_{jk}(x_j)\in U$ ו־$x_k\in V$. הקבוצה $\{x'_i)_{i\in I}\in S' |\ x'_j\in\pi_{jk}^{-1}(U), x'_k\in V\}$ הינה פתוחה ב־S', מכילה את $(x_i)_{i\in I}$, ומוכלת ב־$S'\smallsetminus X_{jk}$. לכן $S'\smallsetminus X_{jk}$ פתוחה. ∎