# אלגברה ליניארית 2 –תרגיל 1

**שאלה 1**

יהי $R$ חוג.

א. הוכיחו כי אם $R$ חוג עם איבר יחידה 1 ומתקיים $1=0$ אז $R=\{0\}$.

ב. הוכיחו כי לכל $a\in R$, $-(-a)=a$.

**שאלה 2**

א. תהי $R$ קבוצת הפונקציות מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$ ( $\mathbb{R}$ - קבוצת הממשיים). נגדיר פעולות חיבור וכפל באופן הבא:

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$ (הכפל מימין הוא כפל בממשיים). הוכיחו כי תחת הגדרות אלה, $R$ היא חוג חילופי עם יחידה, ומצאו את כל האיברים ההפיכים ב- $R$.

ב. מצאו הומומורפיזם מ- $R$ ל- $\mathbb{R}$.

**שאלה 3**

א. מצאו את האיברים ההפיכים בחוג השלמים של גאוס $\mathbb{Z}[i]$.

ב. הוכיחו כי לא קיים איזומורפיזם של חוגים מ- $\mathbb{Z}[i]$ ל- $\mathbb{Z}$ (רמז: התבוננו ב- $f(i)^2$).

**שאלה 4**

תהי $E$ קבוצת הסדרות של מספרים ממשיים. נגדיר חיבור וכפל לפי רכיבים, כלומר

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}+\{b_n\}_{n=0}^{\infty}=\{a_n+b_n\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\bullet\{b_n\}_{n=0}^{\infty}=\{a_nb_n\}_{n=0}^{\infty}$$

א. הוכיחו כי $E$ חוג חילופי עם יחידה.

ב. האם $E$ הוא תחום שלמות?

ג. נגדיר את $R$ להיות קבוצת הפונקציות מ- $E$ ל- $E$ המקיימות $f(a+b)=f(a)+f(b)$. נגדיר על $R$ פעולות חיבור $+$ וכפל $\bullet$ באופן הבא:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$

$$(f\bullet g)(x)=f(g(x))$$

(כלומר הכפל מוגדר כהרכבה של פונקציות). הוכיחו כי $R$ חוג.

ד. נגדיר $f:E\to E$ ע"י $f(a_1,a_2,a_3,...)=(0,a_1,a_2,...)$. הוכיחו כי $f\in R$, וכי $f$ הפיכה משמאל ולא מימין.

ה. הסיקו מסעיף ד' כי $R$ אינו חילופי.

**שאלה 6**

יהי $R$ חוג ו- $X$ משתנה. הוכיחו כי פעולת הכפל בחוג הפולינומים $R[X]$ מקיימת את כלל הצירוף (אסוציאטיביות).

**שאלה 7**

יהי $F$ שדה ויהיו $X$, $Y$ משתנים.

א. הוכיחו כי $F[X]$ איזומורפי ל- $F[Y]$.

ב. היעזרו בטענה מהתרגול כדי להוכיח כי אם $F$ אינסופי ונתונים $f,g\in F[X]$ המקיימים $\forall a\in F.f(a)=g(a)$ אז $f=g$ (כפולינומים).