TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
בית הספר למדעי המתמטיקה

מבחן באלגברה לינארית 2

0366.1112.01

לתלמידי דן הרן
מועד א'

ב' בניסן, תשנ"ט
19 במרץ 1999

משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות. (רק ארבע התשובות הראשונות תבדקנה!)

שאלה 1: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. יהיו $v_1 \dots v_r, w_1 \dots w_s \in V$ שונים מאפס כך ש־

$$Z(v_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(v_r, T) = V = Z(w_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(w_s, T)$$

כמו כן, לכל $1 \le i \le r$ יהי $m_i \in F[X]$ מאפס־T של v_i ולכל $1 \le j \le s$ יהי $m'_j \in F[X]$ מאפס־T של w_j. נניח כי $m_r | \cdots | m_2 | m_1$ וכן $m'_s | \cdots | m'_2 | m'_1$. הוכח כי $r = s$ וכן $m_i = m'_i$ לכל $1 \le i \le r$. *נסח (בלי הוכחה) כל טענה עליה הינך מסתמך בהוכחה.*

שאלה 2: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית נורמלית. הוכח שוקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים ־ ניצבים זה לזה. *עליך להוכיח כל משפט / למה / טענה שהוכחו בהרצאה, אם ברצונך להסתמך עליהם.*

שאלה 3: תהיינה $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. הוכח שיש מטריצה $C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ שאיננה מהצורה $f(A) + g(B)$ עבור שום זוג של פולינומים $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

שאלה 4: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית והפיכה.

(א) הוכח שקימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש־$B^3 = A$.

(ב) הוכח: קימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית כך ש־$B^2 = A$ אם ורק אם קימת $C \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש־$C^t C = A$.

שאלה 5: תהי

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 0 & -9 \\ 32 & 1 & 24 \\ 16 & 0 & 13 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

מצא את צורת ז'ורדן שלה J ומצא $P \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ הפיכה כך ש־$P^{-1}AP = J$.

בהצלחה!