משפטים למבחן

טענה (מתוך הערה 3.5 על $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$): *$[k]$ הפיך אם"ם k זר ל־n.*

למה 4.3: *יהיו $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{Z}$ לא כולם 0. אז $d=\gcd(a_1,\dots,a_k)$ קיים וקיימים $c_1,\dots,c_k\in\mathbb{Z}$ כך ש־$d=c_1a_1+\cdots+c_ka_k$.*

משפט 4.7: *לכל $0\neq a\in\mathbb{Z}$ יש הצגה יחידה*

$$a=up_1p_2\cdots p_r$$

באשר $u\in\{\pm1\}$ ו־$p_1\le p_2\le\ldots\le p_r$ ראשוניים (לא בהכרח שונים זה מזה).

משפט 6.9: *תהי $\langle g\rangle$ חבורה מעגלית מסדר סופי n. לכל מחלק d של n קימת ל־$\langle g\rangle$ בדיוק חבורה חלקית אחת מסדר d, היא $\langle g^{\frac{n}{d}}\rangle$. אלה כל החבורות החלקיות של $\langle g\rangle$, בפרט כולן מעגליות.*

למה 6.13: *לכל $d\in\mathbb{N}$ קימת ל־$\mathbb{Z}$ בדיוק חבורה חלקית אחת מאינדקס d, היא $\{dk|\ k\in\mathbb{Z}\}=\langle d\rangle=d\mathbb{Z}$. חבורות אלה הן כל החבורות החלקיות של $\mathbb{Z}$ (פרט ל־$\{0\}$). בפרט כולן מעגליות ואיזומורפיות ל־$\mathbb{Z}$.*

משפט 7.14 (משפט האיזומורפיזם הראשון): *תהי N חבורה חלקית נורמלית של חבורה G.*

(א) *ההעתקה $\pi\colon G\to G/N$ הנתונה על ידי $\pi(g)=gN$ היא אפימורפיזם שגרעינו N. הוא נקרא האפימורפיזם הטבעי.*

(ב) *יהי $\theta\colon G\to H$ הומומורפיזם חבורות כך ש־$N\le\operatorname{Ker}\theta$. אזי קיים הומומורפיזם יחיד $\theta_N\colon G/N\to H$ כך ש־$\theta=\theta_N\circ\pi$; הוא מוגדר על ידי $\theta_N(gN)=\theta(g)$ ומקיים: θ_N חח"ע $\Leftrightarrow N=\operatorname{Ker}\theta$, $\operatorname{Im}(\theta)=\operatorname{Im}(\theta_N)$.*

(ג) *אם $N=\operatorname{Ker}\theta$ אז $\theta_N\colon G/\operatorname{Ker}\theta\to\operatorname{Im}\theta$ הוא איזומורפיזם.*

למה 7.9 ומשפט 7.18 (משפט האיזומ' השני): *תהי $N\lhd G$ ותהי $A\le G$. אזי $AN=NA=\langle A,N\rangle\le G$, $A\cap N\lhd A$, ו־$A/A\cap N\cong AN/N$ על ידי $a(A\cap N)\mapsto aN$.*

למת הפרפר 7.20 (Zassenhaus): *יהיו $A_1\lhd A\le G$ ו־$B_1\lhd B\le G$. אזי*

(א) $A_1(A\cap B_1),A_1(A\cap B)\le G$

(ב) $A_1(A\cap B_1)\lhd A_1(A\cap B)$ *ובאפן סימטרי* $B_1(A_1\cap B)\lhd B_1(A\cap B)$

(ג) $A_1(A\cap B)/A_1(A\cap B_1)\cong B_1(A\cap B)/B_1(A_1\cap B)$.

למה 8.7: *נניח כי G פועלת על X ויהי $x\in X$. אזי*

(א) *$G_x=\{g\in G|\ {}^gx=x\}$ היא חבורה חלקית של G הנקראת **חבורת המייצב** של x.*

(ב) ${}^{g_1}x={}^{g_2}x\Leftrightarrow g_1G_x=g_2G_x\Leftrightarrow G_xg_1^{-1}=G_xg_2^{-1}$.

(ג) *אורך המסלול X' של x הוא $(G:G_x)$. יש התאמה חח"ע ועל $R\to X'$ על ידי $g\mapsto {}^gx$, באשר R מערכת מייצגים של המחלקות השמאליות של G_x ב־G. (כלומר, $G=\dot{\bigcup}_{g\in R}gG_x$.)*

מסקנה 8.9: *אם חבורה G פועלת על קבוצה סופית X, ו־$\{x_i\}_{i\in I}$ היא מערכת מיצגים של מסלולי־G אז מתקיים $|X| = \sum_{i\in I}(G : G_{x_i})$. אם $\{x_i\}_{i\in I'}$ היא מערכת מיצגים של מסלולי־G בעלי אורך $1 <$ אז*

$$|X| = \sum_{i\in I'}(G : G_{x_i}) + |\{x \in X| \ {}^g x = x \text{ לכל } g \in G\}|.$$

למה 9.2: *כל $\sigma \in S_n$ ניתן להציג כמכפלה $\sigma = \pi_1\pi_2\cdots\pi_r$ של חישוקים זרים מאורך $1 <$. הצגה זו הנה יחידה עד כדי סדר החישוקים.*

הערה 9.7 ומשפט 9.9: *הגדר זוגיות של תמורה והוכח כי $\mathrm{Sg}(\sigma\tau) = \mathrm{Sg}(\sigma)\mathrm{Sg}(\tau)$.*

משפט 9.17: *A_n פשוטה לכל $n \geq 5$.*

משפט 9.18 (Cayley): *תהי G חבורה סופית מסדר n. אזי G איזומורפית לחבורה חלקית של S_n.*

משפט 10.1: *תהי G חבורה ו־$G_1, \ldots, G_n \leq G$. התנאים הבאים שקולים:*

למה 10.4: *תהי G חבורה סופית ו־$G_1, \ldots, G_n \lhd G$. נניח שהמספרים $|G_1|, \ldots, |G_n|$ זרים בזוגות ומתקיים $|G| = |G_1|\cdots|G_n|$. אז*

(א) $G = G_1 \times \cdots \times G_n$;

(ב) $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(G_1) \times \cdots \times \mathrm{Aut}(G_n)$.

משפט 10.6: *(א)* $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$.

משפט 11.2 (Schreier): *לכל שתי סדרות נורמליות של אותה החבורה קיימים עידונים שקולים זה לזה.*

משפט 12.2: *תהי $\{1\} \neq G$ חבורת־p. אז $Z(G) \neq \{1\}$ (=המֶרכז של G).*

מסקנה 12.3: *כל חבורה G מסדר p^2 היא חילופית.*

למה 12.4: *תהי G חבורת־p ותהי $U < G$. אזי $U < N_G(U) = \{g \in G| \ g^{-1}Ug = U\}$.*

משפט 12.5: *תהי G חבורת־p ותהי U חבורה חלקית מרבית שלה (כלומר $U < G$ ואין $U < H < G$). אזי*

(א) $U \lhd G$.

(ב) $(G : U) = p$.

(ג) *ל־G סדרת הרכב שכל גורמיה מעגליים מסדר p. בפרט G פתירה.*

למה 13.1: *תהי G חבורה **חילופית** סופית. אם p מחלק את $|G|$ אז יש איבר ב־G מסדר p.*

משפט 13.2 (המשפט הראשון של סילוב): *לכל חבורה סופית G יש חבורת סילוב־p.*

משפט 13.4: *תהי G חבורה סופית.*

(א) *אם H חבורת־p חלקית של G אז H מוכלת בחבורת סילוב־p של G.*

(ב) (המשפט השני של סילוב) *כל חבורות סילוב־p של G צמודות זו לזו.*

(ג) (המשפט השלישי של סילוב) *יהי $n_p(G)$ מספר חבורות סילוב־p של G. אז $n_p(G) \equiv 1(\mod p)$.*

למה 13.9: *תהי G חבורה סופית ו־$N \triangleleft G$. תהי P חבורת סילוב־p של G. אזי*

(א) *$P \cap N$ היא חבורת סילוב־p של N.*

(ב) *PN/N היא חבורת סילוב־p של G/N.*

משפט 13.16: *יהי F שדה ותהי G תת חבורה סופית של החבורה הכפלית $F^\times$ של F. אז G מעגלית.*

למה 14.2: *(א) $A^t \leq A$ תת חבורה.*

(ב) *A/A^t חסרת פיתול.*

(ג) *אם A חבורת פיתול חילופית נוצרת סופית אז A סופית.*

למה 14.6: *תהי F חבורה חילופית. סדרה $v_1, \dots, v_n$ בסיס של F אם ורק אם*

(2) *$F = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle$ ו־*

(3) *$\langle v_i \rangle \cong \mathbb{Z}$ לכל i.*

משפט 14.9: *אם A חבורה חילופית נוצרת סופית וחסרת פיתול אז A חפשית.*

משפט 14.10: *אם $v_1, \dots, v_n$ בסיס (די להניח שהיא בלתי תלויה), ו־$u_1, \dots, u_k$ סדרת יוצרים, אז $n \leq k$.*

משפט 14.13 (משפט החבורות החלקיות של החבורה החילופית החפשית F_n): *תהי $H \leq F_n$. אזי H חילופית חפשית: קיים בסיס $v_1, \dots, v_n$ של F_n וקיימים $0 \leq k \leq n$ ו־$\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \mathbb{N}$ כך ש־$\epsilon_1 \big| \epsilon_2 \big| \cdots \big| \epsilon_k$ ו־$\epsilon_1 v_1, \dots, \epsilon_k v_k$ בסיס של H.*

משפט 15.2 ומשפט 15.3: *תהי A חבורה חילופית נוצרת סופית. אזי*

$$A \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z} \oplus F_r. \tag{1}$$

באשר $p_1, \dots, p_k$ מספרים ראשוניים (לא בהכרח שונים), $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$, ו־$F_r = \overbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}^{r}$.

משפט 15.6 (משפט יחידות הפירוק של חבורה חילופית נוצרת סופית): *תהי A חילופית נוצרת סופית. אזי הפירוק (1)*

$$A \cong \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/p_k^{\alpha_k}\mathbb{Z} \oplus F_r \tag{1}$$

יחיד, עד כדי סדר המחוברים.

משפט 15.8 (משפט החבורות החלקיות של חבורות חילופיות נוצרות סופית): *תהי A חילופית נוצרת סופית ותהי $B \leq A$. אז B נוצרת סופית. יהי p מספר ראשוני. נניח כי בפירוק (1) של A [של B] מופיעים F_r [F_s], ו־$k = k(p)$ [$l = l(p)$] חמחוברים מעגליים מסדרים $p^{\alpha_1}, p^{\alpha_2}, \dots, p^{\alpha_k}$ [$p^{\beta_1}, p^{\beta_2}, \dots, p^{\beta_l}$] כאשר $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k \geq 1$ [$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_l \geq 1$]. אזי $s \leq r$, $l \leq k$, ו־$\beta_i \leq \alpha_i$ לכל $1 \leq i \leq l$.*

תרגיל 20.2 ולמה 20.4:

(א) אם $H_1 \leq H_2 \leq G$ אז $[H_1, G] \leq [H_2, G]$.

(ב) $H \triangleleft G \Leftrightarrow [H, G] \leq H$.

(ג) *תהי* $K \leq H \leq G, K \triangleleft G$. אז $H/K \leq Z(G/K) \Leftrightarrow [H, G] \leq K$.

(א) $\Phi_{i+1} \leq \Phi_i$.

(ב) $\Phi_i \triangleleft G$.

(ג) $\Phi_i/\Phi_{i+1} \leq Z(G/\Phi_{i+1})$.

משפט 20.7: $\Phi_{m+1} = 1 \Leftrightarrow Z_m = G$. *יתר על כן:*

(א) אם $Z_m = G$ אז $\Phi_{i+1} \leq Z_{m-i}$ *לכל* $0 \leq i \leq m$.

(ב) אם $\Phi_{m+1} = 1$ אז $\Phi_{i+1} \leq Z_{m-i}$ *לכל* $0 \leq i \leq m$.

למה 20.10: *אם* $G_1, \dots, G_r$ *נילפוטנטיות אז* $G_1 \times \cdots \times G_r$ *נילפוטנטית.*

משפט 20.13: *תהי G חבורה סופית. התנאים הבאים שקולים:*

(א) G *נילפוטנטית.*

(ב) *כל חבורות סילוב־p של G הן נורמליות ב־G.*

(ג) G *היא המכפלה הישרה של חבורות סילוב־p שלה.*