

בחינה לדוגמה באלגברה לינארית 2 לתלמידים של אשר בן-ארצי, סמסטר ב', תשס"ח, 2007/8.

משך הבחינה: 3 שעות. יש לענות על 4 (בלבד) מתוך 5 השאלות הבאות. אין להשתמש בחומר עזר כלשהו. אין להשתמש במחשבוניו. יש להסביר את התשובות במלואן ובצורה מדויקת.

שאלה 1

תהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית כאשר V מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל שדה F . אז קיים פרוק ישר T -שמור של V מהצורה הבאה:

$$V = Z(v_{1,1}, T) \oplus \dots \oplus Z(v_{1,s_1}, T) \\ \oplus Z(v_{2,1}, T) \oplus \dots \oplus Z(v_{2,s_2}, T) \\ \vdots \\ \oplus Z(v_{k,1}, T) \oplus \dots \oplus Z(v_{k,s_k}, T)$$

כך ש $m_{v_{i,j}} = p_i^{n_{i,j}}$ ($n_{i,j} \geq 1$) כאשר p_1, \dots, p_k פולינומים אי-פריקים מתוקנים שונים

זה מזה, וסדרת הפולינומים $\{p_i^{n_{i,j}} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq s_i\}$ נקבעת באופן יחיד.

שאלה 2

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל F ($F = \mathbb{C}$ או \mathbb{R}), ויהי $U \subset V$ תת מרחב בעל מימד סופי. אז מתקיים: (א) $V = U \oplus U^\perp$ ו (ב) $U^{\perp\perp} = U$.

שאלה 3

תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -4 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. למצוא מטריצה הפיכה S ו מטריצת ז'ורדן J כך ש $A = SJS^{-1}$.

שאלה 4

האם נכון או לא נכון שלכל מטריצה מרוכבת A מסדר 2×2 קיימת מטריצה מרוכבת X מסדר 2×2 כך ש $X^2 = A$?

שאלה 5

תהיינה A, B שתי מטריצות $n \times n$ סימטריות ממשיות ומוגדרות חיובית מסדר $n \times n$. להוכיח ש $\det(A+B) > \max(\det A, \det B)$ (ההוכחה צריכה להיות תקפה לכל n).