TEL AVIU UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES בית הספר למדעי המתמטיקה

0366.1112.03

מבחן באלגברה לינארית 2 א

לתלמידי דן הרן — י"ג בתמוז, תשע"ב
מועד א' — 3 ביולי 2012

משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענו על ארבע מתוך שש השאלות הבאות. (רק ארבע התשובות הראשונות תבדקנה!)
שתי השאלות הראשונות הן משפטים שהיו בהרצאה.

שאלה 1: יהי V מרחב מכפלה פנימית בעל מימד סופי מעל $\mathbb{C}$. יהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. הוכח שקיימת העתקה יחידה $S\colon V \to V$ כך שמתקיים $\langle T(u), v\rangle = \langle u, S(v)\rangle$ לכל $u, v \in V$. הראה גם ש־S לינארית.

שאלה 2: יהי V מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל שדה F ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. הוכח שקיים בסיס $\mathcal{B}$ של V כך ש־$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ מטריצה אלכסונית אם ורק אם f_T הוא מכפלה של גורמים ממעלה אחת ב־$F[X]$ ולכל ערך עצמי של T הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי שלו.

שאלה 3: תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. מצא מטריצת ז'ורדן J ומטריצה הפיכה P כך ש־$P^{-1}AP = J$.

שאלה 4: הוכח כי אם $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ונורמלית אז A סימטרית.

שאלה 5: נתונות מטריצות $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. אילו מביניהן חופפות
(א) מעל $\mathbb{R}$? (ב) מעל $\mathbb{C}$? (ג) מעל $\mathbb{Q}$? נמק את תשובותיך.

שאלה 6: תהי $A \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ המקיימת $(A + 2I_3)^{11}(A - I_3)^{13} = 0$ וגם $\operatorname{tr} A = -3$. מצא את הפולינום האופייני של A.

בהצלחה!