TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES בית הספר למדעי המתמטיקה

מבחן באלגברה לינארית 2

0366.1112.03,06

לתלמידי אשר בן־ארצי ודן הרן
מועד א'

כ"ז בתמוז, תשס"ח
30 ביולי 2008

משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות. (רק ארבע התשובות הראשונות תבדקנה!)

שאלה 1: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F בעל מימד סופי תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית, יהי $v \in V$ ויהי $g \in F[X]$. הוכיחו את הנוסחה

$$m_{g(T)v} = \frac{m_v}{\gcd(m_v, g)}.$$

פתרון: (זהו חלק ממשפט שנלמד בהרצאה בשנה זו; משפט זה והמושג m_v לא הופיעו בשנים מאוחרות יותר.)
לפי ההגדרה, $m_{g(T)v}$ הוא פולינום f מתוקן בעל המעלה המזערית המקיים $f(T)(g(T)v) = 0$. כעת, לכל $f \in F[X]$ מתקיים

$$f(T)(g(T)v = 0 \leftrightarrow (fg)(T)v = 0 \leftrightarrow m_v|fg \leftrightarrow \frac{m_v}{\gcd(m_v,g)}|f\frac{g}{\gcd(m_v,g)}$$

והיות ו־ $f\frac{g}{\gcd(m_v,g)}$ | $\frac{m_v}{\gcd(m_v,g)}$ זרים, זה שקול ל־ $\frac{m_v}{\gcd(m_v,g)}|f$.
כלומר $m_{g(T)v}$ הוא פולינום f מתוקן בעל המעלה המזערית המקיים $\frac{m_v}{\gcd(m_v,g)}|f$. ברור שפולינום זה הוא $f = \frac{m_v}{\gcd(m_v,g)}$.

שאלה 2: הוכיחו את היחידות במשפט סילבסטר: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ בעל מימד n ותהי f תבנית בילינארית סימטרית על V. אז יש לכל היותר זוג אחד של מספרים (p,q) עבורו קיים בסיס $\mathcal{B}$ של V כך שהמטריצה $[f]_{\mathcal{B}}$, המייצגת את f לפי $\mathcal{B}$, היא $I_{p,q} = D_{p,q}$. (המטריצה האלכסונית שיש לה p "1"־ים, q "(-1)"־ים ו־ $n-p-q$ אפסים באלכסון הראשי).

פתרון: זהו משפט שנלמד בהרצאה.

שאלה 3: יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F בעל מימד סופי ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. נניח שהפולינום המינימלי m_T הוא אי פריק. הוכיחו ש־ $\deg m_T$ מחלק את $\dim V$.

פתרון: יהי f_T הפולינום האופייני של T. כידוע, ל־ f_T, m_T אותם גורמים אי פריקים. כיון ש־ m_T אי פריק ולכן יש לו גורם אי פריק יחיד –הוא עצמו, ל־ f_T גורם אי פריק יחיד, הוא m_T. לכן $f_T = m_T^k$ עבור איזה $k \in \mathbb{N}$. אבל $\deg f_T = \dim V$, לכן $\dim V = \deg(m_T^k) = k \cdot \deg m_T$. לכן $\deg m_T$ מחלק את $\dim V$.

∎

שאלה 4: יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ בעל מימד סופי ויהיו U_1, U_2 שני תת מרחבים שלו כך ש־ $V = U_1 \oplus U_2$.
תהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית המוגדרת על יד $T(u_1 + u_2) = u_1 - u_2$, באשר $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$.
תהי נתונה מכפלה פנימית על V. הוכיחו ביחס למכפלה פנימית זו ש־ T צמודה לעצמה אם ורק אם $U_1 = U_2^{\perp}$.

פתרון: ההעתקה T צמודה לעצמה אם ורק אם לכל $v, v' \in V$ מתקיים $\langle T(v), v'\rangle = \langle v, T(v')\rangle$. כיון ש־ $V = U_1 + U_2$, אפשר לכתוב $v = u_1 + u_2,\ v' = u_1' + u_2'$ באשר $u_1, u_1' \in U_1, u_2, u_2' \in U_2$. לכן T צמודה לעצמה אם ורק אם לכל $u_1, u_1' \in U_1, u_2, u_2' \in U_2$ מתקיים

$$.\langle T(u_1 + u_2), u_1' + u_2'\rangle = \langle u_1 + u_2, T(u_1' + u_2')\rangle \qquad (1)$$

לפי הגדרת T, (1) שקול ל־ $\langle u_1 - u_2, u_1' + u_2'\rangle = \langle u_1 + u_2, u_1' - u_2'\rangle$ כלומר,

$$,\langle u_1, u_1'\rangle + \langle u_1, u_2'\rangle - \langle u_2, u_1'\rangle - \langle u_2, u_2'\rangle = \langle u_1, u_1'\rangle - \langle u_1, u_2'\rangle + \langle u_2, u_1'\rangle - \langle u_2, u_2'\rangle$$

כלומר, $2\langle u_1, u_2'\rangle = 2\langle u_2, u_1'\rangle$, כלומר,

$$.\langle u_1, u_2'\rangle = \langle u_2, u_1'\rangle \qquad (2)$$

כעת, אם T צמודה לעצמה, אז (2) מתקיים בפרט לכל $u_1 \in U_1, u_2' \in U_2$ ו־ $u_2 = u_1' = 0$. כלומר, מתקיים

$$\langle u_1, u_2'\rangle = 0 \qquad \text{לכל } u_1 \in U_1, u_2' \in U_2.$$

זה אומר ש־ $U_1 \subseteq U_2^{\perp}$. אך כיון ש־ $V = U_1 \oplus U_2$, מתקיים $\dim U_1 = \dim V - \dim U_2 = \dim U_2^{\perp}$.
מכאן שההכלה $U_1 \subseteq U_2^{\perp}$ היא שוויון.

להיפך, אם $U_1 = U_2^{\perp}$. אז שני האגפים של (2) הם 0 ולכן שווים זה לזה. לכן אז T צמודה לעצמה. ∎

שאלה 5: נתונה $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. מצאו את צורת ז'ורדן J שלה ומצאו מטריצה P הפיכה כך ש־ $P^{-1}AP = J$.

פתרון: נשים לב ש־ $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, באשר $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. נמצא קודם צורות ז'ורדן J_1, J_2 של A_1, A_2, בהתאמה.

הפולינום האופיני של מטריצה B מסדר 2×2 הוא $X^2 - \mathrm{tr}(B)X + \det(B)$, לכן במקרה שלנו

$$f_{A_1} = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2 \quad , f_{A_2} = X^2 - 2X + 0 = X(X-2)$$

כיון שהשרשים $0,2$ של f_{A_2} שונים זה מזה, J_2 אלכסונית, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. כיון של־ f_{A_1} שרש יחיד 1, $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ או $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$. אך לא יתכן $J_1 = I$, כי I דומה רק לעצמה, ולכן לא ל־ A_1. לכן $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

תהי $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$. נשים לב ש־ J בצורת ז'ורדן. לכן אם נמצא $P_1, P_2 \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ הפיכות כך שמתקיים $P_1^{-1}A_1P_1 = J_1$ $P_2^{-1}A_2P_2 = J_2$ ונגדיר $P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$ אז P הפיכה ומתקיים $P^{-1}AP = J$, לפי תכונות כפל של מטריצות גושים.

מציאת P_2: עבור הערכים העצמיים $0,2$ של A_2 נמצא וקטורים עצמיים v_1, v_2 ואלה יהוו עמודות של P_2.

$\lambda = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} v_1 = 0$ $(A_2 - 0I)v_1 =$ נותן פתרון $v_1 = \binom{1}{1}$.

$\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} v_2 = 0$ $(A_2 - 2I)v_2 =$ נותן פתרון $v_2 = \binom{0}{1}$.

לכן $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

מציאת P_1: נסמן $N = A_1 - 1I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. אז $0 = \mathrm{Ker}\, N^0 \subset \mathrm{Ker}\, N \subset \mathrm{Ker}\, N^2 = \mathbb{C}^2$. נמצא בסיס ל־ $\mathrm{Ker}\, N$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} w = 0$ נותן פתרון $w = \binom{1}{2}$. כעת נמצא השלמה v_1 של w לבסיס של $\mathrm{Ker}\, N^2 = \mathbb{C}^2$ ונגדיר $v_2 = N(v_1)$. אז v_1, v_2 יהוו עמודות של P_1. למשל, $v_1 = \binom{1}{0}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\binom{1}{0} = \binom{2}{4}$.

לכן $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ∎

הערה: מטריצה J שמצאנו הינה יחידה עד כדי סדר שלושת הגושים באלכסון. מטריצה P איננה יחידה.

הערה: הפתרון מוגש לתלמידים כדרך לעזור להם ללמוד, ולא כמסמך משפטי שקובע מהי הדרך הנכונה או הלא נכונה לפתור תרגילים אלה. יתכן ויש טעויות דפוס ואחרות בפתרון.