

הנחיות כלליות:

- את העבודה יש להגיש עד יום א', 28.4.2019 (בדיוק אחרי חופשת פסח). אני מקווה שלא יהיה צורך בהארכה.
- בניגוד למה שתיכננתי, התברר לי שקשה להכין עבודות נפרדות אחדות, לכן אני נותן אותה עבודה לכולכם. על כן אבקש מכל אחד מכם לעבוד על עבודה זו באופן עצמאי, ללא עזרה הדדית.
- אחדים מהתרגילים אולי קשים יותר - השתדלתי לתת הדרכה מתאימה. אם נתקלת בקשיים בפתרון הבעיות ניתן לפנות אלי. אני מתאר לעצמי שבמקרה כזה אדרוש הסבר על הדרכים בהם ניסית לתקוף את הבעיה ועל הקושי בו נתקלת. יתכן ויהיה לי רמז שעשוי לקדם אותך הלאה.
- אם יש טעות בתרגיל כלשהו, אבקש לפנות אלי. אשמח לתקן גם טעויות דפוס לא חשובות.
- יש להקפיד מאד על הצגה ברורה: הסיבה איננה הקפדה על קוצו של יוד מצדי, אלא הקושי (שלי) להבין את עבודתך. השתדלו להקל עלי בבדיקת העבודה.

בהצלחה!

תרגיל 1: יהי p מספר ראשוני או 0. תהי G חבורה פרוסופית. הוכח שיש הרחבת גלואה L/K של שדות בעלי אפיון (=מציין) p כך ש- $\text{Gal}(L/K) \cong G$.

הדרכה: זוהי מסקנה 1.3.4 בספר [FA]. אין לתרגם את ההוכחה שם מאגנלית לעברית, אלא להוכיח את הטענה בהסתמך רק על טענות ומשפטים שהיו בקורס הנוכחי או באלגברה ב2. כלומר, אם מסתמכים על טענות אחרות מהספר, צריך גם להוכיח אותן. בפרט, אם נקודות מסוימות בהוכחה בספר חסרות הנמקה, צריך להשלים אותה.

תרגיל 2: יהי $\theta: G \rightarrow H$ אפימורפיזם של חבורות פרוסופיות.

- (א) הוכח ש- θ מעתיקה מערכת יוצרים מתכנסת ל-1 של G על מערכת יוצרים מתכנסת ל-1 של H .
 (ב) תהי Y מערכת יוצרים מתכנסת ל-1 של H . נניח ש- $1 \in Y$. הוכח שיש מערכת יוצרים X מתכנסת ל-1 של G כך ש- $\theta(X) = Y$.

הדרכה לגבי (ב): זהו חיזוק של משפט 7.2 (Douady) מההרצאה, אשר הובא ללא הוכחה. אין להסתמך עליו בעבודה זו. קרא את ההוכחה של משפט זה בטענה 17.1.1 בספר [FA] ועשה שינויים מתאימים בה כדי לקבל את הטענה המבוקשת.

תרגיל 3: תהיינה $S_1, S_2, S_3, \dots$ כל החבורות הסופיות הפשוטות (אחת מכל מחלקת איזומורפיזם). לכל $i \in \mathbb{N}$

תהי G_i המכפלה הישרה של n_i עותקים של S_i , כאשר n_i מספר טבעי. תהי $G = \prod_{i=1}^{\infty} G_i$. הוכח

- (א) G חבורה קטנה: לכל n טבעי יש ל- G רק מספר סופי של תת חבורות פתוחות בעלות אינדקס n ב- G .
 (ב) בבחירה מתאימה של n_i החבורה G אינה נוצרת סופית (כחבורה פרוסופית).
 (ג) (תרגיל רשות - צריך להסתמך על חומר שלא למדנו) מהו מספר היוצרים המזערי של G , אם $n_i = 1$ לכל i ?

תרגיל 4: תהי G חבורה פרוסופית שיש לה לכל $n \in \mathbb{N}$ לכל היותר תת חבורה פתוחה אחת בעלת אינדקס n ב- G . הוכח ש- G היא פרו-מעגלית (גבול הפוך של חבורות מעגליות).
 הדרכה: זהו תרגיל 1.11 בספר [FA]. ראה הדרכה שם.

תרגיל 5: תהי G גבול הפוך של חבורות פרוסופיות פרויקטיביות. הוכח ש- G פרויקטיבית. (חבורה פרוסופית נקראת פרויקטיבית אם $\text{cd}(G) \leq 1$).

תרגיל 6: תהי A המכפלה הישרה של n עותקים של החבורה הפרו- p המעגלית $\mathbb{Z}_p$.

- (א) הוכח ש- $\text{cd}_p(A) = n$.
 (ב) נניח כי $n = p^m$. החבורה $\mathbb{Z}_p$ פועלת על A דרך המנה $\mathbb{Z}_p/p^m\mathbb{Z}_p$ כחבורת תמורות של הרכיבים. (כלומר, אם נסמן $C = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, אז אפשר לכתוב $A = A^C = \{f: C \rightarrow A\}$ ואם $\pi: \mathbb{Z}_p \rightarrow C$ העתקת המנה אז הפעולה נתונה על ידי $f^\sigma(c) = f(\pi(\sigma) + c)$). תהי $G = A \rtimes \mathbb{Z}_p$ (המכפלה הישרה למחצה של $\mathbb{Z}_p$ עם A , ראה הערה 12.3 בחוברת). הוכח: $\text{cd}_p(G) = p^m + 1$.

תרגיל 7: יהי X מרחב פרוסופי (גבול הפוך של מרחבים סופיים דיסקרטיים). חבורה פרוסופית חפשית על X היא חבורה פרוסופית F עם העתקה רציפה $\varphi: X \rightarrow F$ כך שלכל העתקה רציפה $\psi: X \rightarrow G$ לתוך חבורה פרוסופית G קיים הומומורפיזם רציף יחיד $\rho: F \rightarrow G$ שמקיים $\rho \circ \varphi = \psi$.
הוכח שחבורה חפשית כפי שהוגדרה בקורס היא מהסוג הזה, כלומר, מקרה פרטי של ההגדרה לעיל.

תרגיל 8: יהי $\pi: G \rightarrow H$ אפימורפיזם של חבורות פרוסופיות. הוכח שיש העתקה רציפה (לא נדרש שהיא תהיה הומומורפיזם) $\rho: H \rightarrow G$ כך ש- $\pi \circ \rho = \text{id}_H$.
הדרכה: זוהי טענה 2.2.2 בספר [RZ]. ראה הדרכה לתרגיל 3.

תרגיל 9: תהי G חבורה סופית ותהי A חבורה סופית אבלית. תהי $B = A^G = \{f: G \rightarrow A\}$ המכפלה הישרה של G עותקים של A . נתונה סדרה קצרה מדויקת $0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow 1$ בה G פועלת על B באופן הבא:
 $(\sigma f)(\tau) = f(\tau\sigma)$
הוכח שהסדרה מתפצלת.

תרגיל 10: תהי $\hat{F}(X)$ החבורה הפרוסופית החפשית על קבוצה X (המתכנסת ל-1) אינסופית. הוכח
(א) עוצמת הקבוצה של התת חבורות פתוחות נורמליות של $\hat{F}(X)$ היא $|X|$ (העוצמה של X).
(ב) עוצמת הקבוצה של התת חבורות פתוחות של $\hat{F}(X)$ היא $|X|$ (העוצמה של X).

בהצלחה!

[FA] M. Jarden, M. Fried, *Field Arithmetic*. 3rd edition. Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete III, vol. 11.

[RZ] L. Ribes, P. Zalesskii, *Profinite groups*. Springer, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete III, vol. 40.