TEL AVIV UNIVERSITY

FACULTY OF EXACT SCIENCE

ON THE NAME OF RAYMOND AND BEVERLY SACKLER

SCHOOL OF MATHEMATICS SCIENCE

RESTRICTED SOLUTIONS FOR DELIVERY PROBLEMS

Thesis submitted towards the M.Sc. degree

at Tel Aviv University

by

LIMOR KLEIN

This work has been carried out under the direction of

PROF. REFAEL HASSIN

August 1994

ABSTRACT

This work deals with the problem of finding the shortes route for delivering products between vertices on a graph, where each one is defined as a demand point or a supply point (warehouse).

A single vehicle with infinite capacity, limited to carry only one type of object each time, is available to ship objects among the vertices.

We deal with two cases of the problem:

1. Each warehouse contains the same type of product.
2. Each warehouse contains a different type of product.

We characterize the optimal solution to the problem, and analyze the possible affect of imposing a constraint such that all demands of the same type, must be supplied continuously.

In the first case, we consider three possibilites:

1. We look for a simple cycle or a simple path.
2. The graph is directed or undirected.
3. The initial point and the final one, are given or are chosen.

In the second case we distinguish between the case when drops are allowed and the case drops are forbidden.

We comper the quality of the constraint solution to the unconstraint one. We compute the the worst case ratios of the solution values, and provide an exampise to show that the worst case bounds are asymptotically tight.

אוניברסיטת תל-אביב

הפקולטה למדעים מדויקים

ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר

בית הספר למדעי המתמטיקה

פתרונות מאולצים לבעיות שינוע

חיבור זה הוגש כחלק מהדרישות לקבלת התואר מוסמך למדעים M.Sc.

באוניברסיטת תל-אביב

על ידי:

לימור קליין

העבודה הוכנה בהנחייתו של:

פרופ' רפאל חסין

אוגוסט 1994

ברצוני להביע את תודתי לפרופ' רפי חסין

על הדרכתו, יעוצו וסיועו הרב בביצוע ועריכת העבודה.

כן תודות לדר' אסתי ארקין ולדר' שושי אנילי

על ההערות וההארות המועילות.

תוכן העניינים

עמוד

1. מבוא.................................... 1

2. סקירה ספרותית.................................... 6

3. פרק 2: בעית חלוקת המוצרים ברשת של מחסנים המכילים מוצר זהה.................................... 13

2.1. מעגל פשוט עם נק' מוצא נתונה בגרף מכוון.................................... 13

2.2. מעגל פשוט עם נק' מוצא נבחרת בגרף מכוון.................................... 14

2.3. מעגל פשוט עם נק' מוצא נתונה/נבחרת בגרף לא מכוון.................................... 15

2.4. מסלול פשוט עם נק' התחלה וסיום נתונות בגרף מכוון.................................... 16

2.5. מסלול פשוט עם נק' התחלה וסיום נתונות/נבחרות בגרף לא מכוון.................................... 17

4. פרק 3: בעית חלוקת המוצרים עם n סוגי מוצרים שונים.................................... 20

3.1. המקרה בו אסור אחסון ביניים (NO DROPS).... 23

3.2. NO DROPS והגרף אינו מכוון.................... 25

3.4. NO DROPS והגרף מכוון.................... 31

3.5. המקרה בו מותר אחסון ביניים (DROPS)....... 31

3.6 DROPS והגרף אינו מכוון.................... 34

3.7. DROPS והגרף מכוון.................... 35

5. ביבליוגרפיה 39

מבוא

עבודה זו עוסקת במציאת הדרך הקצרה ביותר לחלוקת מוצרים ברשת של נקודות ביקוש והיצע (מחסנים).

הבעיות בהן אנו דנים, הן מקרים פרטיים של הבעיה הכללית, שבה נתונה רשת של צמתי היצע וביקוש, כאשר כל צומת מאופיין ע"י שני אלמנטים, סוג מוצר נדרש (ביקוש) וסוג מוצר מוצע (היצע).
ברשת עובר כלי רכב בעל קיבול אינסופי, המוגבל בכך שאינו יכול לשאת שני מוצרים מסוגים שונים בו זמנית. המטרה היא למצוא מסלול שאורכו מינימלי, העובר בכל הצמתים וממלא את דרישות הביקוש בכל צומת.

לבעיה המוצגת ישומים מעשיים הנוגעים בעיקר למקרים בהם נדרשת הובלת משאות בתפזורת, אשר אינם ניתנים לעירוב כגון, שינוע של גרעינים (חיטה,תירס וכד') הובלת סוגי אדמה שונים,עפר וכד'.

אנו מעונינים לבחון את היחס שבין הפתרון האופטימלי לבין פתרון בו מוטל אילוץ המכריח לספק את כל הביקושים מסוג מסויים באופן רצוף.

המוטיבציה לבחינת פתרון מאולץ בזה הינה נוחות אדמינסטרטיבית וחישובית, שכן על אף שחישוב הפתרון המאולץ "קשה" הוא עדיין פשוט מחישוב פתרון אופטימלי לא מאולץ.

בניגוד למקרים הנדונים בעבודה, בהם קיים מחסן יחיד לכל מוצר, ואשר בהם נוכיח כי הפתרון המאולץ האופטימלי הינו קירוב חסום לבעיה, נוכיח ונראה באמצעות דוגמא פשוטה (1.3) כי במקרה הכללי, גם היחס בין הפתרון המאולץ הטוב ביותר לאופטימלי הוא לכל היותר כמספר המוצרים. יחס זה נכון אפילו למקרה בו הגרף מכוון, ומותר אחסון ביניים.

לפיכך, נדון במקרים פרטיים של הבעיה :

יהי $G = (N,E)$ גרף בעל קבוצת צמתים N,המכילה תת קבוצה W של צמתי היצע באשר ותת קבוצה D של צמתי ביקוש , ופונקצית מרחקים $C: \longrightarrow R_+$.

ברשת עובר כלי רכב יחיד בעל קיבול אינסופי, המוגבל בכך שאינו יכול לשאת שני מוצרים מסוגים שונים בו זמנית.

לכל סוג מוצר מניחים כי סך הביקוש עבורו שווה לסך ההיצע שלו ברשת.

מסלול אפשרי הינו רצף של צמתים $n_1, n_2, \ldots n_k$ וקשתות $(n_1, n_2), \ldots (n_{k-1}, n_k)$ כאשר קשת (n_i, n_j) מגדירה מעבר יחיד של כלי הרכב מצומת i לצומת j, הנושא מוצר מסוג מסוים בכמות נתונה. מעבר בו כלי הרכב אינו נושא כל מוצר יוגדר כמעבר ריק (קשת ריקה).
מסלול כזה, בו מושג פתרון המספק את דרישות הביקוש בכל אחד מהצמתים, הינו פתרון אפשרי.

עלות המעבר מצומת i לצומת j מוגדרת על ידי פונקצית המרחקים C. אנו מניחים לאורך כל העבודה כי פונקציה זו מקיימת את אי שוויון המשולש כלומר, לכל קב' צמתים $i, j, k \in N$

$$C_{ij} + C_{jk} \geq C_{ik}$$

ערכו של הפתרון מוגדר כאורכו של המסלול והמטרה היא מציאת פתרון אפשרי אופטימלי כלומר, בעל אורך מינימלי.

הערה 1.1: הבעיה המוצגת שייכת לקב' בעיות NP, כלומר זו בעית הכרעה בה ניתן לבדוק בזמן פולינומי אם עבור פתרון כלשהו מתקיימים אילוצי הבעיה וערך פונקצית המטרה חסומה ע"י קבוע נתון.

ניתן להראות בדרך פשוטה כי הבעיה שלפנינו קשה לפחות כמו בעית הסוכן הנוסע (TSP) כלומר, לפנינו בעיה השייכת לקבוצת הבעיות מסוג NP-complete .

כדי להראות זאת נראה כי בעית הסוכן הנוסע היא מקרה פרטי של הבעיה המוצגת:

נחלק כל צומת V לשני צמתים v_+, v_- (ביקוש והיצע). המרחק בין כל שני צמתים כאלו $C_{v+, v-} = 0$ ואילו המרחק בין כל אחד מהצמתים הללו לבין זוג הצמתים u_+, u_- הוא כמרחק בין צומת v לצומת u בגרף המקורי.
ברור שפתרון אופטימלי לבעית חלוקת המוצרים יתן פתרון אופטימלי לבעית הסוכן הנוסע.

הבעיה בה דנה העבודה עוסקת בשני מקרים:

1. כל המחסנים ברשת מכילים אותו מוצר.

2. כל אחד מהמחסנים ברשת מכיל מוצר שונה.

בשני המקרים נאפיין את הפתרון האופטימלי לבעיה ונבדוק את ההשפעה האפשרית של הטלת אילוץ, המכריח לספק את כל הביקושים מסוג מסויים באופן רצוף.

בפרק 2 נבחן את המקרה הראשון כאשר נבדיל בין מספר אפשרויות:

1. יש למצוא מעגל פשוט לעומת מסלול פשוט.

2. הגרף מכוון או שאינו מכוון.

3. נקודות המוצא והיעד נתונות או נבחרות.

בכל אחד מהמקרים (למעט במקרה אחד) נראה שקיים פתרון המספק את כל הביקושים ברציפות, ואורכו חסום ע"י כפולה נתונה של הפתרון האופטימלי, בפרט הפתרון המאולץ הטוב ביותר יקיים את החסם, כלומר החסם הדוק.

עיקר התוצאות מובאות בטבלה הבאה ומתיחסות לחסם אשר הושג בכל אחד מהמקרים:

	גרף מכוון עם נק' מוצא נתונה/נבחרת	גרף לא מכוון עם נק' מוצא נתונה/נבחרת
מעגל פשוט	2	2
מסלול פשוט	לא חסום	3

בפרק 3 נבחן את המקרה השני בו כל אחד מהמחסנים מכיל מוצר שונה. אנו בוחנים במקרה זה רק את המקרה בו נדרש למצוא מעגל פשוט.

הגדרה 1.2: מוצר המועבר מצומת היצע שלו לצומת שאינו צומת הביקוש שלו, לצורך הנחתו שם באופן זמני (drop), הינו מוצר המונח **לאחסון ביניים**.

במקרה זה נבדיל בין בעיה בה מותר אחסון ביניים לבין בעיה בה אסור אחסון כזה. בבעיה המאולצת בה אנו עוסקים אין הבדל בין המקרה בו מותר אחסון ביניים לבין המקרה בו הוא אסור, לכן החסמים שיוצגו נכונים לשתי הבעיות גם יחד.
בהמשך נתיחס למקרה בו לא נדרש האילוץ של מעבר רציף על הקשתות ונשווה בין הפתרונות המוצעים לבעיה המאולצת ביחס לבעיה הלא מאולצת.

עיקר התוצאות המתיחסות לחסם אשר הושג מוצגות בטבלה הבאה:

	No drop	drop
גרף מכוון	כמספר המוצרים	כמספר המוצרים
גרף לא מכוון	2	3

דוגמא 1.3 :

דוגמא למקרה הכללי המראה כי גם היחס בין הפתרון המאולץ הטוב ביותר לאופטימלי, אינו חסום.

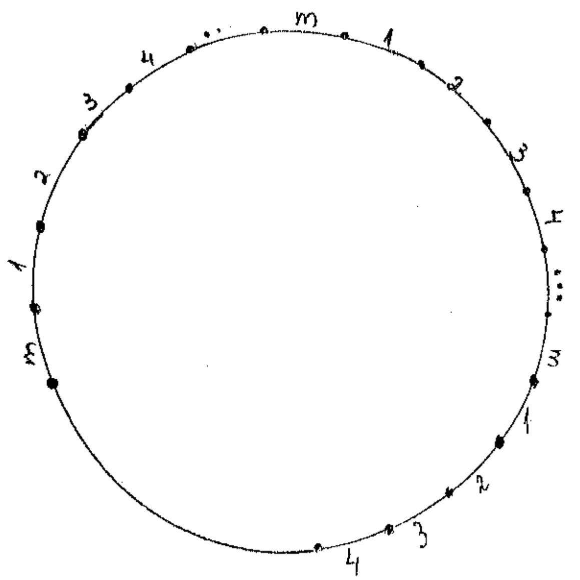
הטענה היא כי החסם קיים אפילו במקרה בו הגרף מכוון, ומותר אחסון ביניים.

ההוכחה מבוססת על העובדה כי ניתן ליצור מסלול פיזיבילי לבעיה ע"י ביצוע המסלול האופטימלי (הלא מאולץ), מספר פעמים כמספר סוגי המוצרים ברשת, כלומר ניתן לעבור על הפתרון האופטימלי שוב ושוב ובכל פעם להעביר רק סוג אחד של המוצר.

הדוגמא הבאה מראה כי חסם זה הדוק אפילו למקרה של גרף לא מכוון ואפילו במקרה בו אסור אחסון ביניים.

יהי i צומת המאופיין ע"י שני אלמנטים : Ai – סוג המוצר המוצע בצומת i.
Bi – סוג המוצר המבוקש בצומת i.

נניח את הגרף הבא המורכב מ-n צמתים:



ברשת יש m סוגי מוצרים שונים.

הגרף מורכב מרצף של צמתים $1,2,\ldots,m$, החוזר על עצמו n/m פעמים.
כל אחד מהצמתים מייצג מחסן לסוג מוצר.

המרחק בין כל שני צמתים על המעגל הוא 1 ובין כל שני צמתים אחרים הוא כאורכו של המסלול הקצר ביותר.

על כל קשת מסומן סוג המוצר המועבר עליה.

הפתרון האופטימלי יהיה מעבר יחיד על קשתות המעגל ואורכו $OPT = n$

הפתרון המקורב יאסוף בכל מעבר על המעגל סוג מוצר אחד, לפיכך מספר הפעמים הנדרש לאיסוף כל המוצרים הינו m ואורכו nm.

$$APX/OPT = nm/n = m$$

מ.ש.ל

סקירה ספרותית

כיון שאין בספרות התיחסות ספציפית לבעיות הנדונות בעבודה, נסקור בפרק זה מאמרים הכוללים מרכיבים מהנושאים המוצגים בעבודה.

בסקירה זו נתיחס לשני נושאים מרכזיים, האחד המתייחס לבעיות סידור מחדש והשני לבעיות של זרימה ברשת עם אילוצי קדימויות.
בנוסף, נתיחס לנושא של מעגלים המילטוניים.

בעית סידור מחדש של פריטים

אחד הישומים השכיחים לבעית חלוקה הינו בעית סידור מחדש של פריטים בכלל ובעיות סידור מחסן בפרט.

מאמרים רבים סוקרים את הבעיה בוריאציות שונות, החל מבעיות סידור בהן קיים אילוץ של איסוף או חלוקת מוצר מסוים טרם טיפול במוצר אחר, מקרים בהם מותר אחסון ביניים של המוצרים (drop), מקרים בהם מוטל אילוץ המתיחס לקיבול כלי הרכב ועוד.

ב-[1] בוחנים אנילי וחסין את בעית ההחלפה (Swapping Problem). בבעיה זו נתונה רשת של V צמתים ונתונים m סוגי מוצרים. כל צומת ברשת מאופיין ע"י שני אלמנטים, סוג מוצר נדרש (ביקוש) וסוג מוצר מוצע (היצע). רכב יחיד בעל קיבול של יח' אחת עובר בין צמתי הרשת והמטרה היא למצוא מסלול נסיעה אופטימלי לרכב, כלומר בעל אורך מינימלי, העובר בכל הצמתים ומסדר את המוצרים עפ"י דרישות הביקוש וההיצע בכל צומת.

מניחים כי קיים שימור זרימה לכל מוצר, כלומר סך הביקוש לסוג מוצר שווה לסך ההיצע של אותו מוצר, וכן כי כל צומת מכיל לפני ואחרי ההחלפה לא יותר מאשר מוצר אחד. בנוסף מניחים כי פונקצית המרחקים מקיימת את הנחת אי שוויון המשולש.

המאמר מציג את הבעיה הכללית עם מספר רב של מוצרים וכן מקרה פרטי בו נחלקים הצמתים לשתי קבוצות שוות, כאשר בצמתי קבוצה אחת הדרישה היא למוצר מסוג i והביקוש למוצר מסוג j, ובצמתי הקב' השניה הדרישה היא הפוכה.
המחברים מוכיחים כי הבעיה הינה NP-complete ולפיכך מוצעים קירובים פולינומיים לפתרון, המבוססים על אלגוריתם ה"תפירה" (patching) לבעית הסוכן הנוסע.

האלגוריתם המוצע מבוסס על שני שלבים :

1. פתרון של קבוצת בעיות השמה (פתרון בעית השמה לסוג מוצר i פירושו השמת כל הצמתים בעלי היצע של מוצר מסוג i לצמתים בעלי ביקוש למוצר מסוג i).

איחוד של הפתרון לקב' בעיות ההשמה נותן מעגלים זרים.

2. מציאת טור בין המעגלים הזרים ע"י שימוש באלגוריתם של Christofides .

האלגוריתם המוצע מבטיח יחס שגיאה חסום של 2.5 .

בעיה דומה מוצגת ע"י אנילי ומושיוב [2], אלא שבמקרה זה אין יחסי גומלין בין הצמתים ברשת וקיים אילוץ על קיבול כלי הרכב.

בבעיה זו נתון מחסן אשר מספק וקולט סחורה מ-N צרכנים, המחולקים לשני סוגים: אלו הרוצים לקבל סחורה מהמחסן (delivery customers) ואלו המבקשים לשלוח סחורה למחסן (backhaul customers) .
ההנחה היא כי אין יחסי גומלין בין שני סוגי הלקוחות ברשת, כלומר סחורה יכולה להיות מסופקת או מוחזרת מהמחסן ולמחסן בלבד.

כל לקוח מאופיין ע"י שני אלמנטים : מיקומו ברשת וגודל הביקוש (d_i) או היצע (b_i).

הסחורה מועברת ע"י כלי רכב יחיד בעל קיבול סופי q, המספיק לצורך חלוקת כל הביקושים ($\sum_{i \in D} d_i \leq q$) וכן על מנת לספק את כל ההיצעים מהלקוחות המבקשים להחזיר סחורה למחסן ($\sum_{i \in B} b_i \leq q$) אבל לא את סכום הכמויות.

המטרה היא למצוא מסלול נסיעה לרכב בעל אורך מינימלי, אשר יספק את כל הדרישות מבלי להפר את אילוץ הקיבול.

במאמר מוצג אלגוריתם פולינומי, המבוסס על סריקה כפולה של קשתות העץ הפורש המינימלי תוך מתן חשיבות לסדר הביקורים אצל הצרכנים ושמירה על אילוץ הקיבול.

האלגוריתם מבטיח יחס שגיאה חסום של 2 , ודורש זמן של $O(N^2)$.

גישה שונה לבעיה ניתן לראות בבעית ה- " Stacker Crane Problem " (SCP), המוצגת ע"י Frederickson , Hecht ו-Kim ב-[6] .

הבעיה מוגדרת על גרף מעורב $G = (V,E,A)$ המורכב מ-V צמתים, קב' קשתות לא מכוונות E וקב' קשתות מכוונות A .

נתונה פונקצית מרחקים C וצומת התחלה Vs .

המטרה היא למצוא מסלול בעל אורך מינימלי המתחיל ב-Vs, עובר בכל הצמתים תוך מעבר על כל הקשתות המכוונות ב-A .

הבעיה הינה NP-complete ומוצג אלגוריתם לפתרון המבטיח יחס שגיאה חסום של 9/5 .

האלגוריתם מבוסס על היחס שבין אורך הקשתות המכוונות שיש לעבור (C_A) לבין אורכו של הפתרון האופטימלי (C^*).

המחברים נוקטים שתי גישות שונות בהתאם ליחס האמור :

1. אם C_A גדול ביחס ל- C^* ברור ששימוש בעץ פורש מינימלי יתן חסם של 2. לכן משתמשים בזיווג מינימלי בין הקשתות המכוונות (זיווג בין "ראש" ל"זנב") דבר היוצר מעגלים זרים. השלב הבא הוא חיבורם ע"י שימוש בעץ פורש מינימלי.

2. אם C_A קטן ביחס ל- C^* אזי הבעיה ביסודה היא בעית סוכן נוסע. במקרה זה יש לכווץ את הקשתות המכוונות לצמתים, לבצע את אלגוריתם כריסטופידס ולמצוא את המסלול המבוקש ע"י הוספת קשתות מקבילות לקשתות המכוונות.

כאמור מבטיח האלגוריתם יחס שגיאה חסום של 9/5 .

בעיה זו כאמור דומה לבעיות אשר הוצגו בראשית , כאשר נתונים זוגות של צמתים ו- m סוגי מוצרים שונים. כל זוג צמתים מאופיין האחד בביקוש למוצר i כלשהו והשני בהיצע של מוצר i ואסורה חנית ביניים (drop) .

הגרף המתקבל מכיל m קשתות מכוונות אשר יש לעבור עליהן.

Christofides ו-Colloff [4], מתיחסים לבעיה של סידור מחדש של פריטים במחסן במטרה להביא למינימום את העלות הכרוכה בסידור.

בבעיה זו נתונים N פריטים, כאשר לכל פריט נתון המיקום הנוכחי והמיקום הסופי הרצוי.
במערכת נע כלי רכב יחיד בעל קיבול של יח' אחת, המבצע את כל ההחלפות. בנוסף, מניחים המחברים כי קיים ברשת מקום אחסון נוסף ריק בעל קיבול סופי של S פריטים, היכול לשמש כמקום לאחסון ביניים לפריטים במהלך העברתם ממיקומם הנוכחי למיקומם החדש .

עלות המעבר בין שתי נקודות ברשת ע"י כלי רכב עמוס נתונה, וכן עלות המעבר של הרכב כאשר הוא ריק.

המטרה היא למצוא מסלול נסיעה לרכב אשר בעלות מינימלית יביא לסידור הפריטים כנדרש.

אם נתאר את הבעיה בגרף עם צמתים המתארים את מיקום הפריטים וקשתות מכוונות המתארות את המעבר בין המיקום הנוכחי למיקום הרצוי עבור כל פריט (קשת i->j פירושה שהפריט שמוקם בצומת i צריך להיות מועבר לצומת j), אזי יתקבל אוסף של מעגלים זרים המתאר את המיקום ההתחלתי והסופי של הפריטים.

המחברים מציגים אלגוריתם בעל שני שלבים לפתרון: הראשון, המוצא את החלוקה האופטימלית, מבחינת עלות, של המעגלים ואילו השני מוצא באמצעות תכנות דינמי את הדרך האופטימלית למציאת טור בין המעגלים השונים.

הרחבה לבעיה זו מוצגת ע"י Mittal ב-[10]. במקודם, נתונים N פריטים כאשר לכל אחד מהם מוגדר המיקום ההתחלתי והמיקום הסופי הרצוי, אלא ש Mittal מבחין בין 2 סוגי בעיות:

1. בעיות בהן לא נתון מקום אחסון נוסף ויש לבצע החלפה של שני פריטים בו זמנית.

2. בעיות בהן קיים מקום אחסון נוסף.

העברת הפריטים נעשית באמצעות כלי רכב יחיד, אשר קיבולו הינו של יח' אחת, כמו גם קיבול מקום האחסון.

עלות הסידור מחדש תלויה בשני גורמים : 1. עלות הטיפול במוצר
2. עלות המעבר (מרחק) בין שתי נק'.

בשני המקרים קיימת הבחנה המתיחסת לאופיו של הסידור ההתחלתי והסופי, כלומר מעגל או מבנה ליניארי כלשהו .

בבעיה הראשונה מציג המחבר מספר אלגוריתמים לפתרון תוך התיחסות לאילוצים שונים ומטרות שונות כגון מציאת המספר המינימלי של הצעדים הנדרש כדי להגיע לסידור החדש, הבאה למינימום את סך המרחק שעובר כלי הרכב בעת הסידור (בבעיות בעלות המבנה הליניארי) ומציאת הסידור כאשר מוטל אילוץ המאפשר להחליף רק 2 פריטים הסמוכים זה לזה.

בבעיה השניה מציג המחבר אלגוריתם לפתרון כאשר המבנה הנתון הינו מעגל ויש למצוא סידור חדש במינימום צעדים, כאשר העלות מתיחסת למעבר ריק ומעבר מלא של כלי הרכב . מוכח כי במעגל כזה בו יש N פריטים יש רק N אפשרויות שונות לסידור מחדש.

בעיות זרימה ברשת עם אילוץ קדימות

הבעיה המאולצת (בה חיובים לספק כל מוצר ברציפות) הינה למעשה וריאציה של בעית הסוכן הנוסע באשכול (Clustered traveling salesman problem).

בבעיה זו נתונות N נק' ,אשר נחלקות לתתי קבוצות (אשכולות), כאשר מוטל אילוץ המחייב מעבר רצוף בנק' המרכיבות תת קבוצה מסוימת טרם מעבר לתת קבוצה אחרת .

בבעיה המאולצת, המוצגת בעבודה, ניתן לראות בכל סוג מוצר אשכול אלא שלהבדיל מהבעיה המקורית, במקרה זה בכל אשכול יש נקודת התחלה נתונה (המחסן) .

בספרות נדונה בעית CTSP בהרחבה:

Chisman [3] מציע פתרון באמצעות טרנספורמציה על מטריצת המרחקים ואח"כ פתרון בעית הסוכן הנוסע באמצעות אלגוריתם של Branch & Bound .

על פי שיטתו מחולקת מטריצת המרחקים C באופן הבא:

Ci – מטריצת המרחקים בתוך כל אשכול i .

LiJ – מטריצת המרחקים בין אשכולות i ו- J .

$$C = \begin{array}{c|c|c|c|} & \multicolumn{3}{c}{\text{to}} \\ \text{f} & C_1 & L_{12} & L_{13} \\ \text{r} & L_{21} & C_2 & L_{23} \\ \text{o} & & & \\ \text{m} & L_{31} & L_{32} & C_3 \end{array}$$

השיטה כוללת הפחתת מספר גדול מאד מכל איבר בכל אשכול Ci או הוספת מספר גדול לכל איבר שאינו כלול באשכול (LiJ).

באופן זה הקשתות בתוך האשכולות (קשת פנימית) אטרקטיביות יותר ומקבלות קדימות בטיפול בהן לעומת הקשתות המחברות בין האשכולות (קשת חיצונית).

הפתרון ימצא תחילה מסלול בתוך כל אשכול ואח"כ מסלול בין האשכולות. אם M הוא מספר האשכולות, אזי הפתרון האופטימלי יכיל בדיוק M קשתות חיצוניות.

יש לציין כי פתרון כזה פוגע בהנחת אי שוויון המשולש.

Lokin [9] מראה אלגוריתם B & B לפתרון ועוסק במקרה בו יש אילוץ של קדימויות, כלומר יש לבקר בצומת i כלשהו (או באשכול Ci) לפני ביקור בצומת j (או אשכול Cj).

עפ"י שיטתו, על מנת למנוע מצב בו האילוץ של מעבר באשכולות יופר, יש להתאים בכל שלב של האלגוריתם מטריצת מרחקים, המבוססת על מתן ערך אינסופי לקשת עליה. לא רוצים לעבור.
במקרה זה, אם באחד השלבים נבחרת קשת בין שני אשכולות Ci ו- Cj, ניתן ערך של ∞ לכל הקשתות האחרות היוצאות או נכנסות לשני האשכולות.

בדרך דומה מטפל המחבר גם במקרים בהם יש אילוץ של קדימות, כלומר יש לבקר בצומת i כלשהו (או באשכול Ci) לפני ביקור בצומת j כלשהו (או באשכול Cj).

גם במקרה זה מותאם האלגוריתם ע"י מתן ערך אינסופי לאותן קשתות אשר בהן אסור לעבור בכדי לא להפר את אילוץ הקדימות.

Jongens ו-Volgenant [8], עוסקים בבעיה הסימטרית ומוצאים אלגוריתם המבוסס על רלקסצית לגרנז' ו- 1 tree לפתרון בעית הסוכן הנוסע.

הם מציעים טרנספורמציה שונה המתיחסת לאורכי הקשתות תוך הבחנה בין קשתות בתוך האשכולות לבין קשתות המחברות בין האשכולות.

הטרנספורמציה המוצעת על ידם משפרת את החסם התחתון.

בנוסף מוצג אלגוריתם למציאת החסם העליון למסלול האופטימלי. האלגוריתם מתיחס למקרים בהם דרגת כל אשכול גדולה מ- 4 (כלומר כל אשכול קשור בפתרון ליותר מאשר אשכול אחד) ומתאר דרך יעילה לצמצום מס' הקשתות.

בעיה של קדימויות מועלית גם ע"י דרור שטרן ו- Trudeau [5], אלא שחלף אילוץ של מעבר בקבוצת צמתים עוסק המאמר בבעית ניתוב בקשתות כאשר יש לעבור קב' קשתות מסוימת טרם עוברים קבוצה אחרת.

המאמר בוחן את בעית הדור הסיני (CPP) כאשר מוטל אילוץ של קדימות על הקשתות.

יחס הקדימות על קשת מוגדר כדלקמן:
יהי $G = (V,E)$ גרף בעל V צמתים וקב' קשתות E, ותהי Pk חלוקה של קב' הקשתות E לתתי קבוצות $\{ E_1, E_2, \ldots, E_K \}$. אזי עבור $E_i, E_j \in P_k$, $E_i < E_j$ פירושו שיש לעבור על כל קשת $e \in E_i$ בטרם עוברים על קשת $f \in E_j$.

בעית הדור הסיני עם יחסי קדימויות היא הבעיה של מציאת המסלול הקצר ביותר אשר יעבור על כל קשת לפחות פעם אחת תוך שמירה על אילוץ הסדר.

המחברים מציגים אלגוריתם פולינומי לפתרון הדורש $O(n^5)$ כאשר n הינו מספר הצמתים.

האלגוריתם מבוסס על מציאת קב' הצמתים המשותפים לכל 2 קבוצות שונות של קשתות (שונות מבחינת יחס הקדימות במעבר עליהן), כאשר על בסיס קבוצה זו יוצרים גרף המורכב מ (K+1) גרפים דו צדדיים (K הן מס' הקבוצות המכילות צמתים משותפים). על גרף זה מוצאים את המסלול הקצר ביותר המתורגם למונחי האורך של הגרף המקורי.

הבעיות הנדונות בעבודה והפתרונות המוצעים מבוססים ברובם על מציאת מסלולים המילטוניים. התיחסות לנושא קיימת במאמרו של Hoogeveen [7] . במאמר זה בוחן המחבר את בעית המסלול ההמילטוני הקצר ביותר ומציג אלגוריתם המתבסס על האלגוריתם של כריסטופידס לבעית הסוכן הנוסע, תוך שהוא מבחין בין שלושה מקרים, המתיחסים למספר נק' הקצה הנתונות: אפס נק', נק' אחת ושתי נק' . הוא מוכיח כי בשני המקרים הראשונים, יחס השגיאה זהה לזה של האלגוריתם של כריסטופידס, כלומר 3/2, ואילו במקרה בו יש שתי נק' קצה נתונות, משיג האלגוריתם יחס שגיאה של 5/3 .

פרק 2

בעית חלוקת המוצרים ברשת של מחסנים המכילים מוצר זהה:

נתון גרף $G=(N,E)$, בעל קבוצת צמתים N, המכילה תת קבוצה W של צמתי היצע (מחסנים), ותת קבוצה D של צמתי ביקוש. $|W|=n$ $|D|=m$.

בכל המחסנים קיים מוצר זהה. מניחים כי בכל מחסן יש יחידה אחת. (ניתן להניח גם כי בכל מחסן יותר מיחידה אחת, ע"י הגדרת מספר צמתים באותו מיקום המכילים כל אחד מהם יחידה אחת).

סך ההיצע שווה לסך הביקוש.

פונקצית מרחקים C_{ij} סימטרית ומקיימת את אי שוויון המשולש

נתון רכב בעל קיבול אינסופי.

יש למצוא מסלול נסיעה לרכב בעל אורך מינימלי, העובר בכל הצמתים, אוסף יחידות מוצר מהמחסנים ומספק את כל הביקושים.

(מסלול אפשרי מקיים בכל צומת, שסך המוצרים שנאספו מהמחסנים עד כה, מספיק לסיפוק הביקושים על המסלול עד לצומת).

נסמן ב- OPT את אורך הפתרון האופטימלי. נסמן ב-APX את אורכו של הפתרון הקצר ביותר המתקבל תחת האילוץ כי יש לאסוף קודם את כל ההיצעים ואחר כך יש לספק את כל הביקושים. נתיחס לשמונה מקרים לפי התנאים הבאים:

1. יש לחזור לנק' המוצא (מעגל פשוט), או נק' הסיום יכולה להיות שונה מנק' המוצא (מסלול פשוט).

2. נק' המוצא והסיום נתונות ו/או נבחרות.

3. הגרף מכוון או לא מכוון.

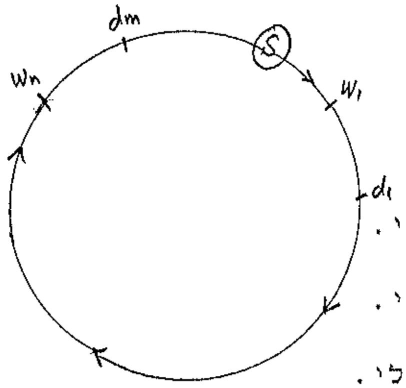
בכל אחד מהמקרים נראה קיום פתרון שמספק את כל הביקושים ברציפות, ואורכו חסום ע"י כפולה נתונה של הפתרון האופטימלי. בפרט, עבור הפתרון המאולץ הטוב ביותר, החסם הדוק.

2.1. מעגל פשוט עם נק' מוצא נתונה בגרף מכוון:

טענה

$$\frac{APX}{OPT} \le 2$$

הוכחה



יהי R_{ij} קטע המסלול בפתרון האופטימלי מצומת i לצומת j .

נסמן את צומת המוצא ב-s ‏($s\in N$ או $s\notin N$).

ונניח, w_1 צומת היצע הראשון אחרי s בפתרון האופטימלי.

w_n צומת ההיצע האחרון לפני s בפתרון האופטימלי.

d_1 צומת הביקוש הראשון אחרי s בפתרון האופטימלי.

d_m צומת הביקוש האחרון לפני s בפתרון האופטימלי.

יהי H_{w_i,w_j} – מסלול המילטוני קצר ביותר המתחיל בצומת היצע w_i עובר בכל צמתי ההיצע ומסיים בצומת היצע w_j.

H_{d_i,d_j} – מסלול המילטוני קצר ביותר המתחיל בצומת ביקוש d_i, עובר בכל צמתי הביקוש ומסיים בצומת ביקוש d_j .

ברור שהצומת האחרון לפני s , חייב להיות צומת ביקוש, לפיכך ניתן להניח ב.ה.כ. כי הפתרון האופטימלי מבקר את הצמתים בסדר הבא:

$$s, w_1, \ldots, d_1, \ldots, w_n, \ldots, d_m, s$$

(אמנם יכול להיות סדר הפוך ,כלומר מעבר תחילה על כל צמתי ההיצע, אלא שאז הפתרון האופטימלי מקיים את האילוץ ולכן OPT=APX).

מתקיים
$$H_{w_1,w_n} \le R_{w_1,w_n}$$

$$H_{d_1,d_m} \le R_{d_1,d_m}$$

הפתרון המאולץ הוא הקצר ביותר מבין הפתרונות מהסוג הבא:
הפתרון יעבור מצומת s לצומת היצע כלשהו, יעבור בכל צמתי ההיצע,יסיים בצומת היצע ,יעבור לצומת ביקוש כלשהו, יבקר בכל צמתי הביקוש ויחזור לצומת המוצא.

לכן ,

$$APX \le R_{s,w_1} + H_{w_1,w_n} + R_{w_n,d_1} + H_{d_1,d_m} + R_{d_m,s} \le$$

$$R_{s,w_1} + R_{w_1,w_n} + R_{w_n,d_1} + R_{d_1,d_m} + R_{d_m,s} \le$$

$$R_{s,w_1} + R_{w_1,d_1} + R_{d_1,w_n} + R_{w_n,d_1} + R_{d_1,w_n} + R_{w_n,d_m} + R_{d_m,s} \le$$

$$OPT + R_{w_n,d_1} + R_{d_1,w_n} \le 2OPT$$

מ.ש.ל.

2.2. מעגל פשוט עם נק' מוצא נבחרת בגרף מכוון:

טענה:

$$\frac{APX}{OPT} \leq 2$$

הוכחה:

ההוכחה במקרה זה נובעת מהמקרה הקודם, אלא שעתה נבחר בצומת היצע w_1 כלשהו כצומת המוצא. בפרט, הפתרון המאולץ יכול לבחור ב- w_1 כצומת מוצא ולכן,

$$APX \leq H_{w_1,w_n} + R_{w_n,d_1} + H_{d_1,d_m} + R_{d_m,w_1} \leq$$

$$R_{w_1,w_n} + R_{w_n,d_1} + R_{d_1,d_m} + R_{d_m,w_1} \leq$$

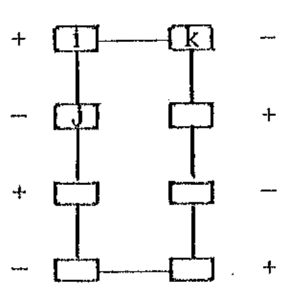
$$R_{w_1,d_1} + R_{d_1,w_n} + R_{w_n,d_1} + R_{d_1,w_n} + R_{w_n,d_m} + R_{d_m,w_1} \leq$$

$$OPT + R_{w_n,d_1} + R_{d_1,w_n} \leq 2OPT$$

מ.ש.ל.

2.3. מעגל פשוט עם נק' מוצא נתונה/נבחרת בגרף לא מכוון:

מקרים אלו הינם מקרים פרטיים של המקרה בו הגרף מכוון, מכאן נובע שקיים פתרון מאולץ בו יחס השגיאה הוא 2OPT. באמצעות הדוגמא הבאה נראה כי החסם אינו ניתן לשיפור באופן אסימפטוטי אפילו לגרף לא מכוון:



נניח 2K צמתים בצורה הבאה:

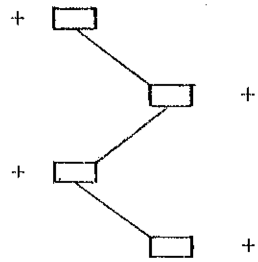
צמתי ההיצע יסומנו ב- "+"
צמתי הביקוש יסומנו ב- "−"

$C_{ij}=C_{ik}=\frac{1}{2}$. שאר המרחקים נקבעו לפי אורך המסלול הקצר ביותר בגרף.

המסלול האופטימלי יהיה ללכת על ההיקף ואורכו K

המסלולים ההמילטוניים יהיו בצורה הבאה:

ואורכם K-1



מכאן ש, $APX = 2(K-1) + 2*½ = 2K-1$

$OPT = K$

$$\frac{APX}{OPT} = \frac{2K-1}{K} \xrightarrow[K \longrightarrow \infty]{} 2$$

//
//

2.4. מסלול פשוט עם נק' התחלה וסיום נתונות בגרף מכוון:

טענה: יהיו APX ו- OPT כמקודם. אזי, היחס בין הפתרון המקורב לבין הפתרון האופטימלי, איננו חסום.

<u>הוכחה</u>

באמצעות הדוגמא הבאה נוכיח זאת:

נניח את הגרף המכוון הבא:

$$s \longrightarrow w_1 \longrightarrow d_1 \longrightarrow w_n \longrightarrow d_m \longrightarrow t$$

המרחקים על הגרף הם כדלקמן:

$Cs, w_1 = 0$
$Cw_1, d_1 = 1$
$Cd_1, w_n = k$
$Cw_n, d_m = 1$
$Cd_m, t = 0$

תחת הנחת אי שוויון המשולש ניתן להניח כי הגרף שלם. נניח כי המרחק בין צומת t לצומת s הינו M (גדול מאד ביחס למרחק מצומת s לצומת t).

הפתרון האופטימלי יהיה מעבר מצומת s לצומת t ואורכו k+2.

הפתרון המקורב יהיה: $Cs, w_1, Cw_1, wn, Cw_n, t, Ct, d_1, Cd_1, d_m, Cd_m, t$

ואורכו $2k+M+2$

$$APX/OPT = 2k+2+M/k+2 \xrightarrow[M \to \infty]{} \infty$$

מ.ש.ל.

2.5. מסלול פשוט עם נק' התחלה וסיום נתונות/נבחרות בגרף לא מכוון:

טענה:

$$APX/OPT = 3$$

<u>הוכחה:</u>

נק' הסיום וההתחלה נתונות:

יהיו s,t צמתי המוצא והסיום , ויהיו w_1, w_n, d_1, d_m כמקודם.כיון שצומת ההתחלה הוא צומת היצע וצומת הסיום הוא צומת ביקוש ניתן להניח ב.ה.כ כי סדר המעבר בפתרון האופטימלי הוא:

$$.\ s, w_1, \ldots d_1, \ldots w_n, \ldots d_m, t$$

(גם כאן יכול להתקיים סדר הפוך אלא ששוב יתקיים שהפתרון האופטימלי מקיים את האילוץ ולפיכך OPT=APX).

$$APX \le Rs, w_1, +Hw_1, w_n + Rw_n, d_1 + Hd_1, d_m + Rd_m, t \le$$

$$Rs, w_1 + Rw_1, w_n + Rw_n, d_1 + Rd_1, d_m + Rd_m, t =$$

$$Rs, w_1 + Rw_1, w_n + Rw_n, d_1 + Rd_1, w_n + Rw_n, d_m + Rd_m, t =$$

$$Rs, w_1 + Rw_1, w_n + 2Rd_1, w_n + Rw_n, d_m + Rd_m, t =$$

$$OPT + 2Rd_1, w_n \le 3OPT$$

מ.ש.ל.

הערה: בדרך דומה ניתן להוכיח כאשר נק' המוצא ונק' היעד נבחרות, כאשר כנק' המוצא יבחר צומת היצע כלשהו וכנק' הסיום יבחר צומת ביקוש כלשהו.

באמצעות הדוגמא הבאה נראה כי לא ניתן לשפר את החסם באופן אסימפטוטי:

נניח את הגרף הבא:

$$s \longrightarrow w_1 \longrightarrow d_1 \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} w_2 \longrightarrow d_2 \longrightarrow t$$

ויהיו המרחקים על הגרף כדלקמן:

$$C_{s,w_1} = 0$$
$$C_{w_1,d_1} = 1$$
$$C_{d_1,w_2} = k$$
$$C_{w_2,d_2} = 1$$
$$C_{d_2,t} = 0$$

הפתרון האופטימלי יהיה מעבר מצומת s לצומת t ואורכו K+2 .

הפתרון המקורב יהיה: $C_{w_1,w_2} + C_{w_2,d_2} + C_{d_2,d_1} + C_{d_1,t} = 3K+4$

$$\frac{APX}{OPT} = \frac{3K+4}{K} \xrightarrow[K \longrightarrow \infty]{} 3$$

מ.ש.ל.

2.6. האלגוריתם

בסעיף זה נציג אלגוריתם למציאת הפתרון המאולץ הטוב ביותר, כאשר נק' המוצא והיעד נתונות ונדרש מעגל מכוון (לא מכוון) קצר ביותר. (בשינוי קל ניתן להציג את האלגוריתם גם למקרה בו הן נבחרות ו/או נדרש מסלול).

יהיו t, s צמתי המוצא והיעד בהתאמה.

(i) לכל זוג צמתי היצע $w_i, w_j \in W$:

מצא את המסלול ההמילטוני, הקצר ביותר, המתחיל ב- w_i עובר בכל צמתי ההיצע, ומסיים בצומת w_j. נגדיר כ- Hw_i, w_j את אורך המסלול המתקבל.

(ii) לכל זוג צמתי ביקוש $d_i, d_j \in D$:

מצא את המסלול ההמילטוני, הקצר ביותר, המתחיל ב- d_i עובר בכל צמתי הביקוש, ומסיים בצומת d_j. נגדיר כ- Hd_i, d_j את אורך המסלול המתקבל.

(iii) מצא את זוגות הצמתים $(d_i, d_j) \in D$, $(w_i, w_j) \in W$ באופן ש-

$Cs, w_i + Hw_i, w_j + Cw_j, d_i + Hd_i, d_j + Cd_j, t$ מינימלי.

סיבוכיות:

אם נבחן את הבעיה במונחים של בעית סוכן נוסע (TSP), הרי שלמעשה אנו פותרים $m*n$ בעיות מסלול המילטוני קצר ביותר עם מקור ויעד נתונים.
לפיכך, הסיבוכיות הינה בסדר גודל של n^2 הסיבוכיות של האלגוריתם לפתרון בעית הסוכן הנוסע.

בשינוי קל של האלגוריתם ניתן להציג קירוב למציאת הפתרון המאולץ כדלקמן:

יהיו t, s צמתי המוצא והיעד בהתאמה.

(i) לכל צומת היצע כלשהו $w_i \in W$:

מצא מסלול המילטוני, המתחיל ב- w_i ועובר בכל צמתי ההיצע. יהי $v_i \in W$ הצומת האחרון במסלול. נגדיר כ- Hw_i את אורך המסלול המתקבל.

(ii) לכל צומת ביקוש $d_j \in D$:

מצא מסלול המילטוני המתחיל בצומת הביקוש d_j ועובר בכל צמתי הביקוש.
יהי $e_j \in D$ הצומת האחרון. נגדיר כ- Hd_j את אורך המסלול המתקבל.

(iii) מצא את זוגות הצמתים $(d_j, e_j) \in D$, $(w_i, v_i) \in W$ באופן ש-

$Cs, w_i + Hw_i + Cv_i, d_j + Hd_j + Ce_j, t$ מינימלי.

פרק 3

בעית חלוקת המוצרים עם n סוגי מוצרים שונים:

יהי $G=(N,E)$ גרף בעל קב' צמתים N, המכילה תת קבוצה W של צמתי היצע (מחסנים) ותת קבוצה D של צמתי ביקוש , $|W| = n$ $|D| = m$, כאשר בכל מחסן קיים סוג מוצר שונה.

תהי $D_i = \{d_1, \ldots d_n\}$ – תת קבוצה של D המכילה נק' ביקוש של המוצר הנמצא במחסן i.

מניחים כי גודל הביקוש בכל נק' ביקוש הוא ליחידה אחת, וכן כי הביקוש בנק' i הוא לסוג מוצר אחד בלבד.

$|D_i|$ – סך הביקוש למוצר i .

מניחים כי סך הביקוש ברשת שווה לסך ההיצע ביחס לכל סוג מוצר בנפרד.

עלות המעבר בין נק' i לנק' j נתונה ע"י מטריצת המרחקים $C = [C_{ij}]_{i,j \in N}$

פונקציית המרחקים C_{ij} מקיימת את הנחת אי שיויון המשולש.

ברשת עובר כלי רכב בעל קיבול אינסופי, המוגבל בכך שאיננו יכול לשאת 2 מוצרים מסוגים שונים בו זמנית.

מוצר המועבר מצומת ההיצע שלו לצומת שאיננו צומת הביקוש שלו ומונח שם באופן זמני, הינו מוצר המונח ל- "אחסון ביניים".

<u>המטרה:</u> מציאת המעגל אשר יביא לחלוקת כל הביקושים בדרך הקצרה ביותר.

הבעיה נחלקת לשני מקרים :

(i) המקרה בו אסור אחסון ביניים (NO DROPS).

(ii) המקרה בו מותר אחסון ביניים (DROPS).

בכל מקרה, נבדוק את ההשפעה האפשרית של הטלת אילוץ, המכריח לספק את כל הביקושים מסוג נתון באופן רצוף.

בכל אחד משני המקרים נבחן את הבעיה כאשר הגרף מכוון וכאשר הגרף אינו מכוון, וכן כאשר נק' ההתחלה והסיום נתונות (המקרה בו הן נבחרות נובע מהמקרה בו הן נתונות, שכן אם לכל נק' התחלה נתונה מתקיים היחס $APX \le K \cdot OPT$, K קבוע כלשהו, בפרט יתקיים אם נבחר את נקודת ההתחלה בפתרון המקורב כנקודה שהפתרון האופטימלי מתחיל ממנה).

נציג פתרונות לבעיה הלא מאולצת באמצעות תכנות מתמטי (בשני המקרים), בעוד שלבעיה המאולצת, הזהה בשני המקרים, נציג פתרון המבוסס על האלגוריתם הבא:

אלגוריתם 3.

(i) לכל $i,j \in W$ נמצא מסלול המילטוני קצר ביותר על D_i, המתחיל במחסן i ומסיים במחסן j. יהי $h(i,j)$ אורכו של המסלול.

(ii) ניצור גרף חדש $G'=(W,E')$ בעל פונקצית מרחקים $h(i,j)_{i,j \in W}$
גרף זה הינו שלם ומכוון ויש למצוא פתרון בעית סוכן נוסע עליו.

מציאת אורכי המסלולים $h(i,j)$ כוללת פתרון בעית סוכן נוסע על גרף לא מכוון. לבעיה זו ניתן למצוא קירובים בעלי שגיאה חסומה, בזמן פולינומי (למשל האלגוריתם של Christofides הנותן שגיאה של 150% לכל היותר).
קירובים בעלי יחס שגיאה חסום, לא ידועים לבעית הסוכן הנוסע בגרף מכוון, אבל אם מספר סוגי המוצרים אינו גדול, ניתן לפתור את הבעיה באמצעות תכנות דינמי.

נתאר עתה את אלגוריתם התכנות הדינמי.

לשם פשטות נתאר את הניסוח למקרה בו נקודת ההתחלה נתונה והיא במחסן מס' 1, וזו גם נקודת הסיום. קל לשנות ניסוח זה למקרים בהם נק' ההתחלה לא נתונה או שהיא נתונה ואינה במחסן, וכך גם לנקודת הסיום.

יהי $S(M,j)$ אורכו של המסלול הקצר ביותר, כאשר התחלנו במחסן 1, חילקנו את המוצרים $i \in M$ והגענו למחסן $j \notin M$.

אזי:

$$S(\{1\},j) = h(1,j)$$

$$S(M,j) = \min_{i \in M} \{ S(M \setminus i, i) + h(i,j) \} \qquad |M| = 2,\dots n-1$$

ופתרון הבעיה:

$$\min_{j \in W} \{ S(W \setminus j, j) + h(j,1) \}$$

אם נתון הגרף G' עם אורכי קשתות $h(i,j)$ אז התכנות הדינמי דורש סיבוכיות $O(n2^n)$.

3.1.המקרה בו אסור אחסון ביניים (NO DROPS)

במקרה זה מחסן j אינו יכול לשמש מחסן ביניים למוצרים $j \neq i$. לכן, כל הקשתות היוצאות ממחסן j כלשהו הן קשתות הנושאות מוצר j ו/או קשתות ריקות.

ניסוח פתרון באמצעות תכנות מתמטי לבעיה הלא מאולצת

יהי,

X_{ijkp} מס' היחידות מסוג k המועברות מצומת i לצומת j בצעד ה-p.

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{אם קשת } (i,j) \text{ בפתרון} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$z_{ijp} = \begin{cases} 1 & \text{אם הקשת ה-}p\text{ בפתרון היא } (i,j) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$t_{kp} = \begin{cases} 1 & \text{אם מוצר מסוג } k \text{ מועבר בצעד ה-}p \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

C_{ij} עלות המעבר בין נק' i לבין נק j .

M גדול (למשל ΣD_k).

פונקצית המטרה:

$$\min \sum_{i,j} C_{ij}\, y_{ij} \qquad (1)$$

ומתקיים:

$$y_{ij} = \sum_{p} z_{ijp} \qquad \forall\, i,j \qquad (2)$$

$$z_{ijp} \geq \frac{\sum_{k} X_{ijkp}}{M} \qquad \forall\, i,j,p \qquad (3)$$

$$(4) \qquad \sum_p \sum_j X_{ijkp} - \sum_p \sum_j X_{jikp} = \begin{cases} |D_k| & i=w_k \\ -1 & i\in D_k \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \qquad \forall\ k$$

$$(5) \qquad \sum_j y_{ij} - \sum_j y_{ji} = 0 \qquad \forall\ i$$

$$(6) \qquad X_{ijkp} = 0 \qquad \forall\ i,k,p,j\notin D_k$$

$$(7) \qquad t_{kp} \geq \frac{X_{ijkp}}{D_k} \qquad \forall i,j,k,p$$

$$(8) \qquad \sum_k t_{kp} \leq 1 \qquad \forall\ p$$

$$(9) \qquad \sum_i z_{ijp} = \sum_i z_{jip+1} \qquad \forall\ j,p$$

האילוצים:

אילוצים 4 ו- 5 מבטיחים שימור זרימה בצמתי הגרף, כאשר אילוץ 4 מתייחס לסוג וכמות המוצר בעוד אילוץ 5 מבטיח כי דרגת כל צומת תהייה זוגית.

אילוץ 6 מבטיח כי לצומת j לא יוכנס מוצר k אם j אינו צומת ביקוש של מוצר k.

אילוץ 7 מגדיר את t : אם $x > 0$ אז $t = 1$.

אילוץ 8 מונע העברה של מס' סוגי מוצרים בו זמנית.

אילוץ 9 הינו אילוץ שימור זרימה האומר כי אם נכנסים לצומת כלשהו בצעד ה- p אזי יוצאים בצעד ה - p+1 .

3.2. NO DROPS והגרף אינו מכוון:

בטרם נוכיח את טענה 3.3 בהמשך, נוכיח את משפט העזר הבא:

למה 3.2.

יהי $G=(N,E)$ גרף מכוון, קשיר חזק $|N|=n$, $|E|=m$.

יהי A_i אוסף הקשתות שיוצאות מצומת N_i .

אזי, ניתן לבחור קשת אחת מתוך כל A_i, כך שנקבל אוסף קשתות B, המכיל עץ פורש T, לא מכוון, (למעשה נקבל תת גרף קשיר שמכיל מעגל מכוון).

הוכחה:

יהי B אוסף של n קשתות, אחת מכל A_i . אזי, קיימות 2 אפשרויות:

(i) B קשיר: מההגדרה, כיון שמכל צומת יוצאת קשת אחת בדיוק, הרי שסך הקשתות שווה לסך הצמתים, מכאן ש- B מכיל עץ פורש.

(ii) B לא קשיר: יהי G' רכיב של B, בעל n' צמתים.

טענה 3.2.1. G' מכיל מעגל מכוון וכל שאר הקשתות ברכיב מכוונות אליו.

הוכחה: כיון שמכל צומת יוצאת קשת אחת בדיוק, מס' הקשתות ברכיב הוא n' . מכאן שהרכיב מכיל מעגל. המעגל מכוון כיון שמכל צומת יוצאת <u>רק</u> קשת אחת.

נגדיר כ- S' את המעגל המתקבל. כיון שמכל צומת יוצאת רק קשת אחת, ברור כי לא תתכן קשת שתצא מהמעגל ולא תשתתף בו. G' קשיר, לפיכך, הקשירות נובעת מהקשתות שנכנסות לתוך המעגל.
מ.ש.ל.

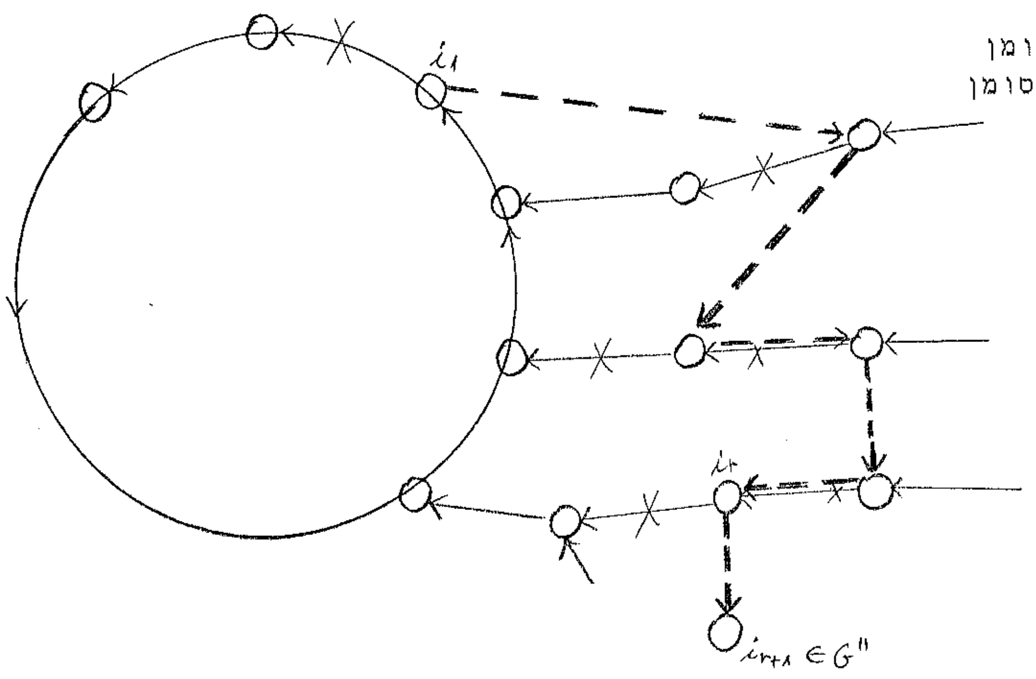
יהי P מסלול מכוון ב- G, המתחיל בצומת i_1 על המעגל S של רכיב G' וכולו,פרט לצומת האחרון שלו, מוכל ב- G' . (הצומת האחרון מוכל ברכיב G'' של B). מסלול כזה קיים מאחר ו-G קשיר חזק.

$$P = (i_1, \ldots, i_{r+1})$$

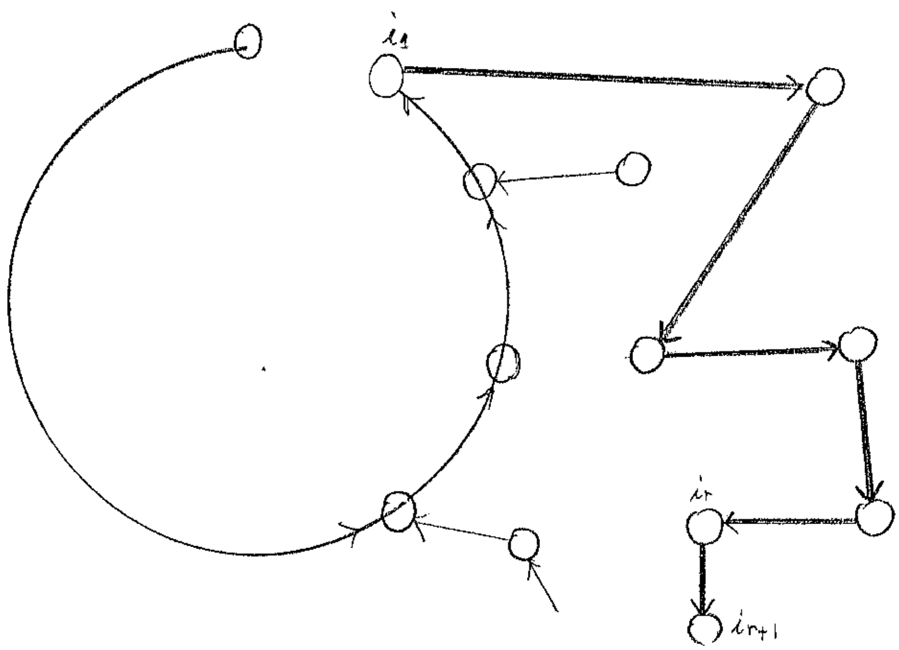
$$i_1, \ldots, i_r \in G'$$

$$i_{r+1} \notin G'$$

נחליף את הקשתות ב- G' היוצאות מ- $i_1, \ldots i_r$ בקשתות של P .



G' בטרם ההחלפה מסומן בקוים רציפים, P מסומן בקוים מרוסקים.



לאחר ההחלפה

טענה 3.2.2. מס' הרכיבים ב–B יקטן ב – 1 .(כלומר G' מתאחד עם רכיב G'' המכיל את i_{r+1}).

הוכחה: ברור שנשמרת התכונה שמכל צומת יוצאת בדיוק קשת אחת.

נשמרת הקשירות, כי אם בטלנו קשת (i_j, k) , אזי, מהטענה הקודמת, חיבור k למעגל S, לא נעשה קודם דרך i_j .

כיון ש- G' ו– G'' אינם קשורים, קשת (i_r, i_{r+1}) לא תיצור מעגל חדש. מכאן שנקבל רכיב אחד קשיר,המכיל מעגל אחד מכוון (S'' המוכל ב–G'').

מ.ש.ל.

חזרה על התהליך תצמצם בכל שלב את מספר הרכיבים באופן שתשמר קשירות B ומכאן שיכיל עץ פורש.

מ.ש.ל.

יהי APX אורכו של הפתרון המאולץ, ויהי OPT אורכו של הפתרון האופטימלי,

טענה 3.3.

$$\frac{APX}{OPT} \le 2$$

הוכחה:

נקח את הגרף $G_{opt}=(W,E)$, הנוצר ע"י הפתרון האופטימלי (צמתי הגרף הם המחסנים, ואילו הקשתות מתיחסות לסדר הביקור במחסנים). גרף זה הינו גרף **אוילר מכוון.**

אנו נאפיין 2 מקרים במבנה הגרף המתקבל לצורך הוכחת הטענה:

(i) זהו מקרה פרטי, בו הגרף המתקבל מכיל מעגל המילטוני.

<u>יצירת הפתרון המאולץ:</u>

נניח ב.ה.כ. ש- 1,2,3,...,n,1 הוא מעגל המילטוני (אנו מניחים כי נק' ההתחלה היא במחסן). ניצור פתרון מאולץ באופן הבא:

נתחיל בצומת 1 . נצא ונחזור על כל קטע של הפתרון האופטימלי המכיל מוצר 1 פרט לקשת האחרונה (1,2) שנבצע בלי חזרה. נמשיך כך עם כל הצמתים הבאים במסלול (2,3,..). כיון שהגרף מכיל מעגל המילטוני, נצליח לסיים את התהליך בלי לחזור על צומת פעמיים, למעט צומת ההתחלה/סיום (צומת 1).

ברור כי אורכו של הפתרון המאולץ שווה לפעמיים אורכו של הפתרון האופטימלי פחות אורכו של המעגל ההמילטוני (אותו עוברים רק פעם אחת). מכאן ש-

$$\frac{APX}{OPT} \le 2$$

מ.ש.ל.

(ii) המקרה בו הגרף המתקבל אינו מכיל מעגל המילטוני על צמתיו.

במקרה זה נראה כי קיים פתרון מאולץ שגודלו הוא 2OPT, תוך שנעזר בלמה 3.2 .

<u>יצירת הפתרון המקורב:</u>

ברור שהקשתות עליהן עובר OPT מגדירות גרף אוילריאני מכוון G, בפרט זהו גרף קשיר חזק, לכן הן מכילות עץ פורש T, כפי למה 3.2 .

נכפיל את קשתות B , באופן שלכל קשת (i,j)∈B ,אשר תוגדר בקשת קדמית, תוגדר קשת הפוכה (j,i). יהי Ge הגרף המתקבל מפעולה זו. Ge הינו גרף אוילריאני.
נמצא סדר מעבר על הגרף Ge, העובר על כל קשת פעם אחת, כלומר מעגל אוילריאני.

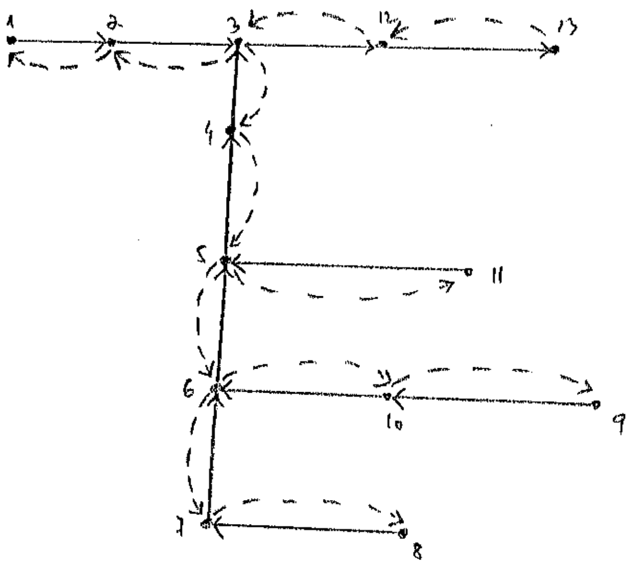
נניח כי הגענו לצומת i כלשהו אזי :

(i) אם המעבר לצומת הבא k במעגל האוילריאני Ge, הוא על ידי קשת קדמית, נלך ונחזור על כל קשת ב-G (ואשר אינה ב-Ge), למעט קשת (i,k) ∈ Ge, עליה נעבור פעם אחת. המעבר יעשה תוך חלוקת המוצרים הנמצאים במחסן i.

אחרת,

(ii) אם המעבר לצומת הבא k הוא ע"י קשת הפוכה, נעבור עליה במעבר סרק, ונחזור לשלב (i) .

לדוגמא: נניח עץ כזה



המעגל האוילריאני יהיה: 1-2-3-4-5-6-7-8-7-6-10-9-10-6
-5-11-5-4-3-12-13-12-3-2-1.

כאשר נגיע לצומת 3 נעבור במעבר סרק על רצף הקשתות ההפוכות (3,4),(4,5),(5,6),(6,7),(7,8) עד לצומת 8.
נחלק את המוצרים אשר בצומת 8 ואח"כ את אלו שבצומת 7 .

בצומת 6 נעבור שוב במעבר סרק על רצף הקשתות ההפוכות המתחיל בצומת 6 ומסתיים בצומת 9 .

נחלק את מוצרי צומת 9 ואח"כ את אלו שבצומת 10 וצומת 6 .

כאשר נגיע שוב לצומת 3 נחלק את מוצריו, נעבור לצומת 12 ו-13 וחזור לצומת 1 ע"י הקשתות הפוכות.

נוכיח כעת את טענה 3.3 בהתייחס למקרה השני:

יהי Gopt הגרף אשר מוגדר ע"י הפתרון האופטימלי. Gopt הינו גרף אוילר מכוון.
הכפלת קשתות B, יוצרת מעגל אוילריאני Ge, שבו קשתות B הקדמיות, הן קשתות המוכלות בגרף G_{opt}, ואילו הקשתות ההפוכות אינן מוכלות בו.

מבנית הפתרון המאולץ, נתון כי עוברים פעמיים על כל הקשתות שאינן שייכות ל-B. על כל קשתות B עוברים פעם אחת, וכיון שהמעבר על הקשתות ההפוכות ניתן להחלפה ע"י מעבר כפול על הקשתות הקדמיות, הרי שלכל יותר קיים מעבר כפול על כל קשתות הפתרון האופטימלי.

מ.ש.ל.

בדוגמא הבאה נראה כי לא ניתן לשפר את החסם באופן אסימפטוטי:

נניח את הגרף הבא :

המרחק בין כל שני צמתי היצע i,j הוא 1 . לצידי כל צומת היצע i ממוקמות 2 נקודות ביקוש, האחת למוצר מסוג $i-1$ והשניה למוצר מסוג $i+1$.

המרחק בין כל אחת מנקודות הביקוש לצומת ההיצע הקרוב אליה, הוא קצר ביחס לאורך הקשתות האחרות המתוארות $(\varepsilon>0)$.

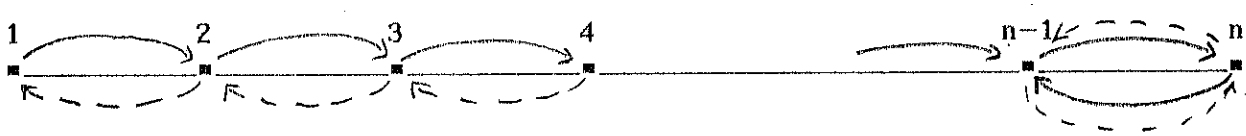
הפתרון האופטימלי יהיה מעבר כפול על קשתות הגרף:

$1-2-3-...(n-1)-n-(n-1)-...3-2-1$

ואורכו $2(n-1) = 2n-2$

קשתות B יהיו: $B=\{ (1,2),(2,3),3,4),...(n-1,n),(n,n-1) \}$

וסדר המעבר יהיה: $1-2-3-4-...-(n-1)-n-(n-1)-...4-3-2-1$



הקשתות המרוסקות מתארות את הכפלת קשתות B .

הפתרון המקורב יהיה

$1-2-1-2-3-2-3-4-3-4-...-(n-2)-(n-1)-n-(n-1)-...-4-3-2-1$

ואורכו $3(n-2)+n = 4n-6$

$$APX/OPT = 4n-6/2n-2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 2$$

מ.ש.ל.

‎.3.4 NO DROPS והגרף מכוון:

במקרה זה נטען כי קיים פתרון מאולץ שבו יחס השגיאה חסום ע"י מספר המוצרים בגרף. טענה זו תקפה גם במקרה בו מותר אחסון ביניים. 2 ההוכחות תנבענה מההוכחה אשר הוצגה למקרה הכללי, בו דובר על מספר מחסנים לכל סוג מוצר (עמ' 4). בהמשך נראה כי לא ניתן לשפר את החסם אפילו למקרה בו מותר אחסון ביניים ומכאן תנבע ההוכחה למקרה בו אסור אחסון ביניים.

‎.3.5 המקרה בו מותר אחסון ביניים (DROPS)

נתאר ניסוח מתמטי לבעיה הלא מאולצת :

יהי,

X_{ijkp} מס' היחידות ממוצר k המועברות בקשת (i,j) ה-p-ית בסדר המעבר

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{(i,j) אם קשת בפתרון} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$z_{ijp} = \begin{cases} 1 & \text{(i,j) אם הקשת ה-p בפתרון היא} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$t_{kp} = \begin{cases} 1 & \text{אם מוצר k מועבר בצעד ה-p} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

C_{ij} עלות המעבר בין נק' i לבין נק j .

M גדול (למשל ΣD_k).

פונקצית המטרה:

$$\min \sum_{i,j} C_{ij}\, y_{ij} \qquad (1)$$

ומתקיים:

$$y_{ij} = \sum_{p} z_{ijp} \qquad \forall\, i,j \qquad (2)$$

(3) $$z_{ijp} \geq \frac{\sum_{k} X_{ijkp}}{M} \qquad \forall\ i,j,p$$

(4) $$\sum_{b=1}^{p} \sum_{j} X_{ijkb} \leq \sum_{a=1}^{p-1} \sum_{r} X_{rika} \qquad \forall\ p,i,k\ ,\ r\ W$$

(5) $$\sum_{j} X_{ijkp} - \sum_{j} X_{jikp} = \begin{cases} |D_k| & i=w_k \quad \text{(i)} \\ -1 & i \in D_k \quad \text{(ii)} \\ 0 & \text{אחרת} \quad \text{(iii)} \end{cases} \qquad \forall\ k,p$$

(6) $$\sum_{j} y_{ij} - \sum_{j} y_{ji} = 0$$

(7) $$\sum_{\substack{i\ U \\ j\ N-U}} y_{ij} \geq 1 \qquad \begin{matrix} U \subseteq N \\ 2 \leq |U| \leq n-2 \end{matrix}$$

(8) $$\sum_{k} t_{kp} \leq 1 \qquad \forall\ p$$

(9) $$t_{kp} \leq X_{ijkp} \qquad \forall\ i,j,k,p$$

האילוצים

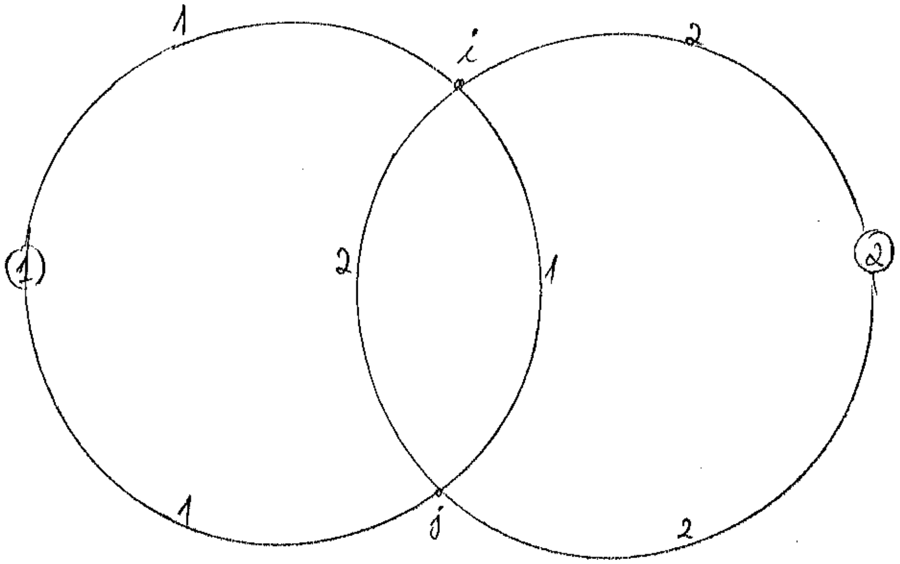
אילוץ 2 מבטיח מעבר יחיד על קשת בפתרון.

אילוץ 4 מבטיח את סדר המעבר בפתרון. כלומר, לא ניתן לצאת מצומת i עם מוצר k=i, אלא אם בקרנו קודם בצומת והנחנו שם לאחסון ביניים את מוצר k.

אילוץ 5: זהו אילוץ שמירת זרימה על צמתי הגרף ביחס לסוג וכמות המוצר. יש לשים לב כי אילוץ זה (iii) כולל גם את הצמתים שאינם צמתי היצע (מחסן) או ביקוש.

בעזרת הדוגמא הבאה, נראה כי כאשר מותר אחסון ביניים, קיים מסלול אופטימלי היכול להשתמש בצמתי אחסון שאינם צמתי ביקוש או היצע, (בדומה למוצג בבעית ה-swapping):

נניח את הגרף הבא:



לאורך הקשתות קיימים רצף של צמתי ביקוש למוצרים 1 ו- 2. המספרים על הקשתות מסמנים את הביקושים השונים בכל קטע

יהיו $d_{1i} = d_{ij} = d_{j1} = d_{2i} = d_{2j} = 1$ אורכי הקשתות.

הפתרון האופטימלי כאשר מותר אחסון ביניים, אך לא בנק' שאינן נק' היצע או ביקוש יהיה: 1-i-j-1-i-2-i-j-2-j-1 ואורכו 10.

הפתרון האופטימלי כאשר מותר אחסון ביניים בנק' שאינן נק' ביקוש או היצע יהיה : חלוקת מוצר 1 בקטע 1-i-j והנחתו בנק' j, מעבר ריק למחסן 2 חלוקת מוצר 2 בקטע 2-i-j-2, מעבר ריק לנק' j, איסוף מוצר 1 וחלוקתו בקטע j-1. אורכו של הפתרון 8 .

אילוץ 6 מבטיח כי דרגת כל צומת בגרף תהיה זוגית.

אילוץ 7 מונע יצירת מעגלים זרים.

אילוץ 8 מונע העברת מס' סוגי מוצרים בו זמנית.

3.6. DROPS והגרף אינו מכוון:

טענה 3.6.

$APX/OPT \leq 3$

הוכחה:

נסדר את המחסנים לפי סדר הביקור הראשון בהם.

ניצור פתרון מאולץ בצורה הבאה: נתחיל במחסן i כלשהו, נצא ונחזור על כל קטע בOPT, שמכיל מוצר i. נעבור למחסן הבא k לפי הסדר שנקבע קודם.
נעבור כך על כל המחסנים.

ברור מאופן יצירת הפתרון כי אורכו $\leq$ 3OPT.

באמצעות הדוגמא הבאה נראה כי לא ניתן לשפר אסימפטוטית את החסם.

יהי $G=(N,E)$ גרף בעל קבוצת צמתים N, המכילה תת קבוצה W של צמתי היצע ותת קבוצה D של צמתי ביקוש.

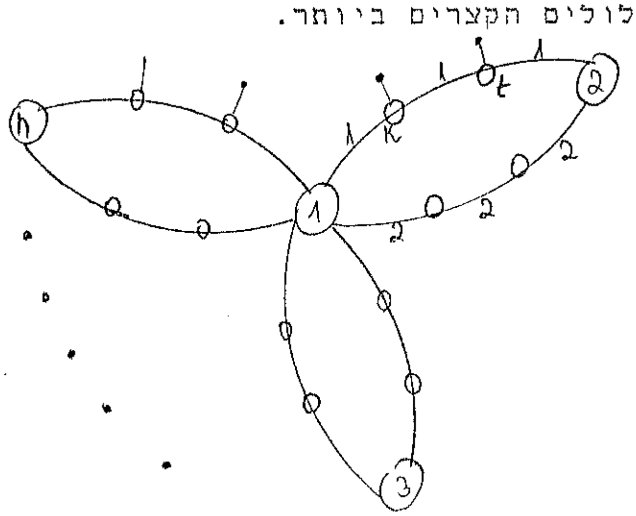
נבנה את הגרף באופן הבא:

בין כל 2 צמתי היצע ראשיים i ו- j תהיינה שתי קשתות, האחת נושאת רצף של צמתי ביקוש למוצר i ואילו השניה רצף צמתי ביקוש למוצר j.

כעת נציב 2 צמתי היצע נוספים על כל קשת כזו, באופן שתחולק לשלושה חלקים.
כל צומת כזה יקרא צומת היצע משני.
לכל צומת משני k תהיה נק' ביקוש אחת במרחק e ממנו ($e>0$, קטן מספיק ביחס לאורך הקשתות האחרות המתוארות).

המרחק בין כל שני צמתי היצע ראשיים הוא של יחידה אחת.

תחת הנחת אי שוויון המשולש ניתן להניח כי הגרף שלם, וכי שאר אורכי הקשתות אשר אינן מתוארות הן כאורכי המסלולים הקצרים ביותר.



על גבי הקשתות בתרשים מתוארים סוגי המוצרים להם יש ביקוש באותה קשת.

הפתרון המאולץ האופטימלי יהיה כדלקמן:

נתחיל במחסן 1. נלך ונחזור על כל הקשתות היוצאות ממנו (1,2),...(1,n) למעט הקשת האחרונה (1,n) עליה נלך פעם אחת.
נלך על קשת (n,1) תוך חלוקת מוצר n. נעבור שוב על קשתות (1,n) ו- (n,1) תוך חלוקת המוצרים של המחסנים המשניים הממוקמים על הקשתות. נעבור למחסן n-1 תוך חלוקת מוצרי המחסנים המשניים בקשת (1,n-1).
נחלק את מוצר n-1 לאורך קשת (n-1,1). נחזור שוב באותה קשת עם המוצרים של המחסנים המשניים שלאורכה, ונחזור בשלישית על קשת זו ריקים למחסן 1 .
נעבור למחסן n-2 ונחזור על כל התהליך עד לסיום חלוקת כל המוצרים.

גודלו של הפתרון המאולץ: $APX=3(2(n-1))+4 = 6(n-1)+4$

הפתרון האופטימלי יהיה מעבר על כל קשת פעם אחת, לכן

$$OPT=2(n-1)$$

$$\frac{APX}{OPT} = \frac{3(2(n-1))+4}{2(n-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$$

מ.ש.ל.

הערה: גם במקרה זה אין משמעות להיות נק' המוצא נבחרת או נתונה:
יהי s צומת המוצא והסיום . נעבור לצומת היצע ש-OPT מתחיל בו,
נניח צומת 1. כעת ניצור את הפתרון המאולץ על המחסנים בגרף כמקודם.
ברור שאורכו של הפתרון המאולץ יהיה $3OPT - 2C_{s1}$.

3.7. DROPS והגרף מכוון:

טענה 3.7. קיים פתרון מאולץ בו יחס השגיאה חסום ע"י מספר המוצרים בגרף, וקיים מקרה בו חסם זה מתקבל.

הוכחה:

כפי שהוזכר במקרה בו אסור אחסון ביניים, נובעת ההוכחה מהמקרה הכללי ,בו הראינו כי לכל מעגל מתקיים יחס שגיאה החסום ע"י מספר המוצרים.

ראשית נראה כי הוכחה זו תקפה גם למקרה בו אסור אחסון ביניים, כפי שהוזכר קודם:

יהי Z_D ערך אופטימלי של הבעיה בה מותר אחסון ביניים ויהי Z_{ND} ערך אופטימלי של הבעיה בה אסור אחסון ביניים. כיון שהבעיה עם אחסון ביניים פחות מאולצת מהבעיה ללא אחסון ביניים, הרי ש- $Z_D \le Z_{ND}$ ולכן $APX/Z_{ND} \le APX/Z_D$ ומכאן נובע החסם למקרה בו אסור אחסון ביניים.

נראה שלא ניתן לשפר את החסם באופן אסימפטוטי. לצורך כך נתאר את הגרף כללי הבא:

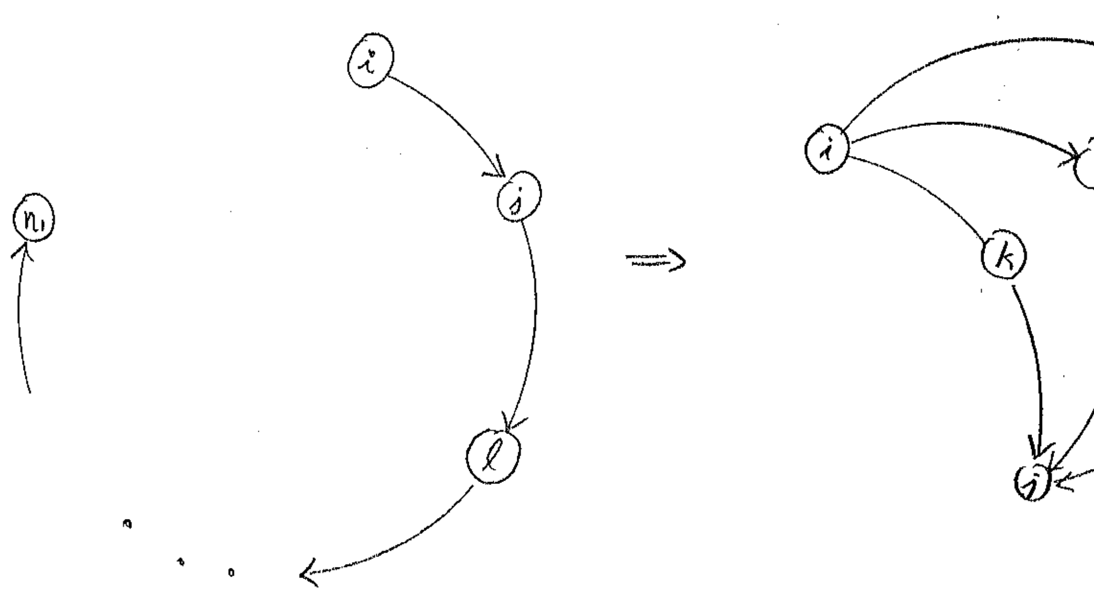
יהי G גרף בעל קבוצת צמתים $N=W \cup D$, המורכבת מ-n צמתי היצע ו- מספר רב של צמתי ביקוש. $|W|=n$

צמתי ההיצע נחלקים לשתי קבוצות $W=W_1 \cup W_2$ של צמתי היצע ראשיים וצמתי היצע משניים. $|W_1| = n_1$, $|W_2| = n_2$

יהי S מעגל מכוון עם צמתי היצע $1,\dots n_1$. נבנה את הגרף באופן הבא:

1) בין כל 2 צמתי היצע נכניס n_2/n_1 קשתות במקביל.

2) תהי (i,j) קשת מכוונת במעגל.
נחליף כל קשת כזו בשתי קשתות (i,k) ו- (k,j), כאשר k הינו צומת היצע משני ולאורך קשת (i,k) יש רצף של צמתי ביקוש למוצר i.

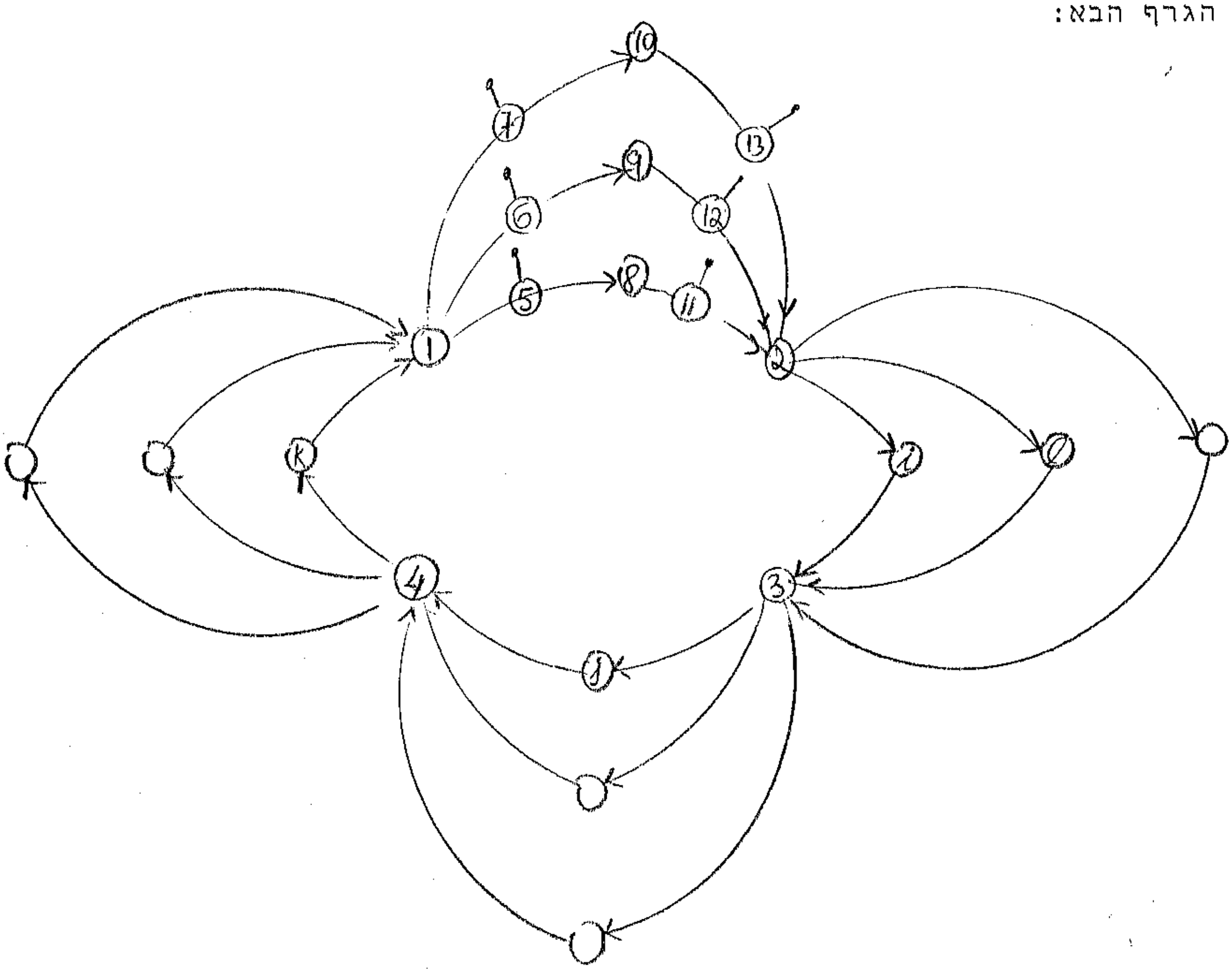


באמצעות הדוגמא הבאה נראה כי יחס השגיאה תלוי במספר המוצרים:

נניח את הגרף הבא:

$n_1 = 4$

$n_2 = 12$



ונניח כי בין כל 2 צמתי היצע על קשת (ראשי ומשני), קיים צומת היצע נוסף שלו יש נק' ביקוש אחת במרחק ε ממנו.

המרחק בין כל 2 צמתי היצע ראשיים = 1, ופונק' המרחקים מקיימת את אי שויון המשולש.

הפתרון האופטימלי יהיה כדלקמן: נתחיל בצומת 1, נחלק את מוצר 1 בקטע (1,5). נניח את מוצר 1 בצומת 5 נחלק את מוצר 5, נשוב ונאסוף את מוצר 1 ונחלקו בקטע (5,8). נאסוף את מוצר 8 ונחלקו לאורך הקטע (8,11). נניח את מוצר 8 בצומת 11, נחלק את מוצר 11, נאסוף את מוצר 8 ונחלקו בקטע (11,2). נמשיך בצורה זו את חלוקת כל המוצרים.

הפתרון המקורב: יש לחלק כל מוצר ברציפות, לפיכך נתחיל בצומת 1
ונלך במסלול הבא:

1-8-2-i-3-j-4-k-1-6-9-2-1-3-...1-10

עם גמר חלוקת מוצר 1 נמשיך בחלוקת מוצר 10 לאורך הקטע (10,13),
וחלוקת מוצר 13 בקטע (13,2). נעבור לחלוקת מוצר 2 בדומה לחלוקת מוצר
1. עם גמר חלוקת המוצרים בצמתים הראשיים נעבור לחלוקת המוצרים
s ... 5,8,a,i ולבסוף מוצרים 11,d,...t.

למקרה הכללי נקבל :

$$OPT = 2n_2$$

$$APX = (n_1+2)[2n_1(n_2/n_1 -1)]+2(2n_1)$$

$$= 2n_2(n_1+2)-2n_1(n_1-2)$$

$$\frac{APX}{OPT} = \frac{2n_2(n_1+2)-(2n_1(n_1-2)}{2n_2} \xrightarrow[n_1 \to \infty]{} n_1+2$$

מ.ש.ל.

הערה: דוגמא זו טובה גם למקרה בו נק' המוצא נתונה.

ביבליוגרפיה

[1] . Anily,S., and R. Hassin (1991), " The Swapping Problem ", Networks Vol.22 (1992), 419-433 .

[2] . Anily,S., and G. Mosheiov (1993), "The Traveling Salesman Problem With Delivery and Backhauls ", Operations Research Letters, 1993 .

[3] . Chisman, J.A (1975), " The Clustered Traveling Salesman Problem ", Comput & Ops Res, Vol 2, 115-119 .

[4] . Christofides,N., and I. Colloff (1971), " The Rearrangement of Items in Warehouse ", Operation Research 21, 577-589 .

[5] . Dror, M., H. Stern and P. Trudeau (1987), " Postman Tour On Graph With Precedence Relation On Arcs ", Netw rk, Vol 17, 283-294

[6] . Frederickson, G.N., M.S Hecht., and C.E Kim (1978), " Approximation Algorithms For Some routing Problems ", SIAM J. Vol 7, no 2, 178-190

[7] . Hoogeveen, J.A (1985) ," Analysis of Christofides' Heuristic: Some Paths are more difficult then Cycles ",

[8] . Jongens,K., and T. Volgenant (1985), " The Symmetric Clustered Traveling Salesman Problem ", European Journal of Operational Research 19, 68-75 .

[8] . Lokin, F.C.J (1978), " Procedures For Traveling Salesman Problem With Additional Constraints ", European Journal of Operational Research 3, 135-141 .

[10] . Mittal,A.K (1975), "Optimal Rearrangement Of Objects", Ph.D. thesis