

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעי החברה
החוג לסטטיסטיקה
המסלול לחקר ביצועים

עצים פורשים מינימליים במרחב

חבור זה הוגש כעבודת גמר לקראת התואר
"מוסמך למדעי החברה" - מ.א. - בחקר ביצועים
באוניברסיטת תל-אביב

על-ידי
מיכל שטרן
בהדרכת ד"ר רפי חסין

דצמבר 1981

A B S T R A C T

In this work we prove the theorem that if we divide all the edges of a given minimum spanning tree, to a number of parts, such that every edge is divided to parts that are equal in their length, the minimum spanning tree is not changed.

We show that this property is not true when the distances are measured in the rectilinear norm and in the maximum norm, and also when we divide the edges to parts that are not equal in their length.

תוכן העניינים

עמוד

2	הקדמה
5	1. הגדרות וסימונים
5	1.1. הגדרות כלליות
7	1.1.1. הגדרות וסימונים מתורת הגרפים
8	2. סקירה של אלגוריתמים
8	2.1. אלגוריתמים למציאת עצים פורשים מינימליים
13	2.1.1. אלגוריתמים לעדכון עצים פורשים מינימליים נתונים
15	2.1.2. אלגוריתמים למציאת עצים פורשים מינימליים במרחבים וקטוריים
19	3. חלוקת עצים פורשים מינימליים נתונים
19	3.1. הכנת הרקע וניסוח משפט "חלוקת הקשתות"
21	3.1.1. הוכחת המשפט "חלוקת הקשתות"
29	3.1.2. דוגמאות נגדיות למשפט עבור נורמות אחרות
37	3.1.3. נסיון נוסף להכללת משפט "חלוקת הקשתות"
40	ביבליוגרפיה

הקדמה

לפתרון בעיות כמו: סלילת דרכים או הקמת רשת צינורות של מים, גז וכד' בין נקודות יישוב שונות, שלהן דרוש מימון כספי גדול, אנו נעזרים בתורת הרשתות באמצעות בניית רשתות, שהוצאותיהן הכספיות הן מינימליות. בהנחה שכל נקודת יישוב חייבת להיות מחוברת לרשת, הפתרון מתאפשר על-ידי מציאת עץ פורש מינימלי של הרשת. פתרון אפשרי נוסף הוא במציאת עץ שטיינר של הרשת. היתרון בפתרון זה הוא שבדרך-כלל, בבעיות מהסוג בהן אנו דנים, עץ שטיינר דורש הוצאות כספיות קטנות עוד יותר ממה שדורש הפתרון בעזרת העץ הפורש המינימלי. אולם החסרון בפתרון שטיינר הוא במורכבות של דרך-הפתרון וגם בכך שנקודות המפגש של הקשתות אינן בהכרח הנקודות אותן רצינו לחבר לרשת. אלה הם אילוצים, שלא תמיד נוכל להתמודד איתם בבואנו לפתור בפועל בעיה מסויימת. בעבודה זו נעסוק בפתרון בעזרת עצים פורשים מינימליים ולא בעצי שטיינר.

בפרק 1 נביא את ההגדרות והסימונים שבהם נשתמש בהמשך העבודה.

בפרק 2 נסקור את האלגוריתמים הקלאסיים וכן אלגוריתמים יעילים יותר למציאת עצים פורשים מינימליים. נסקור אלגוריתמים לעדכון של עץ פורש מינימלי נתון, כשמוסיפים קודקוד עם הקשתות המחוברות אותו לגרף המקורי. כמו-כן נסקור אלגוריתמים למציאת עצים פורשים מינימליים במרחבים וקטוריים.

בפרק 3 נוכיח את המשפט של מקרה "חלוקת הקשתות". מקרה זה טוען כי חלוקת כל הקשתות של עץ פורש מינימלי נתון, למספר טבעי כלשהו של חלקים, כאשר כל קשת מתחלקת לחלקים שווים באורכם, לא משנה את העץ הפורש המינימלי.

Boyce, Garey and Johnson (BGJ) [1] הוכיחו את המשפט של מקרה "חציית הקשתות". מקרה זה עוסק במקרה הפרטי בו חוצים את כל הקשתות של עץ פורש מינימלי נתון, כלומר מחלקים את כל הקשתות לשני חלקים שווים, כשהמרחקים נמדדים בנורמה האוקלידית. בעבודה זו נוכיח משפט מכליל, אשר כולל בתוכו את המשפט של *BGJ*, וזאת בדרך הוכחה שונה משלהם. *BGJ* הוכיחו את המשפט על-סמך פיתוח הנוסחה של הנורמה האוקלידית, ואילו כאן אנו מוכיחים את משפטנו על-ידי אינדוקציה. המשפט שלנו כולל יותר בשני מובנים: א. נוכיח את המשפט עבור חלוקת כל הקשתות של עץ פורש מינימלי נתון, למספר טבעי כלשהו של חלקים, כאשר כל קשת מתחלקת לחלקים שווים באורכם. ברור כי הוכחת המקרה הזה מכלילה יותר מהוכחת המקרה של "חציית הקשתות", הוא המקרה בו דנו *BGJ*. ב. נוכיח את המשפט כשהמרחקים יכולים להימדד בכל נורמה המוגדרת על מכפלה פנימית. בתורת הרשתות ישנה חשיבות רבה לטפל לא רק במרחקים הנמדדים בנורמה האוקלידית. שכן בבעיות מהסוג בו אנו דנים עלולים להתעורר אילוצים שונים (אילוצים הקשורים בבעיות טופוגרפיות וכד'), שמאלצים אותנו למדוד מרחקים בנורמות שונות מהנורמה האוקלידית המקובלת.

משפטנו איננו מתקיים כאשר המרחקים נמדדים בנורמת המרחקים המלבניים או בנורמת המקסימום, שהן נורמות נוספות בעלות חשיבות רבה בתורת הרשתות. זאת אפשר לראות מהדוגמאות הנגדיות שנביא בהמשך פרק 3.

כמו-כן נביא דוגמא נגדית למשפט, המתיחסת למקרה בו מחלקים את כל הקשתות למספר טבעי כלשהו של חלקים, כאשר כל קשת לא מתחלקת לחלקים שווים באורכם אלא לחלקים שאורכם נקבע על-פי פרופורצית החלוקה שנקבעת.