אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים
ע"ש רימונד ובברלי סאקלר
ביה"ס למדעי המתמטיקה

אלגוריתמים מקורבים לבעית התת גרף הא-ציקלי המקסימלי
ובעיות אחרות

חיבור זה הוגש כחלק מהדרישות לקבלת תואר
"מוסמך למדעים" .M.Sc בחקר ביצועים
באוניברסיטת תל-אביב
בית הספר למדעי המתמטיקה
החוג לסטטיסטיקה וחקר ביצועים

על-ידי
שלומי רובינשטיין

העבודה הוכנה בהדרכתו של פרופ' רפאל חסין

מרץ 1994

ברצוני להודות למנחה המסור של עבודה זאת, פרופ' רפי חסין,
שבזכותו התקדמתי בלימודי.

Tel-Aviv University
Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
School of Mathematical Sciences

APPROXIMATIONS FOR THE MAXIMUM ACYCLIC SUBGRAPH PROBLEM AND OTHER PROBLEMS

Thesis submitted as partial fulfillment of the requirements
towards the M.Sc. degree in Operations Research
Tel-Aviv University
School of Mathematical Sciences
Statistics and Operations Research department

by
Shlomi Rubinstein

The research work in this thesis has been
conducted under the supervision of
Prof. Refael Hassin

March 1994

I would like to thank the devoted supervisor of this work,
Prof. Rafi Hassin, thanks to whom I have advanced in my studies.

Abstract

This work discusses three issues: the maximum acyclic subgraph problem, the equi-partitions of a graph and the cover of intervals.

Given a directed graph $G=(V,E)$, $V=\{1....n\}$, with positive arc weights, the maximum acyclic subgraph problem is to find a subset E' of E of maximum total weight such that $G'(V,E')$ is acyclic.

The problem is known as NP complete even if the weights are all 1.

The problem is polynomially solvable when G is planar. the most efficient algorithm known for this case is $O(n^3)$.

For the unweighted problem there is a known algorithm which guarantes at least a ratio of $(0.5+O(1/d_{max})^{0.5})$ of the optimal solution, where d_{max} is the maximum vertex degree.

In this work I examin a variety of algorithms to the problem. For some of them there is an example demonstraiting that the error ratio cannot be bounded by any constant. For the others it is shown that the worst case ratio is of order 0.5 .

I then offer a randomized and a deterministic algorithm for the unweighted problem that guarantee a bound similar to the known one , but with time complexity which is better in certain cases.

For a planar graph I give an algorithm which provides a ratio better than 0.5, in linear time.

There is a disscusion of the efficency of algorithms on randomized graphs in which each arc exists in a constant probability.

Given an undirected graph the equi-partitions problem is of finding a partition of the graph's nodes into k equal sized groups so that the total whights of arcs between nodes of the same group is maximal.

Already the version of k=2 , which is discussed in this work is known as NP complete.

Three algorithms , which guarante a ratio tending to 0.5 , are discussed.

The first one is based on local search.

The second on finding a minimum matching and afterwards determining a partition in which each node will be in a group diffrent than i'ts pair.

The third algorithm is based on random partitioning of the nodes into small groups and then the determination of the partition ensuring that nodes from the same small group will enter the same big group.

Given a set of closed intervals on the line. A minimum cover of them is a set of points on the line which intersects all the intervals and is of minimal cardinality if all points have the same weights and of minimal sum of weights if diffrent points have different weights.

In both cases there are known simple, efficent, algorithms, which provide an optimal solution. Here I discuss the operations of a greedy algorithm and prove that while in the unweighted version it guaranties a ratio of not more than 2, in the weighted version the ratio cannot be bounded by any constant.

תוכן העינינם

מבוא

עבודה זאת עוסקת בשלושה נושאים: בעית הגרף הא-ציקלי המקסימלי, בעית החתך המאוזן ובעית כיסוי האינטרולים.

כשנתון גרף מכוון $G=(V,E)$ $V=\{1,...,n\}$ עם משקולות חיוביים לקשתות, בעית הגרף הא-ציקלי המקסימלי היא מציאת קבוצה חלקית של קשתות בעלת סכום משקולות מקסימלי מבלי שהן לבדן יוצרות מעגל.

הבעיה מוכרת כשלמה ב NP גם כאשר לקשתות משקל קבוע [Kp].

הבעיה פתירה בעזרת אלגוריתם פולינומי כאשר הגרף מישורי. האלגוריתם היעיל ביותר הידוע למקרה זה הוא בסיבוכיות $O(n^3)$ [G].

לבעיה אפשר למצוא פתרון אופטימלי בזמן פולינומי אם ורק אם לבעית קבוצה מקסימלית בלתי תלויה אפשר למצוא פתרון אופטימלי בזמן פולינומי , אם כי אלגוריתם פולינומי המבטיח שגיאה חסומה ידוע רק לבעית הגרף הא-ציקלי.

האלגוריתם הפשוט ביותר למציאת פתרון מקורב לבעיה הוא [K] לקחת פרמוטציה ואת הפרמוטציה ההפוכה ולבחור את זאת מביניהן שבה סכום המשקולות של קשתות מצמתים בעלי אינדקס נמוך יותר לצמתים בעלי אינדקס גבוה יותר, גדול יותר. כמובן שבשני המקרים מקבלים גרף א-ציקלי וכמובן שכל קשת מופיעה באחד המקרים. כך שבאחת הפרמוטציות יש לפחות את חצי מסכום המשקולות.

אלגוריתמים יותר מתוחכמים למקרה המשוקלל נדונים ב [BS]. בעזרתו של אלגוריתם רנדומי ודה-רנדומיזציה מתקבל פתרון המבטיח יחס של $(0.5+O(1/(d_{max})^{0.5}))$ כאשר d_{max} היא הדרגה המקסימלית בגרף. סיבוכיות השיטה היא $O(|v|\cdot|e|)$.

ב [KH] יש הוכחה לכך שאלגוריתם החמדן לא מבטיח שום פרופורציה חיובית של קשתות הגרף. זה יכול לקרות בגרף בו יש קשתות מכל צומת בעל אינדקס i לצומת בעל אינדקס $i-1$. ובנוסף קשתות מכל צומת לכל הצמתים בעלי אינדקס גדול לפחות בשניים מהאינדקס שלו. עלולות להבחר $n-1$ הקשתות הראשונות וכך אי אפשר יהיה לבחור עוד קשתות, בזמן שפתרון אופטימלי מורכב מ $O(n^2)$ קשתות.

בעבודה זאת אני מראה לגבי כמה אלגוריתמים שהם לא מבטיחים פרופורציה חיובית של מספר הקשתות האופטימלי ולגבי אחרים שהם מבטיחים רק פרופורציה של חצי מספר הקשתות האופטימלי , כך שגם במקרה הלא משוקלל הם לא משיגים שפור.

מוצע אלגוריתם המבטיח פרופורציה דומה לזאת המוצעת ב [BS] . האלגוריתם מתבסס על רנדומיזציה השונה מהידועה. סיבוכיות השיטה היא $O(|e|+(d_{max})^3)$ שבמקרים מסוימים מהוה שפור.

מוצע אלגוריתם המבטיח פרופורציה של יותר מחצי קשתות הגרף בגרף מישורי בסיבוכיות לינארית במספר הצמתים.

מנותח בצוע של אלגוריתם על גרף אקראי בו יוצאת קשת מכל צומת לכל צומת אחר בהסתברות p מסוימת.

נתון גרף שלם עם משקולות על הקשתות.

בעית החתך המאוזן היא בעית מציאת חלוקה ל k קבוצות שוות גודל באופן שסכום המשקולות של הקשתות בתוך הקבוצות יהיה מקסימלי.

הבעיה מוכרת כשלמה ב NP גם עבור k=2 וקשתות בעלות משקולות 0 ו 1 [GJS] והיא עדיין במחלקה זאת גם אם מתקים אי שיוויון המשולש על הקשתות [FK]. במקרה זה יש קירוב הנותן את חצי מסכום המשקולות האופטימלי [FK] .

בעבודה זאת נדון המקרה שבו k=2 . נדונים שלושה אלגוריתמים המבטיחים פרופורציה ששואפת לחצי סכום המשקולות האופטימלי, גם כאשר אין מניחים קיום אי שיוויון המשולש. האלגוריתם הראשון מתבסס על חפוש מקומי . האלגוריתם השני על מציאת זיווג בעל סכום משקולות נמוך ואחר-כך קביעת החלוקה בשלבים כך ששני צמתים שזווגו יחד, יכנסו לקבוצות שונות. האלגוריתם השלישי מתבסס על חלוקה אקראית של צמתי הגרף לקבוצות קטנות שוות גודל ואחר-כך משובצים הצמתים לקבוצות הגדולות באופן שצמתים שהיו באותה קבוצה קטנה יכנסו לאותה קבוצה גדולה.

3

בבעית כיסוי גרף אינטרולים נתונה קבוצה של קטעים סגורים על הישר ויש למצוא קבוצה של נקודות על הישר כך שעל כל אחד מהקטעים תהיה לפחות נקודה אחת. על הקבוצה להיות מינימלית במקרה שלנקודות השונות משקל קבוע ובעלת סכום משקולות מינימלי במקרה שיש לנקודות משקולות שונים. בשני המקרים יש אלגוריתמים פשוטים יעילים. בעבודה זאת נבדקים ביצועיו של אלגוריתם חמדני בשני המקרים. ומוכח שבמקרה הלא משוקלל הוא עלול להביא לבחירת קבוצה גדולה עד פי 2 מהאופטימלית ובמקרה המשוקלל הוא עלול לתת פתרון בכל יחס רע.

4

אלגוריתמים לבחירת תת גרף א-ציקלי בעל גודל מירבי

אם נבחר פרמוטציה של הצמתים ואת הפרמוטציה בעלת סדר הפוך אז באיחוד שלהן מופיעות כל הקשתות. לכן בזאת מביניהן שגדולה יותר מופיעות לפחות חצי מהקשתות.

השאלה היא מה יכולה לתת בדיקה של יותר פרמוטציות ואחרבך בחירת הטובה מביניהן. כלומר, זאת שהמקסימלי מבינה ומבין ההפוכה לה גדולה ביותר.

אפשר להראות שעבור כל בחירה של פרמוטציות במספר שהוא פולינום של גודל הגרף,באשר גודל הגרף שואף לאינסוף,לא נקבל פתרון שנותן יותר מחצי גודל הגרף וגם לא יותר מחצי הפתרון האופטימלי. הפרמוטציות נתונות מראש. נבנה בלי שום קשר גרף שהוא חלוקה אקראית של צמתי הגרף לזוגות מכוונים. כל פרמוטציה שנתנת בלי להכיר את החלוקה תתן פרופורציה ששואפת ל- 0.5 מקשתות הגרף . הסכוי שפרמוטציה מסוימת תתן ב-ε יותר מ- 0.5 מקשתות הגרף שואף לאפס אכספוננציאלית ביחס לגודל הגרף,על-פי הקירוב הנורמלי להתפלגות הבינומית. איחוד המקרים שלפחות אחת הפרמוטציות תתן ביותר מ-ε מ-0.5 מקשתות הגרף,קטנה מסכום ההסתברויות. מביוון שמספר הפרמוטציות גדל כמו פולינום של גודל הגרף והסכוי שאחד מהם יסטה ביותר מ-ε קטן אכספוננציאלית ביחס לגודל הגרף הרי מכפלתם שואפת לאפס ,כאשר גודל הגרף שואף לאינסוף. לכן יש סכוי חיובי(ראינו שהוא גדול) שאף פרמוטציה לא תתן יותר מ-ε מ-0.5 מקשתות הגרף. לכן נקבל טענה: עבור כל בחירה מראש של מספר פולינומי של פרמוטציות לא נקבל יותר מ-0.5 אסימפטוטי מקשתות הגרף,כאשר גודל הגרף שואף לאינסוף.

<u>סקירת אלגוריתמים מקורבים אחרים לפתרון הבעיה</u>

אלגוריתם שממקם בקצה צומת בעל דרגת בניסה מקסימלית או יציאה מקסימלית:

<u>טענה</u>: אלגוריתם זה לא מבטיח יותר מחצי של קשתות הגרף.

<u>הוכחה</u>: נניח שיש צומת שמחצי מיתר צמתי הגרף יש לו כניסות וליתר צמתי הגרף יש לו יציאות ויותר אין קשתות בגרף. במקרה זה יבחר צומת זה לקצה של הפרמוטציה ואי אפשר יהיה לבחור יותר מחצי מקשתות הגרף.

נניח שננסה להתחכם יותר ולבחור לקצה צומת בעל הפרש מקסימלי בערכו המוחלט בין דרגות היציאה והכניסה. לגבי הגרף האחרון שתארתי נקבל פתרון אופטימלי. אבל בכלית לא נקבל אסמפטוטית יותר מחצי מקשתות הגרף. דוגמא להוכחת הטענה: נבנה גרף בעל $2\cdot n+3$ צמתים, שבו כל הקשתות הן: מ-n צמתים יציאות לצומת a ול-$n+2$ צמתים כניסות מצומת a. במקרה זה יבחר צומת a לקצה ולא נוכל לבחור יותר מ-$(n+2)/(2\cdot n+3)$ מקשתות הגרף. יחס זה שואף לחצי.

אלגוריתם שהוצע לפתירת הבעיה הוא לבחור בכל שלב של בנית הגרף לקצה המתאים צומת בעל דרגת יציאה מינימלית (מבלי להתחשב בדרגות הכניסה) או לחילופין לקצה השני צומת בעל דרגת כניסה מינימלית (מבלי להתחשב בדרגות היציאה).

טענה: אלגוריתם זה לא מבטיח שום פרופורציה חיובית של קשתות הגרף.

ההוכחה על-ידי דוגמא: גרף שבו קליק של שלושה צמתים ובנוסף לכך מאחד מהם יש יציאות להרבה צמתים. צמתים אלה הם בעלי דרגת כניסה מינימלית, ואם ייבחרו לקצה הלא מתאים בשל כך, יאבדו כמעט כל קשתות הגרף.

אלגוריתם אחר הוא לבחור לקצה המתאים צומת בעל $\min(d_{out},d_{in})$ מינימלי.

אלגוריתם זה מבטיח לפחות חצי מקשתות הגרף, זאת מכיוון שבכל שלב מבטיחים את קיומם של מספר קשתות גדול לפחות כמו אלה שנמחקו.

אבל אלגוריתם זה לא מבטיח את בחירתן של יותר מחצי קשתות הגרף.

ההוכחה על-ידי דוגמא: גרף של עמודות בעלות מספר שווה של צמתים. כל הצמתים בכל עמודה מחוברים לצמתים שבעמודה שמימינה, והצמתים בעמודה הימנית ביותר מחוברים לצמתים שבעמודה השמאלית ביותר. פתרון אופטימלי הוא, למשל, לבחור את כל הקשתות חוץ מאלה שיוצאות מהעמודה הימנית לשמאלית. כאשר מספר העמודות ישאף לאינסוף, ישאף גודל הפתרון בפרופורציה לגודל כל הגרף. האלגוריתם הנדון עלול לבחור, למשל, לקצה השמאלי צמתים מכל עמודה במחזוריות. אדגים זאת בשרטוט של מלבן בעל 4 שורות ו 4 עמודות. המספור נותן את סדר הבחירה משמאל.

x(1)	x(2)	x(3)	x(4)
x(5)	x(6)	x(7)	x(8)
x(9)	x(10)	x(11)	x(12)
x(13)	x(14)	x(15)	x(16)

כאשר מספר השורות ישאף לאינסוף, ישאף גודל הפתרון לפרופורציה של חצי מקשתות הגרף. לכן כאשר מספר העמודות ומספר השורות ישאף לאינסוף, ישאף גודל הפתרון לפרופורציה של חצי מהפתרון האופטימלי.

אלגוריתם שבוחר בכל שלב לקצה צומת בעל max(dout/din,din/dout) עלול לתת בצוע רע. ההוכחה על-ידי דוגמא:הצמתים מחולקים לעמודות, מכל צומת יוצאות קשתות לכל הצמתים בעמודה שמימינה, מהצמתים שבעמודה הימנית ביותר יוצאות קשתות לכל הצמתים שבעמודה השמאלית ביותר. כאשר מספר העמודות ואורכן ישאף לאינסוף ישאף הפתרון האופטימלי בפרופורציה לגודל כל הגרף, ואילו האלגוריתם עלול לתת פרופורציה של חצי מקשתות הגרף. אמחיש זאת על-ידי שרטוט של מלבן של 4 על 8 צמתים. המספור אומר לאיזה מקום נבחר הצומת על-ידי האלגוריתם.

x(1)	x(2)	x(3)	x(5)
x(7)	x(9)	x(4)	x(6)
x(8)	x(10)	x(11)	x(13)
x(15)	x(17)	x(12)	x(14)
x(16)	x(18)	x(19)	x(21)
x(23)	x(25)	x(20)	x(22)
x(24)	x(26)	x(27)	x(29)
x(31)	x(32)	x(28)	x(30)

<u>אלגוריתמים למציאת גרף א-ציקלי בעל גודל גדול באמצעות חפוש מקומי</u>

אלגוריתם שמוצא מיקום חדש של צומת ביחס לאחרים שביינהם נשמר הסדר, מבטיח 0.5 מקשתות הגרף. ההוכחה בדרך השלילה. נניח שהטענה אינה נכונה, אז יש צומת שדרגתו בתת הגרף קטנה מחצי דרגתו בגרף. אפשר למקם אותו בקצוות. באחד מהם תהיה דרגתו שווה לפחות לחצי דרגתו בגרף. מכיוון שלא פגענו בקשתות שבין יתר הצמתים, שפרנו את הפתרון וזאת סתירה לכך שהפתרון היה מקסימום מקומי שנתן פחות מחצי קשתות

הגרף. אבל אלגוריתם זה לא נותן יותר מחצי אסימפטוטי ממספר קשתות אופטימלי. ההוכחה על-ידי דוגמא: נניח שיש מספר של הצמתים מ 1 עד n . לכל צומת יש כניסה מהעוקב לו. הסידור הבא הוא מקסימום מקומי (כאשר הקשתות הקימות בפרמוטציה מסומנות).

$2 \rightarrow 1 \quad 4 \rightarrow 3 \quad 6 \rightarrow 5 \quad 8 \rightarrow 7 \quad 10 \rightarrow 9$

<u>אלגוריתם לחפוש מקומי באמצעות החלפת מיקום של שני צמתים</u>

אלגוריתם זה נותן לפחות חצי ממספר קשתות הגרף. ההוכחה היא על-ידי כך שמראים שהפרמוטציה ההפוכה לפתרון מקומי פחות טובה מהפתרון המקומי. את הפרמוטציה ההפוכה נקבל לאחר $n/2$ שינויים שכל אחד מהם לא מועיל. בשלב הראשון נחליף מיקום בין שני הקיצונים ובשלב ה i נחליף מיקום בין שני אלה שעומדים במרחק i מהקצה. כל שינוי בזה לא היה כדאי בהתחלה ואין השפעה לקודמיו על כדאיותו.

אוכיח שכל שינוי מקום של k (מספר קבוע) של צמתים לא מבטיח יותר מיחס השואף ברצוננו לחצי של קשתות הגרף.

ההוכחה על-ידי דוגמא שיש לה דמיון לדוגמא שכבר הוצגה: נתונות n קבוצות בנות m $(m>k)$ צמתים כל אחת. מכל צומת בקבוצה i יש יציאות לצמתים בקבוצה $i-1$ עבור $n+1>i>1$.

מכל צומת ששיכת לקבוצה i זוגית יש יציאות לכל m הצמתים ב $i-1$, ולכל צומת ב i אי זוגי יש יציאות ל $m-k$ צמתים ב $i-1$ כאשר גם לכל צומת ב i זוגי יש כניסות מ $m-k$ צמתים ב $i+1$ אי זוגי.

אם כל הצמתים מאותה קבוצה נמצאים אחד על-יד השני וסדר נתון של הקבוצות הוא

2 1 4 3 6 5 8 7 10 9

יהיה צריך להזיז לפחות k צמתים מקבוצה בעלת מספר אי-זוגי, כדי להרוויח קשתות. גודל הפתרון ישאף בפרופורציה לחצי מקשתות הגרף כאשר n ו $m-k$ ישאפו לאינסוף.

<u>אלגוריתם רנדומי</u>

אפשר לבנות את הגרף הא-ציקלי בשלבים כך שבכל שלב ממקמים צומת בקצה של הפרמוטציה של הצמתים שעדיין לא מוקמו. כך אפשר לקבל את יותר מחצי מהקשתות של צומת אם היחס בין דרגת הכניסה שלו לדרגת היציאה שונה מאחד.
יש בעיה כפי שהראיתי, כאשר עבור כל צומת דרגת הכניסה קרובה לדרגת היציאה.

אציע אלגוריתם שנותן תוצאה של יותר מחצי מקשתות הגרף גם במקרה זה, אם כי הוא עלול לתת פרופורציה ששואפת לחצי כאשר הדרגה הממוצעת גדולה.

אם נחלק את קבוצת הצמתים לשתי קבוצות זרות, באופן שלכל צומת יהיה סכוי של 0.5 להכנס לכל אחת משתי הקבוצות, עשוי להיוצר פער בין דרגת הכניסה לדרגת היציאה של צומת, כאשר מסתכלים על הקשתות שלו המחוברות לצמתים באותה קבוצה. כך נוכל לסדר את הצמתים בתוך כל קבוצה באופן שנשמור על יותר מחצי מהקשתות שבתוך הקבוצות. אם ניחס כל קשת לזה מבין הצמתים שבקצוותיה בעל אינדקס יותר נמוך מהשני, יהיה הרווח שמעבר לחצי קשתות הגרף שווה לסכום הרווחים בצמתים הבודדים. מספר הקשתות המחברות צומת עם צמתים שבתוך קבוצתו מתפלג בינומית ולכן הפער הממוצע בין דרגת הכניסה לדרגת היציאה יהיה בסדר גודל של $d^{0.5}$ בצומת בעל דרגה d (הסיבה לכך היא שהערך המוחלט של ההפרש הוא משתנה מקרי אי שלילי, וקיימת איזושהי הסתברות חיובית לגבי כל אחת מבין דרגות הכניסה והיציאה שתהיה גדולה מתוחלתה ביותר מ $a\cdot d^{0.5}$ והשניה תהיה קטנה מתוחלתה ביותר מ $b\cdot d^{0.5}$ עבור איזשהם a ו b קבועים חיוביים בלתי תלויים ב d). הדרגה של צומת במובן לא יותר גדולה מהדרגה המקסימלית בגרף, לכן בצומת מסוים נוכל לקבל בממוצע בלפחות סדר גודל של $1/(d_{max})^{0.5}$ יותר מחצי מהקשתות שלו שבתוך קבוצתו, אם נמקם אותו בקצה של קבוצתו. אחרי שנמקם צמתים בעלי אינדקס נמוך בקצה של קבוצתם, יהיה ממוצע הערך המוחלט של הפרש דרגת הכניסה והיציאה בצומת בעל דרגה d בתת הגרף שנותר אחר הוצאת הצמתים וקשתותיהם, שווה לפחות ל $d^{0.5}$. לכן נוכל על-ידי מיקום צומת בקצה, של תת הגרף הנותר, לקבל רווח שהוא בסדר גודל של $1/d^{0.5}$. ויחס זה לא יכול להיות רע מ $1/(d_{max})^{0.5}$.

נוכל לקבל רווח שיהיה בסדר גודל של $1/(d_{max})^{0.5}$ מקשתות הקבוצה.
פרופורצית מספר הקשתות בתוך הקבוצות מכלל קשתות הגרף תהיה בממוצע 0.5 .
מכיוון שנוכל לקבל את לפחות חצי מהקשתות שבין הקבוצות על-ידי כך שנמקם את שתי הקבוצות אחת אחר השניה בסדר המתאים, הרי שנוכל לקבל מספר קשתות שמתנהג כמו $1/(d_{max})^{0.5}$ מעבר לחצי מקשתות הגרף.

<u>הערות:</u>

1) האלגוריתם כפי שתואר משיג את החסם בגרף שבו אין שני צמתים המחוברים בקשתות בשני הכיוונים, אחרת ספית התקן של ההפרש בין דרגת כניסה לדרגת יציאה בתוך כל קבוצה עלול להיות אפסי. <u>דוגמא</u>: הגרף השלם K_n . קרוב לא פחות טוב ניתן לקבל בכל מקרה מכיוון שאם קיימים שני צמתים המחוברים בשני הכיוונים, אפשר לבחור מספר אופטימלי של קשתות מבין שתי הקשתות המחברות אותם. כאשר בשלב ראשון נפעיל את האלגוריתם על גרף שבו לא יהיו הקשתות האלה ואחרכך אפשר תמיד להוסיף את אחת משתי הקשתות.

2) בכל צומת בגרף אפשר להרוויח בממוצע לפחות סדר גודל של קשת מעבר לחצי מקשתות הצומת. כך אפשר להרוויח בממוצע סדר גודל של $1/M$ מקשתות הגרף כאשר M מיצג את הדרגה הממוצעת בגרף. חסם זה עשוי להיות יותר טוב מ $1/(d_{max})^{0.5}$, למשל בגרף בעל דרגה ממוצעת חסומה.

3) בצומת בעל דרגה d ניתן לקבל פרופורציה של $1/(d)^{0.5}$ יותר מחצי מהקשתות.
לכן בצמתים בעלי דרגה נמוכה ניתן לקבל פרופורציה יותר גדולה של הקשתות. לכן אם נחלק את כל צמתי הגרף לשתי הקבוצות ,נמקם כל צומת לפני הצמתים בעלי דרגות יותר גבוהות וניחס לכל צומת את כל קשתותיו המחברות אותו לצמתים בעלי דרגה יותר גבוהה נוכל לקבל פרופורציה שמתנהגת כמו $1/(r)^{0.5}$ יותר מחצי מקשתות הגרף, כאשר r הינו הדרגה המינימלית הגדולה ביותר המתקבלת בתת גרף הנותר לאחר הוצאת קבוצה של צמתים, שאין בגרף המקורי צמתים בעלי דרגה יותר נמוכה שלא נכללים בה.

<u>דוגמא</u>: בגרף בעל צומת אחד בעל דרגה גבוהה בהרבה מיתר הצמתים, הקירוב יהיה רק פונקציה של יתר הדרגות.

אלגוריתם דטרמיניסטי

כפי שהראיתי אפשר על-ידי חלוקה לקבוצות זרות לקבל בממוצע $c/(d_{max})^{0.5}$ יותר מחצי מקשתות הגרף, כאשר c הוא קבוע. לכן יש חלוקה שנותנת רווח כזה.
נמקם כל צומת באחת משתי הקבוצות. כאשר הצמתים ימוקמו צומת אחר צומת בסדר כלשהו.
כל קשת תיוחס רק לזה מבין הצמתים שבקצוותיה שממוקם לפני השני.

בכל שלב ניתן למקם צומת באחת הקבוצות ולשמור על תוחלת הרווח בכל הגרף, מכיוון שתוחלת הרווח היא הממוצע של תוחלת הרווח, אם הצומת יכנס לקבוצה הראשונה או השניה.
תהליך המיקום יבוצע על-ידי הכנסת צומת לקבוצה בה יהיה הרווח גדול יותר.
בחישוב תוחלת הרווח עבור צומת, יש להביא בחשבון את הקשתות הנכנסות והיוצאות שכבר קבועות בגלל שהן יוצאות מצמתים שכבר מוקמו ואת הקשתות הנכנסות והיוצאות שעדיין לא קבועות וקיימות בהסתברות 0.5 .

תוחלת הרווח בצומת בודד שכבר מוקם יהיה: $E(\hat{d}_{in}-\hat{d}_{out},d_{in},d_{out})$

ותוחלת הרווח עבור צומת שעדיין לא מוקם יהיה: $E(0,d_{in},d_{out})$

כאשר בשני המקרים d_{in} ו d_{out} מיצגים קשרים לצמתים שעדיין לא מוקמו
ו $\hat{d}_{in}$ ו $\hat{d}_{out}$ מיצגים קשרים של צמתים שכבר מוקמו.

הפונקציה E מוגדרת עבור סדר גודל של $(d_{max})^3$ איברים. היא תחושב בתחילת ביצוע האלגוריתם, עבור כל הערכים באופן הרקורסיבי הבא :

$$E(x,0,0)=0.5\cdot|x|$$

$$E(x,y,0)=0.5\cdot E(x+1,y-1,0)+0.5\cdot E(x,y-1,0)$$

$$E(x,y,z)=0.5\cdot E(x,y,z-1)+0.5\cdot E(x-1,y,z-1)$$

y,z מקבלים ערכים שלמים חיובים, x מקבל ערכים שלמים.
החישוב הרקורסיבי יכול להתבצע על-ידי חישוב $E(x,y,0)$ ל y קבוע וכל ערכי x כשמתחילים עם $y=0$ אחר-כך $y=1$ וכך הלאה. $E(x,y,z)$ מחושב עבור z קבוע וכל ערכי x,y כשמתחילים עם $z=1$ אחר-כך $z=2$ וכך הלאה.
ערכים אלה יישמרו בטבלה.

בכל שלב יש לדעת את תוחלת הרווח הכללית. היא מורכבת מסכום תוחלות הרווח. יש לעדכן את תוחלת הרווח בצמתים שיש לצומת, שממוקם בשלב זה, קשת אליהם. ולעדכן את סכום התוחלות בגרף כולו.

<u>סיבוכיות:</u>

סיבוכיות הכנת הטבלה היא $(d_{max})^3$.

בשלב השני יש לעדכן תוחלות רווח מספר פעמים שהוא כמספר הקשתות.

לכן סיבוכיות האלגוריתם היא: $O((d_{max})^3+|e|)$.

13

אלגוריתם מקורב יעיל לגרף מישורי

לגבי גרף מישורי ידוע אלגוריתם אופטימלי למציאת גרף א-ציקלי מקסימלי, שסיבוכיותו n^3 כאשר n מיצג את מספר הצמתים בגרף [G].

כאן אציע אלגוריתם מקורב, בעל סיבוכיות לינארית, לגרף מישורי שבו הדרגה המינימלית של הצמתים היא לפחות 3.

בגרף כזה ידוע שקיים זיווג בגודל של $n/3$ קשתות, כאשר שוב n מיצג את מספר הצמתים בגרף [NB], [NC]. מזה נובע שכל זיווג שאינו מוכל באחר הוא בגודל של $n/6$ קשתות.

זיווג כזה אפשר למצוא בזמן לינארי בדרך חמדנית, זאת אומרת על-ידי כך שנזווג צמתים כל עוד זה אפשרי בלי לזווג צמתים שכבר זווגו. אחרי שנסים את תהליך הזיווג נקבע שהקשתות של הזיווג יהיו חלק מהגרף הא-ציקלי, על-ידי כך שנאחד כל זוג צמתים מזווג לצומת אחד שממנו יכנסו ויצאו קשתות לכל צומת במספר הקשתות שנכנסו ויצאו אל אותו צומת משני הצמתים המקוריים. בגרף שיתקבל נבנה פרמוטציה אקראית ונבחר את זאת, מבינה וההפוכה לה, שבה יותר קשתות. כך נוכל לקבל לפחות את חצי מהקשתות של הגרף שהתקבל, שהן חלק מהקשתות של הגרף המקורי. נוכל להעביר את כל הקשתות שנבחרו בתהליך זה גם בגרף המקורי. קשתות אלה מהוות קבוצה חלקית של קשתות הגרף המקורי. נוכל להוסיף את יתר קשתות הגרף המקורי, שהן קשתות הזיווג, מבלי שיתקבלו מעגלים. כך נבחר לפחות את מחצית קבוצה חלקית של קשתות הגרף, ומהיתר את כולן, ובסך הכל יותר מחצי מקשתות הגרף. הזיווג הוא של לפחות $n/6$ קשתות כאשר בגרף מישורי יש לא יותר מ $3 \cdot n$ קשתות. חישוב חסם תחתון לפרופרצית מספר הקשתות שיבחרו מסך מספר קשתות הגרף יתן

$$(n/6)/(3 \cdot n)+0.5 \cdot (1-(n/6)/(3 \cdot n))=19/36$$

<u>הערה:</u>

אם לקשתות יש משקל, אלגוריתם זה לא מבטיח את יותר מחצי סכום המשקולות של הקשתות, מכיון שהזיווג שקיומו מובטח, בתנאי שהדרגה המינימלית היא לפחות 3, עלול להיות בעל סכום משקולות לא משמעותי.

⇐ אלגוריתם הדה-רנדומיזציה נותן ~~[illegible]~~ אבל נותן ליחס לכל קשת
מציאה מהבעיות שלה שהוכיח, לאו דווקא לבעיות שבגרף. מאחר ובגרף מישורי יש צומת
עם דרגה ≤5 שאם לו את הקשתות, נמחק אותו ונמשיך כך. בחזרה נכניס ונוסיף לכל
צומת ~~[illegible]~~ עד 5 קשתות. לכן הקירוב הוא [illegible]

הערכת ביצועי אלגוריתם על גרף אקראי

גרף אקראי בו לכל קשת יש הסתברות p, $0<p<1$.

פתרון מקורב בו ניקח פרמוטציה ואת הפרמוטציה ההפוכה, ונבחר את הטובה מהשתיים, יתן לפחות את חצי מקשתות הגרף כמו בכל גרף.

אוכיח שפתרון אופטימלי לא יתן, כמעט תמיד, יותר מ $0.5+a$ מקשתות הגרף עבור כל a, כאשר גודל הגרף שואף לאינסוף. לכן הפתרון המקורב יתן כמעט תמיד פרופורציה ששואפת ל 1 של הפתרון האופטימלי.

מהצומת i שנבחר להיות ראשון $(d_{out_i}-d_{in_i})/2$ זה הרווח שנוכל להרוויח מעל לחצי מהקשתות שיוצאות ממנו. $E(d_{out_i}-d_{in_i})=0$. נראה שההסתברות ש $(d_{out_i}-d_{in_i})>c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$ עבור c מסוים שואפת לאפס כך שגם אם ננסה להעמיד כל צומת אפשרי, יש n אפשרויות כמספר הצמתים בגרף, נקבל שכמעט תמיד יהיה הרווח קטן מ $c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$. אם ההסתברות שהרווח עבור צומת i יהיה גדול מ $c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$ קטנה מ b אז ההסתברות שעבור איזשהו צומת יהיה גדול מ $c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$ קטנה מ $b\cdot n$. אחרי שמיקמנו צומת אחד נותר לנו לסדר פחות צמתים. שוב תהיה התוחלת עבור כל צומת אם הוא ימוקם בקצה שווה לאפס והשונות קטנה יותר, מכיוון שיהיו פחות צמתים ולכן סכום של פחות משתנים מקריים. לכן ההסתברות שבאיזשהו שלב יהיה לנו רווח של יותר מ $c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$ קטנה מ $b\cdot n^2$. ולכן כל שנותר להוכיח זה ש $b\cdot n^2$ שואף לאפס עבור כל b, כאשר n שואף לאינסוף. כאשר נבחר רווח $c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$. נחסום את ההסתברות שתהיה סטיה של בדיוק $c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$. ההסתברות לסטיה גדולה יותר קטנה מ n כפול ההסתברות לסטיה של בדיוק $c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$.

לכן ההסתברות לסטיה באיזשהו צומת של יותר מ $c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$ קטנה מ n כפול ההסתברות לסטיה של בדיוק $c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5}$.

$$E(d_{out_i}-d_{in_i})=0$$

$$VAR(d_{out_i}-d_{in_i})=2\cdot n\cdot p\cdot q<n$$

$$P((d_{out_i}-d_{in_i})=c\cdot(n\cdot \ln(n))^{0.5})<\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot e^{-\frac{c^2 n \ln n}{n}}<\frac{a}{\sqrt{n}}\cdot e^{-c^2\ln n}<\frac{a}{n^{c^2}}$$

כאשר a הוא קבוע

נבחר למשל $c=2$ ונקבל סדר גודל של $1/n^4$. וכמובן n^3/n^4 שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף.

וכך כמעט בודאות לא נרויח יותר מ $2\cdot(n\cdot\ln(n))^{0.5}$ קשתות בכל שלב, זאת אומרת שבכל השלבים לא נרוויח יותר מ $2\cdot n\cdot(n\cdot\ln(n))^{0.5}$ סך הכל. כאשר בכל הגרף יש $p\cdot n^2/2$ קשתות ולכן פרופורצית הרווח לא תעלה על $2\cdot n\cdot(n\cdot\ln(n))^{0.5}/(p\cdot n^2/2)$ שמתנהגת כמו $4\cdot(\ln(n)/n)^{0.5}$.

16

אלגוריתמים מקורבים לבעית החתך המאוזן

נתון גרף עם מספר זוגי של צמתים.

<u>המטרה:</u> למצוא חלוקה של צמתי הגרף לשתי קבוצות זרות, שוות גודל, כך שסכום המשקולות של הקשתות המחברות צמתים מאותה קבוצה, יהיה מקסימלי. (חוץ = לשני מיקבלים)

<u>טענה:</u> חפוש מקומי המבצע החלפות בין זוג צמתים מקבוצות שונות מבטיח יחס השואף ל 0.5 מסכום המשקולות של קשתות הגרף, כאשר מספר צמתי הגרף שואף לאינסוף.

נסתכל על חלוקה נתונה של הצמתים לשתי קבוצות שוות גודל.

<u>טענת עזר:</u> יש זיווג מושלם של זוגות של צמתים שבקבוצות שונות, שחלקו בסכום המשקולות של הקשתות שואף לאפס כשגודל הגרף שואף לאינסוף.

<u>הוכחת טענת העזר:</u> סכום המשקולות בזיווג אקראי הוא בממוצע $2/n$ מסכום המשקולות בגרף, כאשר n מייצג את מספר צמתי הגרף ,זאת מכיוון שכל צומת מזווג על-ידי קשת אחת מקרית מבין $n/2$ הקשתות שנוגעות בצומת. לכן קים זיווג שמשקלו לא יותר מ $2/n$ מסך המשקולות וגודל זה שואף לאפס כאשר n שואף לאינסוף.

<u>הוכחת הטענה:</u> כאשר לא כדאי להחליף את מיקומם של אף זוג צמתים, לא כדאי בפרט להחליף את מיקומם של זוג צמתים שמזווגים בזיווג שמשקלו אפסי. לכן לשני צמתים מזווגים יש בתוך הקבוצות לפחות את חצי מסכום משקולותיהם של הקשתות הנוגעות בהם בגרף המקורי חוץ מהקשת, שאולי קיימת ביניהם. ולכן לכל הזוגות המזווגים יש לפחות מחצית מסכום משקולותיהם פחות משקל הזיווג. מכיוון שמשקל הזיווג אפסי, הרי שיש להם משהו ששואף לחצי סכום המשקולות בגרף.

<u>הערות:</u>

במקרה שהגרף לא משוקלל סיבוכיות החפוש המקומי היא פולינומיאלית, זאת מכיוון שמתחילים בפתרון ששווה לפחות 0 ומסיימים בפתרון ששווה לכל היותר $n^2/4$, כאשר בכל שלב משפרים במספר שלם.

קיימות דוגמאות המראות שחשפוד בפתרון יכול לעלות מאיטרציה אחת לזאת שאחריה (אפילו במקרה הלא משוקלל).

למשל במקרה שיש קבוצה של k $(k<n/2)$ צמתים שמהווים קליק, ובנוסף אין קשתות בגרף. אם נתחיל בפתרון שבו צמתים אלה מחולקים בין שתי הקבוצות, ונתחיל לרכז צמתים בקבוצה אחת, יעלה השפור משלב לשלב.

אפילו במקרה הלא משוקלל, צומת שיעבור מקבוצה לקבוצה עלול לחזור למקור במסגרת חפוש מקומי. <u>דוגמא:</u> נניח שכל קשתות הגרף הן: בקליק שלם של $n/2$ צמתים ובנוסף קשתות מ $n/3$ מצמתים אלה לצומת בודד נוסף. אם בשלב מסוים $n/3$ צמתים אלה מרוכזים בקבוצה אחת ויתר הצמתים שלהם קשתות יהיו בצד השני, הצומת שלו קשתות רק ל $n/3$ הצמתים יעבור לקבוצה שלהם, אך בשלב מתקדם של ביצוע האלגוריתם הוא ישוב לקבוצת המקור שלו.
קיימת דוגמא המראה שחפוש מקומי לא נותן יותר מפרופורציה של חצי הפתרון האופטימלי. נניח שהגרף מחולק לארבעה קליקים של $n/4$ צמתים כל אחד. בנוסף יש $n/4-1$ קשתות מכל צומת ב א' לצמתים ב ג', מכל צומת ב ג' לצמתים ב א', מכל צומת ב ב' לצמתים ב ד' ומכל צומת ב ד' לצמתים ב ב'. חלוקה שבמסגרתה כל צמתי א' נמצאים יחד עם כל צמתי ב' בקבוצה אחת היא מקסימום מקומי, שבו פרופורצית מספר הקשתות שווה למחצית המספר האופטימלי.

אלגוריתם ידוע הוא חפוש מקומי בעומק משתנה של Kernighan ו Lin
אלגוריתם זה מבצע שינויים בשלבים. בכל שלב מבצעים סדרה של $n/2$ החלפות אחת אחר השניה. כל החלפה היא זו שמזיקה הכי פחות באותו שלב. כל צומת שמקומו הוחלף בסדרה זו נשאר באותו שלב במקומו החדש. חלוקת הצמתים בתום השלב היא זאת שהיתה הטובה ביותר במהלך בצוע הסדרה. אם לא הושג שפור במהלך הסדרה אז עוצרים.
אלגוריתם זה הוא טוב לפחות כמו חפוש מקומי רגיל, זאת מכיוון שאם יש החלפות משפרות אז אחת מהן תבוצע.

אלגוריתם זה עלול לא לתת יותר מחצי אסימפטוטי.

ההוכחה על-ידי דוגמא: נניח שיש שני קליקים של $n/4$ צמתים, ומכל צומת בכל קליק יש קשתות ל $n/4-1$ צמתים בקליק השני ואין יותר קשתות בגרף. פתרון אופטימלי הוא ששני הקליקים יהיו ביחד בקבוצה. עלול להיות מצב ששני הקליקים יהיו בנפרד, כל אחד בקבוצה אחת. ההחלפות שיבוצעו הן בין יתר הצמתים ורק אחר-כך יוחלפו צמתי הקליקים. בשום שלב לא תשופר פונקצית המטרה.

אלגוריתם אחר הוא למצוא זיווג מינימלי בגרף ולמקם את הזוגות שנוצרו זוג אחר זוג באופן שכל צומת יכנס לקבוצה האחרת מזאת שנכנס בן זוגו. יש שתי דרכים לחלק בני זוג, ותועדף החלוקה שבמסגרתה יהיה לקשתות שיש לבני הזוג לצמתים שכבר מוקמו, משקל יותר גדול.

טענה: אלגוריתם זה נותן יחס השואף לחצי סכום המשקולות בגרף וזה נכון גם לגבי גרף שבו לקשתות משקולות שונים.

הוכחה: שוב יהיה לזיווג משקל אפסי, כאשר גודל הגרף ישאף לאינסוף. אם ניחס כל קשת לזה מבין הצמתים שבקצוותיה שממוקם אחרי האחר, אז נוכל לראות שנקבל את לפחות חצי מסכום המשקולות של הקשתות שיוצאות משני בני זוג לצמתים שכבר מוקמו.

טענה: אלגוריתם זה עלול לתת פרופורציה ששואפת ל 0.5 מהפתרון האופטימלי.

ההוכחה על-ידי דוגמא: נניח שיש שני קליקים של $n/2$ צמתים שחסרים קשתות רק בין $n/4$ זוגות של צמתים. בין הקליקים אין קשתות. אם ייבחרו הזוגות כזיווג, יופרדו הקליקים ויושג רק פתרון ששואף לחצי מהאופטימלי כאשר n שואף לאינסוף.

אלגוריתם זה הוא פולינומיאלי גם במקרה המשוקלל.

סיבוכיות: סיבוכיות ההכנסה לקבוצות של הזוגות היא בסדר גודל של מספר הקשתות, זאת מכיוון שבזמן ההכנסה מסתכלים רק על הקשתות שיש לצמתים המוכנסים. בודקים מה סכום המשקולות אל הצמתים שכבר מוקמו, ואחרי הכנסת זוג מעדכנים את סכום המשקולות לקבוצות השונות בצמתים שעדיין לא מוקמו.

זיווג במשקל של $1/(p-1)$ ניתן לבצע בזמן שהוא בסדר גודל של $n \cdot p^2$ על-ידי חלוקה לקבוצות זרות בנות p צמתים כל אחת. יהיו n/p קבוצות ובכל אחת סיבוכיות מציאת זיווג מינימלי היא בסדר גודל של p^3.

לכן ניתן להשיג פרופורציה של $(0.5-1/p)$ מסכום המשקולות בסיבוכיות $O(m+n \cdot p^2)$.

טענה: אלגוריתם המבוצע על-ידי חלוקת הגרף ל k קבוצות זרות שוות גודל (k קבוע) וממקם את כל בני אותה קבוצה באותו חלק של $n/2$, באופן שיתן מקסימום של משקל הקשתות בתוך הקבוצות, מבטיח יחס השואף לחצי מסכום המשקולות של הגרף, כאשר k שואף לאינסוף.

הוכחה: בחלוקה אקראית של k הקבוצות בין שני חלקי הגרף נקבל את כל הקשתות שבתוך הקבוצות ובממוצע יחס השואף ל 0.5 ($(k-1)/(2\cdot k)$) מסכום המשקולות שבין שתי קבוצות, מכיוון שכאשר k מספיק גדול יהיה לקשת שבין שתי קבוצות סכוי ששואף ל 0.5 להכלל בפתרון. לכן פתרון שיבוצע על-ידי חלוקה אקראית של הקבוצות יתן בממוצע יחס השואף לפחות ל 0.5 מסכום המשקולות. במובן שיש פתרון שיתן את היחס הממוצע.

אלגוריתם שלא מבטיח יחס של 0.5 מפתרון אופטימלי

אלגוריתם הממלא תחילה קבוצה של $n/2$ באופן חמדני, כלומר מכניס בכל שלב צומת שיש לו את המספר המקסימלי של קשתות לצמתים שבקבוצה, לא נותן חסם קבוע של יחס השגיאה, אפילו לא בגרף לא משוקלל.

נניח שיש צומת ממנו יש יציאות ל $n/2-k-1$ צמתים $(1<<k<<n)$, $(n>>k>>1)$, שאין להם עוד קשתות, בנוסף לעוד k צמתים שמהווים קליק ומכל אחד מהם יוצאות קשתות לכל אחד מיתר $n/2$ צמתי הגרף ואלה כל קשתות הגרף. אם נמקם תחילה את הצומת בעל הדרגה המקסימלית, נכניס לקבוצתו את הקבוצה של $n/2-k-1$ הצמתים אחר-כך נכניס את k הצמתים, נקבל פתרון שהוא בסדר גודל של k^2+n קשתות בזמן שהפתרון האופטימלי הוא בסדר גודל של $n\cdot k$.

20

בעית ביסוי של גרף אינטרולים

נתונים קטעים סגורים על הישר. יש לבחור אוסף מינימלי של נקודות כך שעל כל אחד מהקטעים תהיה לפחות נקודה אחת.

לבעיה זאת יש פתרון אופטימלי, יעיל וידוע, שאסביר אותו כאן בקיצור:

כאשר נותרה קבוצה של ישרים בלתי מכוסים, יש לבחור את הנקודה הימנית/שמאלית ביותר האפשרית, שמכסה את כל הקטעים שמשמאלה/ימינה מכיוון שהיא בוודאי טובה לפחות כמו נקודה שיותר קרובה לקצה, ומצד שני חיוני לבחור אותה או נקודה שיותר קרובה לקצה.

כאן אנתח אלגוריתם אחר שאינו אופטימלי.

אלגוריתם שבוחר בכל שלב נקודה שאין נקודה אחרת שמכסה את כל הקטעים שהיא מכסה, ועוד קטעים נוספים שהיא אינה מכסה, זאת אומרת, שאם נסתכל על גרף שבו צומת מייצג קטע, ושני צמתים מחוברים בקשת, אם לקטעים שהם מייצגים יש חיתוך לא ריק, אז הוא בוחר בכל שלב קליק של קטעים שאינו מוכל ממש בקליק אחר.

<u>טענה:</u> האלגוריתם הזה לא יבחר ביותר מפי שניים ממספר הנקודות המינימלי.

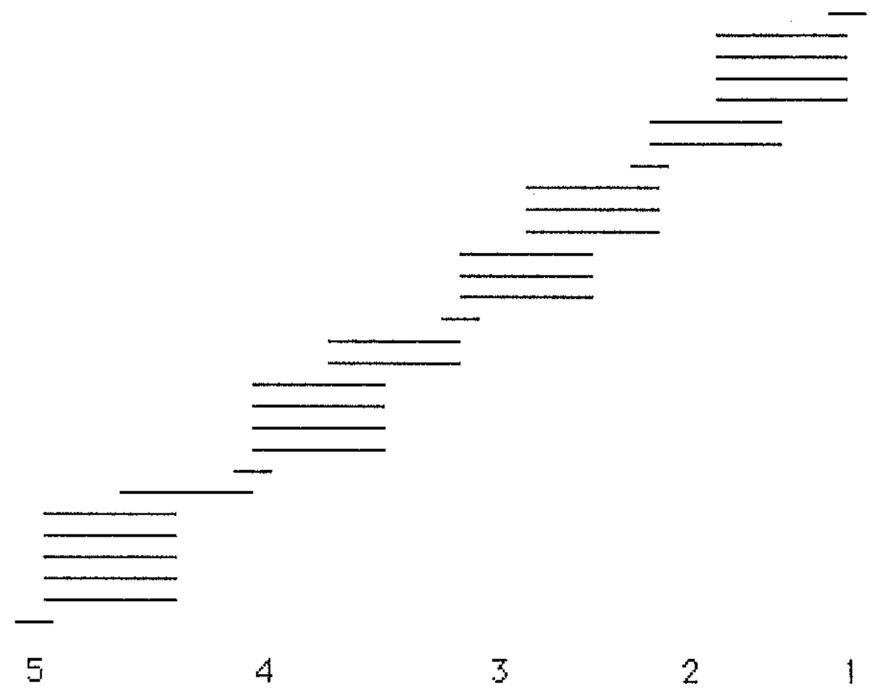
נוכיח את הטענה על-ידי כך שנראה שבין שתי נקודות שהן בפתרון האופטימלי תבחר לכל היותר נקודה אחת מיותרת ושתיים נוספות, שאולי מזדהות באופן חלקי או מלא עם השתיים האופטימליות, יכסו את כל הקטעים שכוסו על-ידי שתי הנקודות האופטימליות.

<u>הוכחה:</u>נקרא לנקודות אופטימליות סמוכות 1 ו 2. אם תבחר נקודה בין 1 ל 2 נקרא לה 3. אין קטעים ששני קצותיהם בפנים האינטרול בין 1 ל 2. בפרט אין קטע שקצותיו בין 1 ל-3. לכן 1 מכסה את כל הקטעים שלא כוסו על-ידי 3 ושיכולים להיות מכוסים על-ידי נקודה נוספת שממוקמת בין 1 ל-3. לכן אם האלגוריתם יבחר נקודה בזאת היא תכסה בדיוק את כל הקטעים שמכוסים על-ידי 1. לכן היא חייבת לבלול את כל הקטעים שעוברים ב 1. באופן דומה נקודה שתבחר בין 2 ל 3 חיבת לכסות בדיוק את הקטעים שעוברים ב 2.

אבל אלגוריתם זה עלול לבחור מספר גדול מדי של נקודות. אוכיח שאפילו מקרה פרטי שלו, אלגוריתם שבוחר בנקודה עליה עוברים מקסימום מוחלט של קטעים ובכל אטרציה מסלק את הקטעים שעליהם נבחרה כבר נקודה ומחפש נקודה חדשה שבה עוברים מקסימום קטעים שנותרו, הוא לא אופטימלי והוא עלול לבחור מספר השואף לפי שניים ממספר הנקודות החיוניות.

ההוכחה על-ידי דוגמא:

נתונות נקודות $i=1,...,n$ עבור כל $0<i<n$ יש $n-i$ קטעים מסוג $[i,i+0.7]$ בנוסף עבור כל $1<i<n+1$ יש $i-1$ קטעים מסוג $[i-0.7,i]$ ובנוסף יש עבור כל $0<i<n+1$ קטע אחד מסוג $[i-0.1,i+0.1]$. האלגוריתם שתואר עלול לבחור למשל בכל הנקודות $i+0.5$ עבור כל $0<i<n$ ורק אחרכך בכל הנקודות i עבור כל $0<i<n+1$. במקום להסתפק בנקודות i. כך כאשר n ישאף לאינסוף נקבל מספר כפול ממספר הנקודות האופטימלי.



לא ניתן להבטיח את החסם לגבי גרף כללי. אם נרצה לכסות גרף על-ידי קליקים ונבחר בכל שלב קליק שלא מוכל באף קליק אחר, אנו עלולים לקבל כיסוי על ידי מספר הגדול פי $n/4$ מהכיסוי המינימלי, כאשר n מיצג את מספר צמתי הגרף. ההוכחה על-ידי דוגמא. נתונים שני קליקים של $n/2$ צמתים. אחד של צמתים $1,...,n/2$ ושני של היתר, ובנוסף קשתות בין כל i ל-$i+n/2$ עבור כל $0<i<n/2+1$. קשת המחברת בין i ל- $i+n/2$ מהווה קליק שלא מוכל באף קליק אחר ולכן עלולים לקבל כיסוי על-ידי $n/2$ זוגות במקום על-ידי שני קליקים גדולים.

גם כאשר לכל נקודה יש משקל שונה יש אלגוריתם אופטימלי ידוע.

אסביר אותו כאן בקיצור:

F_n -פתרון בעיה של החלק מ-n שמאלה כאשר הנקודה n+1 נבחרה. l_n-הנקודה השמאלית ביותר שיכולה להיות הנקודה הימנית קיצונית בפתרון בעיה F_n. w_k-משקל נקודה k.

$$F_n=MIN_{n+1>k>l_n-1}\ \{w_k+F_{k-1}\}$$

אבל אדבר על אלגוריתם הדומה לזה שפותר באופן מקורב את הבעיה לגבי המקרה שאין משקולות.

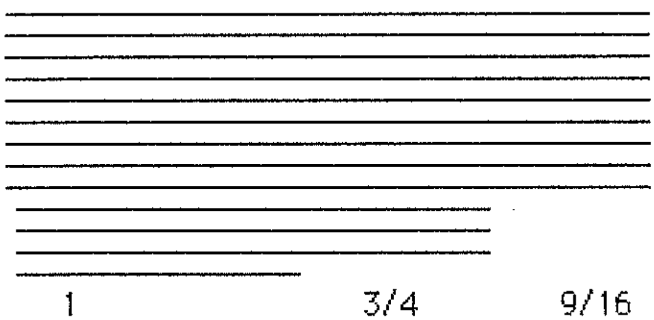
האלגוריתם שבוחר בכל שלב נקודה בה מתקבל היחס המקסימלי בין מספר הקטעים שעוברים בה ושעדין נותרו לבין משקלה, עלול לתת ביצוע בכל יחס רע, ההוכחה על-ידי דוגמא שתוסבר.

נניח שכל הקטעים יוצאים מהנקודה השמאלית ביותר, שהיא הנקודה ה-n-ית בספירה מימין. ולכל נקודה m בספירה מימין מגיעים $\sum_{n-m}^{n} A^i$ קטעים. המשקולות הן $(A/(A+1))^{n-m}$. במקרה זה תבחר הנקודה הימנית ביותר ראשונה, ובכל שלב תבחר הנקודה הימנית ביותר שנותרה ,מכיוון שכאשר הנקודה הימנית ביותר שנשארה היא m יהיו בה A^{n-m} קטעים ובנקודה m1 שבמרחק כלשהו משמאלה יהיו $\sum_{n-m1}^{n-m} A^i$ קטעים.

היחס $A^{n-m}/\sum_{n-m1}^{n-m} A^i$ לא קטן מיחס המשקולות ולכן היא יכולה להבחר לפני כל האחרות. בסופו של התהליך, במקום לבחור בצומת השמאלי ביותר , שמשקלו 1, נבחר בכל n הנקודות וסכום המשקולות יהיה $\sum_{0}^{n} (A/(A+1))^i$.באשר נגדיל את A ואת n לאינסוף נקבל ביטוי הגדול כרצוננו.

קשה לתת שרטוט שבו יחס הביצועים יהיה גרוע מאוד, בגלל הצורך לבחור A ו n גדולים מאוד, אבל אסתפק בדוגמא שבה היחס עולה על 2 , מה שלא יכול לקרות במקרה שלנקודות אין משקולות.

ישנן שלוש נקודות בנקודה השמאלית עוברים 13 קוים בנקודה השניה 12 ובשלישית 9. המשקולות הן 1 , 3/4 ו 9/16 בהתאמה. בשלב הראשון תבחר השלישית ואחרכך עלולה להבחר השניה.



ביבליוגרפיה

[BS] B.Berger and P.W.Shore, "Approximation algorithms for the maximum acyclic subgraph problem",Proc.of the First Annual ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, 236-243, SIAM, Philadelphia, 1990.

[FK] T.A.Feo and M.Khellaf, "A class of bounded agorithms for graph partitioning", Networks 20, 181-195, 1990.

[G] H.N.Gabow, "A representation for crossing set families with applications to submodular flow problems", 1992.

[GJS] M.R.Garey, D.S.Johnson and Stockmeyer, "Some simplified NP-complete graph problem", Theoretical Computer Science 1, 237-267, 1976.

[K] B. Korte, "Approximation algorithms for discrete optimization problems", Annals of Discrete Mathematics 4 85-120 1979.

[KH] B. Korte and D.Hausmann, "An analysis of the greedy heuristic for independence systems", Annals of Discrete Mathematics 2, 65-74, 1978.

[KL] B.Kernighan and S.Lin, "An efficent heuristic procedure for partitioning graphs" Bell systems Tech. J.49, 291-307, 1972.

[Kp] R.M.Karp, "Reducbility among combinatorial problems", pp. 85-103 in Complexity of Computer Computations R.E.Miller and J.W.Thatcher, Eds. Plenum, New York, 1972.

[NB] T.Nishizeki and I.Baybars, "Lower bounds on the cardinality of the maximum matching of planar graphs", Discrete Math. 28, 255-267, 1979.

[NC] T.nishizeki and N.Ciba, Planar Graphs: Theory and Algorithms,Annals of Discrete Mathematics 32, North Holland.