

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש דיימונד ובברלי סאקלר

גרפים k קשירים וגרפים הניתנים לחלוקה ל- k עצים פורשים זרים

חיבור על מחקר לשם מילוי חלקי של הדרישות
לקבלת תואר שני באוניברסיטת תל-אביב

אוניברסיטת תל-אביב
בית הספר למדעי המתמטיקה
המחלקה לסטטיסטיקה וחקר ביצועים

אסף לרין

עבודת המחקר בתיזה זו הונחתה
ע"י פרופ. רפאל חסין

טבת תשנ"ח ינואר 1998

ברצוני להודות לפרופ. רפאל חסין על תמיכתו, סבלנותו ועל נכונותו לעזור בכל עת.

תקציר

משפחת הגרפים, שהם איחוד זר של k עצים פורשים, מהווה מטרואיד, שהוא סכום של מטרואידים גרפים מעל קבוצת הצמתים. בעבודה זו אני מציג תוצאות הקשורות למשפחה זו. כמו כן מוצגות תוצאות הקושרות את המשפחה דלעיל ומשפחת הגרפים ה- k קשירים בקשתות. תוצאות אלו משמשות להצגת אלגוריתם קירוב לבעיה של מציאת תת-גרף 3 קשיר בקשתות של גרף (לא מכוון) שלם, כאשר פונקצית העלויות מקיימת את אי-שיויון המשולש.

Tel-Aviv University
Raymond and Beverly Sackler Faculty of exact sciences

**Graphs which are k -connected and Graphs Decomposable
into k Disjoint Spanning Trees**

Thesis submitted in partial fulfillment of graduation requirements
for the degree of M.Sc. in Tel-Aviv University

By
Asaf Levin

The research work in this thesis has been conducted
under the supervision of Prof. Refael Hassin

January 1998

Acknowledge

I would like to thank Prof. Refael Hassin for his support, patience and for always making himself available for me.

Contents

1	Introduction	4
2	Main results	4
3	The structure of a union of k forests	6
4	The structure of the 3-connected components multigraph, $CG(G)$	10
5	Minimum cost union of 2 disjoint spanning trees and a minimum cost spanning tree	13
6	A 2-connected subgraph and a subgraph decomposable into two forests	16
7	Augmenting a 3-connected graph into a graph containing two disjoint spanning trees.	20
8	A minimum cost 3-connected subgraph and a minimum cost union of 2 disjoint spanning trees	23
9	Minimum tight partitions of a union of two disjoint spanning trees	27
10	A minimal 3-connected graph which is not a union of two forests	31
11	Augmenting a union of 2 trees into a 3-connected graph	34
12	Augmenting a k -connected graph into a $(k + 1)$ -connected graph	35
13	The maximum cost of a spanning tree of a minimum cost	

3-connected subgraph	37
14 The size of the leaf set of a tree	39
15 Greedy aspects of the sum matroid	40
16 An algorithm for the minimum cost 3-connected subgraph problem	43
17 Polynomial time implementation	46
18 Bad examples for the approximation algorithm.	47
19 Extension of previous results to a design problem	49
20 Graphs decomposable into a spanning tree and a disjoint matching	52

Graphs which are k -connected and Graph Decomposable into k Disjoint Spanning Trees

Abstract: We describe some properties of the family of graphs which are a disjoint union of k spanning trees, and of the family of graph which are k -edge connected. We also explore some relations between these two families. We use these properties to describe approximation algorithms for the problem of finding a minimum cost 3-connected subgraph of an undirected graph in which the cost function satisfies the triangle inequality.