

אוניברסיטת תל-אביב
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד וברלי סאקלר

הגדלת הקשירות של גרף על-ידי כיווץ והיפוך קשתות

חיבור זה הוגש כחלק מהדרישות לקבלת התואר
"מוסמך אוניברסיטה" M.Sc. במדעי המחשב
אוניברסיטת תל-אביב
בית-ספר למדעי המתמטיקה
החוג למדעי המחשב

על-ידי
שמעון שחר

העבודה הוכנה בהזרכתו של דר' רפי חסין

אוקטובר 1997

תודה רבה לד"ר רפי חסין על ההנחיה הסבלנית, והעזרה הרבה שהעניק לי במהלך
עשיית התיזה.

תודה לד"ר אסתר ארקין על הערותיה המאירות שתרמו רבות.

תודה להורי שתמכו בי ועודדו אותי לאורך כל שלבי הלימודים.

ואחרונה, תודה מיוחדת לאשתי ולבתי על האהבה והסבלנות שבלעדיהם לא הייתי יכול
לבצע עבודה זו.

מבוא

עבודה זו דנה בבעיות בהן המטרה היא הגדלת קשירות הקשתות של גרף מכוון. חלקנו את הבעיות בהן נדון לשלוש קטיגוריות:

1. בעיות בהן ניתן להפוך קשתות קיימות בגרף.
 2. בעיות בהן ניתן לכווץ קשתות קיימות בגרף.
 3. בעיות בהן ניתן להוסיף קשתות חדשות לגרף.
- בכל אחת מן הקטיגוריות עסקנו במספר בעיות אופטימיזציה בעלות אילוצים שונים, שנבדלות בין במספר קדקודי המקור, מספר קדקודי היעד, ומספר הקשירות של הגרף המבוקש. חלוקת העבודה לפרקים נעשתה באופן הבא.
- בפרק 2 מוגדרים המושגים בהם השתמשנו, ומובאים ציטוטים של מספר משפטים חשובים בתחום.

בפרק 3 דנו בבעיות היפוך קשתות, ובבעיות אוריינטציה בגרפים לא מכוונים. בפרק זה הראינו אלגוריתם חדש לבעיה שבה יש מקור אחד ומספר קבוע של יעדים, ולבעיה שבה יש מקור אחד וכל שאר הקדקודים הנם יעדים. לעומת זאת הראינו כי אם נתיר קיבול על הקשתות, כלומר לכל קשת נקצה מספר פעמים מקסימלי בה ניתן להשתמש, תהפוכה הבעיות ל-NP-complete. לבסוף הראינו כי הבעיה של הפיכת תת-קבוצה של הגרף לקשירה חזק על-ידי היפוכים של קשתות הנה NP-complete.

בפרק 4 דנו בבעיות כוץ קשתות, כאשר כוץ של קשת מוגדר כהוספת הקשת ההפוכה לה. מובן כי כל בעיית כוץ קשתות ניתנת לניסוח כבעיית הוספת קשתות ממושקלת (על-ידי מתן משקל גדול להוספת קשתות שההפוכה להן אינה בגרף), אך באופן מפתיע מתברר כי ישנם אילוצים עבורם בעיית ההוספה היא NP-complete, ובעיית הכיוץ הנה פולינומיאלית. בפרק זה נביא הוכחה חדשה לקשר שבין בעיות כוץ לבעיות היפוך מסוימות. כמו-כן, נראה אלגוריתם המשתמש בזרימה סבמודולרית, לבעיה של מציאת k מסלולים זרים ממקור יחיד לכל קדקוד אחר בגרף.

בפרק 5 דנו בבעיות הוספה, ונציג פתרון שונה מהפתרון המוכר לבעיה של הפיכת גרף לקשיר חזק על-ידי הוספת מספר מינימלי של קשתות. בנוסף על-כך נראה אלגוריתם תכנות דינמי לבעיה של הוספת קשתות על מנת שבגרף יהיו מסלולים משני מקורות לשני יעדים בהתאמה.

בפרק 6 הראינו ייצוג של בעיית הפיכת גרף לקשיר חזק על-ידי היפוך קשתות, באמצעות תכנות מתמטי בשלמים.

פרק 7 מכיל סיכום של התוצאות המובאות בעבודה זו.

TEL-AVIV UNIVERSITY
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER
FACULTY OF EXACT SCIENCE

INCREASING GRAPH CONNECTIVITY BY EDGE REVERSAL AND CONTRACTION

This thesis was submitted in partial fulfillment of the
requirements for Master's degree (M.Sc.) in Computer Science

Tel-Aviv University
School of Mathematical Science
Department of Computer Science

Presented by
Shimon Shahar

This work was carried out under the supervision of
Doctor Rafi Hassin

October 1997

Contents

1	Introduction	2
2	Definitions and notations	4
3	Reversal and orientation problems	8
4	Contraction problems	18
5	Addition problems	33
6	An alternative solution for the contraction problem	40
7	Summary	45

1 Introduction

In this thesis we deal with arc-connectivity problems on directed graphs. We divide the problems to three categories:

1. Problems for which arc-reversal is allowed.
2. Problems for which arc-contraction is allowed.
3. Problems for which arc-addition is allowed.

For each of these categories we solve several optimization problems, which differ in their connectivity requirements. The connectivity requirements are defined by the number of sources, the number of targets and the connectivity value.

The organization of the thesis follows the categorization of the problems. Section 2 presents some definitions and theorems used in the following sections.

Section 3 deals with arc-reversal and orientation problems. We present new algorithms for problems which have one source and fixed number of targets, and one source and all the other vertices are targets. We also show NP-completeness for the problem of making a subset of V strongly connected by arc-reversal, and for single source arc reversal problem with capacities.

In Section 4 we discuss arc-contraction problems. The arc-contraction problems, are problems for which we allow adding an arc to the graph if and only if the anti-parallel arc exists in the graph. These problems are special cases of addition problems, but the reason we deal with them separately is that for some of the contraction problems there is a polynomial algorithm, even if the corresponding addition problem is NP-complete. In this section we give new proofs concerning the relation between reversal and contraction problems. We also present a new algorithm which uses submodular flow, for finding k -arc-disjoint paths from a single source to every other vertex.

Section 5 deals with addition problems. In this section we give an al-

ternative algorithm for the problem of making a graph strongly connected when the cost of addition is 1 for all the arcs. We also give a new dynamic programming algorithm for the problem with two sources and two targets.

In Section 6 we give a new formulation for the problem of making a graph strongly connected by arc-contraction. We formulate the problem as an integer mathematical programming problem.

Section 7 contains a summary of the results presented here.