אוניברסיטת תל אביב
הפקולטה למדעים מדוייקים ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
בית הספר למתמטיקה
החוג למתמטיקה עיונית

אלגוריתם חיפוש מקומי עבור בעיית החלוקה המקסימלית הבינארית למסלולים באורך 2

עבודה זו מוגשת כחלק מהדרישות לתואר מוסמך האוניברסיטה (M.Sc)

מאת
אהד שניידר

העבודה הוכנה בהנחיית פרופ׳ רפי חסין

אב תשע״ב

תקציר

יהא G גרף (לא מכוון) בעל $3l$ קודקודים. בהנתן פונקצית משקל על קשתות G, בעיית החלוקה המקסימלית הבינארית למסלולים באורך l הינה לחשב קבוצה של l מסלולים פשוטים בעלי שתי קשתות כל אחד, שהינם זרים בקודקודיהם ובעלי משקל כולל מקסימלי. הבעיה הינה NP־קשה.

במאמר זה נציג אלגוריתם חיפוש מקומי פשוט בעל זמן ריצה פולינומיאלי עבור הבעיה וננתח את ביצועיו בעומקי חיפוש שונים. עבור עומק 2, נראה כי האלגוריתם מספק יחס קירוב של 0.3333, ויחס זה הדוק. עבור עומק 3, נראה כי האלגוריתם מספק יחס קירוב של 0.4. עבור עומק 9, נראה כי האלגוריתם מספק יחס קירוב של 0.55, המהווה שיפור של היחס הידוע כיום של 0.5265.

כמו כן, נביט במקרה המיוחד בו G תת־מעוקב, קרי הדרגה המקסימלית בתת־גרף שלו הנפרש ע"י קשתות האחד היא 3. במקרה זה נראה יחס קירוב של 0.375 עבור עומק 2 ויחס קירוב של 0.5 עבור עומק 3. בנוסף, נראה כי עומק 7 מספק עבור הבטחת היחס 0.55 לעיל.

לבסוף ניתן, ע"י דוגמאות רעות, חסמים עליונים על חסמי הקירוב של האלגוריתם. עבור עומק 2 נראה חסם עליון של 0.4 במקרה התת־מעוקב. עבור עומק 3 נראה חסם עליון של 0.6, כמו גם חסם עליון של 0.7 במקרה התת־מעוקב. עבור הבעיה הכללית יותר, בה משקלי הקשתות הם אי־שליליים כלשהם, נראה חסם עליון של 0.5556 עבור עומק 3 (עבור עומק 2, החסם ההדוק של 0.3333 תקף גם לבעיה זו).

Tel Aviv University

Raymond and Beverly Sackler Faculty of Exact Sciences

The School of Mathematical Sciences

Department of Pure Mathematics

A local search algorithm for binary maximum 2-path partitioning

In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science

Thesis by

Ohad Schneider

Under the supervision of Prof. Refael Hassin

July 2012

A LOCAL SEARCH ALGORITHM FOR BINARY MAXIMUM 2-PATH PARTITIONING

REFAEL HASSIN AND OHAD SCHNEIDER

ABSTRACT. Let G be a complete (undirected) graph with $3l$ vertices. Given a binary weight function on the edges of G, the BINARY MAXIMUM 2-PATH PARTITIONING PROBLEM is to compute a set of of l vertex-disjoint simple 2-edge paths with maximum total edge weight. The problem is NP-hard [6].

In this paper we propose a simple local search algorithm with polynomial running time for the problem and analyze its performance for several search depths. For depth 2, we show that the algorithm is a 0.3333-approximation, and that the bound is tight. For depth 3, we show that the algorithm is a 0.4-approximation. For depth 9, we show that the algorithm is a 0.55-approximation, improving on the best-known 0.5265 bound for the problem.

We also consider the special case where G is subcubic, that is, the maximum degree in its subgraph induced by the unit-weight edges is 3. In this case we show that the algorithm is a 0.375-approximation for depth 2 and a 0.5-approximation for depth 3. In addition, we show that depth 7 is sufficient for the 0.55 bound guarantee.

Finally we give, by means of bad instances, upper bounds on the performance guarantees of the algorithm. For depth 2 we show a 0.4 upper bound in the subcubic case. For depth 3 we show a 0.6 upper bound, as well as a 0.7 upper bound in the subcubic case. For the general (non-negative) weight problem we show a 0.5556 upper bound for depth 3 (for depth 2, the tight 0.3333 ratio holds for this problem as well).

1. INTRODUCTION

Let $G = (V, E)$ be a complete (undirected) graph with vertex set V such that $|V| = 3l$, and edge set E. For $e \in E$ let $w(e)$ be its weight. For $E' = \{e_1, \ldots, e_k\} \subseteq E$ we denote $w(E') = w(e_1, \ldots, e_k) = \sum_{e \in E'} w(e)$. For a path p we denote $w(p) = w(E(p))$. For a set of paths $P = \{p_1, \ldots, p_k\}$ we denote $w(P) = w(p_1, \ldots, p_k) = \sum_{p \in P} w(p)$. In this paper, a *k-path* is a simple k-edge path. We say that G is *subcubic* if the maximum degree in its subgraph induced by the unit-weight edges is 3. The MAXIMUM 2-PATH PARTITIONING PROBLEM (M2PP in short) is to partition G into a set of l vertex-disjoint 2-paths with maximum total edge weight. When $w(e) \in \{0, 1\}$, the problem becomes the BINARY MAXIMUM 2-PATH PARTITIONING PROBLEM ($\text{M2PP}_{0,1}$ in short). Both problems are NP-hard [6].

1.1. Simple approximations.

An approximation bound of 0.5 for M2PP is easy to achieve. Simply build a maximum weight l-sized matching M and complete it arbitrarily to a partition P.

Claim 1. Let OPT denote an optimal solution to M2PP. We have $w(P) \geq \frac{1}{2} w(OPT)$.

Proof. Build a matching M' by taking the heavier edge from each of the paths of OPT. We have

$$w(P) \geq w(M) \geq w(M') \geq \frac{1}{2} w(OPT).$$

Key words and phrases. Analysis of algorithms, maximum path partitioning, 2-edge paths.