

1. במטרה להדק את היחסים עם מדינות העולם החליט שר החוץ לעודד טיולים מודרכים בספארי שברמת גן לחיות נבחרות מאפריקה. לשם כך, יוסעו החיות ברכבות מפוארות וקרונות מרווחים. מגבלת המשקל לקרון היא 1100 ק"ג. משקלי החיות הם: קרנף 1000 ק"ג, ג'ירף 800 ק"ג, דב 500 ק"ג, צבי 200 ק"ג, גורילה 150 ק"ג. מגבלה נוספת היא שאסור להסיע בקרון יותר משני סוגים שונים של חיות. לטיול הקרוב יגיעו 20 קרנפים, 30 ג'ירפות, 20 דובים, 40 צבאים, ו-70 גורילות. יש לתכנן את שיבוץ החיות לקרונות כך שאורך הרכבת יהיה מינימלי.

א. לנסח כבעיית חיתוך מלאי (cutting stock) תוך שימוש בתכנות לינארי, במספר מינימלי של משתנים.  
ב. בלי האילוץ על שני סוגים לכל היותר בקרון נקבל בעיית אריזה בתיבות (bin packing). ראינו לבעיה זאת אלגוריתם פשוט ביותר (Next Fit) שמבטיח שגיאה ביחס 2. לתאר את בעיית האריזה בתיבות ואת האלגוריתם ולהסביר האם יחס השגיאה ישמר כאשר האילוץ הזה נוסף, או אולי נחוץ שינוי של האלגוריתם.

2. א. לנסח את בעיית הזוג המקסימלי (הלא ממושקל) בגרף דו-צדדי  $G = (S \cup T, E)$  כבעיית תכנות לינארי.  
ב. לכתוב את הבעיה הדואלית ולנסות לתת לה הסבר.  
ג. להראות איך נובע המשפט זוג מקסימלי = כיסוי מינימלי בגרף דו-צדדי מהמשפט זרימה מקסימלית = חתך מינימלי.

3. בבעיית תכנון היצור נתונים ביקושים  $d_t$ , עלויות יצור קבועות  $K_t$  ומשתנות  $C_t$ , ועלויות אחזקת מלאי  $h_t$ ,  
· .  $t = 1, \dots, T$

אם נשאר מלאי  $I$  בסוף תקופה אז רק  $\alpha \cdot I$  מגיע לתקופה הבאה,  $\alpha < 1$ , כששאר  $(1-\alpha) \cdot I$  היחידות מתקלקלות  
ונזרקות. מותר לייצר בתקופה לכל היותר  $M$  יחידות.

א. לנסח כבעיית תכנות לינארי.

ב. לנסח כבעיית תכנות דינמי.

ג. נניח  $M = \infty$ . האם המשפט  $I \cdot X = 0$  תקף? לנמק!

4. נתון גרף מכון חסר מעגלים עם  $n$  צמתים. יש לחשב מסלול במחיר מינימלי מצומת 1 לכל צומת אחר  
(הצמתים ממוספרים כבר כך שאם  $(i,j)$  קשת בגרף אז  $i < j$ ). בנוסף למחיר המעבר הרגיל  $C_{ij}$  יש גם עלות  
תקשורת  $d_{ij}$  אם הצמתים  $i, j$  במסלול ומפריד ביניהם בדיוק צומת אחד. למשל, עלות המסלול  $(1,2,3,4)$  היא

$$C_{12} + C_{23} + C_{34} + d_{13} + d_{24}$$

א. לכתוב משוואות תכנות דינמי כולל תנאי התחלה. להסביר באופן מילולי את המשוואה הרקורסיבית. מה  
סיבוכיות החישוב?

ב. נניח שהמסלול האופטימלי לצומת  $j$  מסתיים בקשת  $(i,j)$ . האם החלק של המסלול מצומת 1 לצומת  $i$  הוא  
בהכרח מסלול אופטימלי לצומת  $i$ ? להוכיח או לתת דוגמא נגדית. מדוע שאלה מסוג זה מעניינת  
בהקשר של פתרון תכנות דינמי לבעיה?

ג. איך ישתנה הפתרון אם מדובר בגרף מכון כללי (כלומר יכול להכיל מעגלים)?