מבוא לתורת הקבוצות

מאת

משה ירדן

תל אביב, תשס"ז

תכן העניָנים

מניע

נִתן להשוות בין שתי קבוצות סופיות (למשל שתי קבוצות גפרורים) בעזרת ספירה או בעזרת זִווגים. השיטה הראשונה לא תצלח להשואת קבוצות אינסופיות. בשיטה השניה נשתמש להגדרת ההשואה.

הגדרה: נאמר ששתי קבוצות A ו B **שקולות זו לזו** אם קיֶמת התאמה חד חד ערכית מ A על B. ∎

דֻגמאות:

(א) המספרים הטבעיים והמספרים הטבעיים הזוגיים.

למספר הטבעי n מתאימים את המספר הזוגי $2n$.

אנו מקבלים בכל שקילות בין קבוצה אינסופית לבין קבוצה חלקית ממש שלה.

(ב) המספרים הטבעיים וזוגות מספרים טבעיים (שיטת האלכסון הראשונה של קנטור).

רושמים את זוגות המספרים בטבלה, שוזרים אותם על חוט אינסופי ומתאימים כל זוג למספרו הסִדּורי על החוט.

$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[dl] & (1,3) \arrow[r] & (1,4) \arrow[dl] \\
(2,1) \arrow[d] & (2,2) \arrow[ur] & (5,3) \arrow[dl] & (2,4) \arrow[d] \\
(3,1) \arrow[ur] & (3,2) \arrow[dl] & (3,3) \arrow[ur] & (3,4) \arrow[dl] \\
(4,1) \arrow[d] & (4,2) \arrow[ur] & (4,3) \arrow[dl, dotted] & \\
(5,1) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

(ג) המספרים הטבעיים וקבוצת הסְדרות הבנויות מ 0 ו 1 (שיטת האלכסון השניה של קנטור).

שתי קבוצות אלו אינן שקולות זו לזו. ואכן, נניח בשלילה שקבוצת הסדרות הבנויות מ 0 ו 1 שנסמנה ב S

שקולה לקבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$. אזי נתן לרשם את הסדרות ב S כסדרה אינסופית:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots)\\
&\mathbf{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots)\\
&\mathbf{a}_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \ldots)\\
&\mathbf{a}_4 = (a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \ldots)\\
&\ldots
\end{aligned}$$

באשר כל אחד מהאברים a_{ij} הנו 0 או 1. נבנה סדרה חדשה $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)$ שבודאי אינה נמצאת בטבלה. את האבר b_n נגדיר באפן הבא: $b_n = 1$ אם $a_{nn} = 0$ ואלו $b_n = 0$ אם $a_{nn} = 1$. בפרט $b_n \neq a_{nn}$ ולכן $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}_n$. הואיל ואי שויון זה נכון לכל n טבעי, אין הסדרה $\mathbf{b}$ נמצאת בטבלה, בנגוד להנחתנו. מסתירה זו אנו מַסיקים שאין התאמה חד חד ערכית בין S ל $\mathbb{N}$. ∎

1. יסודות

בתורת הקבוצות עוסקים בקבוצות ובאברים השַיָכים להן. כמו בגאומטרית המישור העוסקת בִּישָרים ובנְקֻדות בלי להגדירן, כך בתורת הקבוצות ישארו הבטויים "קבוצה", "אבר" ו"שַיָכות" בלתי מֻגדרים. אולם מהמלה קבוצה נבין שהמדבר באֹסף של עצמים **שונים זה מזה** וכל עצם השַיָך לאסף נקרא **אבר** . אם X הנה קבוצה ו x הוא אחד האברים השַיָכים אליה, נסמן $x \in X$. אם x אינו שַיָך ל X נרשֹם $x \notin X$.

דֻגמאות:

(א) $\{1, 2, 3\}$ הנה הקבוצה שאבריה $1, 2, 3$.

(ב) $\{1, 2, \ldots, 100\}$ היא הקבוצה הכוללת את מאת המספרים הטבעיים הראשונים.

(ג) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ היא קבוצה המספרים הטבעיים.

(ד) $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1 \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ היא קבוצת המספרים השלמים.

(ה) $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0\}$ היא קבוצת המספרים הרציונליים.

(ו) $\mathbb{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים.

אם X היא קבוצה ו P היא תכונה אפשרית של אברי X, אזי $\{x \in X \mid$ ל x התכונה $P\}$ היא קבוצת כל אברי X שיש להם התכונה P. לדֻגמה, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\} = (0, 1)$ הנה קבוצת כל המספרים הממשיים בקטע בין 0 ל 1 (בלי הקצוות).

יִתכן שקבוצות תופענה כאברים של קבוצות אחרות. לדֻגמה, $\{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}\}$.

נאמר שקבוצות X ו Y **שוות זו לזו**, ונסמן $X = Y$, אם הן מכילות את אותם האברים. לדֻגמה, $\{1, 2, 3\} = \{1, 1, 3, 2\} = \{2, 1, 3\}$.

קבוצה X תקרא **קבוצה חלקית** (או גם **תת קבוצה**) של קבוצה Y אם כל אבר של X שַיָך גם ל Y. במקרה זה נסמן $X \subseteq Y$. אם $X \subseteq Y$ ו $X \neq Y$ נאמר ש X **מוכלת ממש** ב Y (או גם ש X היא תת קבוצה **נאותה** של Y) ונסמן $X \subset Y$.

תכונות יחס ההכלה של קבוצות.

(א) $X \subseteq X$.

(ב) $X \subseteq Y$ ו $Y \subseteq X \Longleftarrow X = Y$.

(ג) $X \subseteq Y$ ו $Y \subseteq Z \Longleftarrow X \subseteq Z$.

התמיהה (פרדוקס) של Russel: *האסף W של כל הקבוצות אינו מהוה קבוצה בעצמו,*

הוכחה: אחרת היה האסף $S = \{A \in W \mid A \notin A\}$ של כל הקבוצות X כך ש $X \notin X$ קבוצה בעצמו. ואז היו שתי אפשרויות: $S \in S$ או $S \notin S$. במקרה הראשון היה מתקיֵם לפי ההגדרה ש $S \notin S$ ואלו במקרה השני היינו מקבלים ש $S \in S$. בשני המקרים היינו מקבלים סתירה. ∎

תרגיל: הוכח שאין קַיֶמת קבוצה X שכל תת קבוצה שלה היא גם אבר שלה. ∎

כדי להמנע מסבוכים כאלו נקבע שנתבונן רק בקבוצות הנגזרות מקבוצות ידועות. בין האספים שנסכים לקרא להם קבוצות נכלל את **הקבוצה הריקה**, דהיינו קבוצה שאין בה אברים כלל. נסמן אותה ב $\emptyset$. $\emptyset = \{x \in X \mid x \neq x\}$.
לחלופין, $\emptyset = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 < n < 2\}$.

יש רק קבוצה ריקה אחת והיא מוכלת בכל קבוצה אחרת.

פְּעֻלות על קבוצות.

בהנתן קבוצות A, B נוכל לבנות מהן קבוצות נוספות בעזרת פְּעֻלות מֻסכמות:

אִחוד: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$,

חִתוך: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$,

הפרש: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.

משלים: אם A הנה תת קבוצה של B, אזי $B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}$. הנו **המשלים** של A ב B.

אם $A \cap B = \emptyset$ נאמר שהקבוצות A ו B **זרות זו לזו.** במקרה זה נסמן את האחוד של A ו B על ידי $A \mathbin{\dot\cup} B$.

חֻקי הפעֻלות.

(א) חֻקי החלוף: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

(ב) חֻקי הצרוף: $(A \cup B) \cup C = (A \cup B) \cup C$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(ג) חֻקי פִּלוג: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(ד) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

(ה) אם $A \subseteq B$, אזי $A \cup B = B$ ו $A \cap B = A$.

(ו) חֻקי דה־מורגן: $X \setminus A \cup B = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, $X \setminus A \cap B = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

הערה: אחודים וחתוכים מֻכללים. יהיו X ו I קבוצות. לכל $i \in I$ תהי A_i קבוצה. **האחוד** $\bigcup_{i \in I} A_i$ מֻגדר כאסף כל האברים השַיָכים לפחות מאחת מהקבוצות A_i. **חתוך** $\bigcap_{i \in I} A_i$ מֻגדר כאסף כל האברים השַיָכים לכל אחת מהקבוצות A_i.

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid (\exists i \in I)[x \in A_i]\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid (\forall i \in I)[x \in A_i]\}$$

אם $A_i \cap A_j = \emptyset$ עבור כל שני אברים $i, j \in I$ שונים, נדבר על **אחוד זר** ונכתב אותו בצורה $\dot\bigcup_{i \in I} A_i$. אם $I = \{1, \ldots, n\}$ נרשם את האחוד של $A_1, \ldots, A_n$ כ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ואת חִתוכן כ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. ∎

הגדרה: **קבוצת החזקה** (Power set) $P(X)$ של קבוצה X מֻגדרת כאסף כל הקבוצות החלקיות של X.

לדֻגמה, $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$ היא קבוצה בת אבר אחד שנסמנה ב 1 ואלו $P(1)=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ היא קבוצה בת שני אברים המסֻמנת ב 2. ∎

תרגיל: תהי A קבוצה בת n אברים. הוכח שב $P(A)$ יש 2^n אברים. ∎

הגדרה: **הזוג הסדור** (x,y) שבו x הוא האבר הראשון ו y האבר השני (מתוך קבוצה X) מֻגדר כקבוצה $(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$. ההגדרה מֻצדקת על ידי התצפית הבאה:

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\Longrightarrow x_1=x_2\wedge y_1=y_2 \qquad \blacksquare$$

הגדרה: **המכפלה הקרטזית** $X\times Y$ של שתי קבוצות X ו Y מֻגדרת כאסף הזוגות הסדורים (x,y) שבהם $x\in X$ ו $y\in Y$: $X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X\wedge y\in Y\}$. לדֻגמה, **המישור הממשי** הנו $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$.

תרגיל: **ההפרש הסימטרי** של שתי קבוצות A ו B הנו $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

תהי X קבוצה ונגדיר פעֻלות חבור וכפל על $P(X)$ באפן הבא: החבור יהיה ההפרש הסימטרי: $A+B=A\triangle B$; הכפל יהיה החתוך: $A\cdot B=A\cap B$.

(א) הוכח ש $P(X)$ מהוה חוג בעל אפיון 2 ביחס לפעֻלות הנ"ל. מהו ה 0 וה 1 של חוג זה?

תרגיל: תן דֻגמה לקבוצה בת 4 אברים שכל אבר בה הוא גם קבוצה חלקית שלה.

יחס (דו מקומי) בקבוצה X הוא תת קבוצה R של הקבוצה $X \times X$. אם $(x,y) \in R$ נאמר ש x ו y **עומדים** ביחס R. לפעמים נסמן xRy. לדֻגמה, יחס אי השויון במספרים ממשיים מֻגדר באפן הבא: $y < x$ אם קים $z \neq 0$ כך ש $y - x = z^2$. באפן גאומטרי, $>$ הוא מחצית המישור השוכנת במישור $\mathbb{R}^2$ מעל הישר $X = Y$.

אומרים שהיחס R **חוזר** (**רפלקסיבי**) אם $(x,x) \in R$ לכל $x \in R$. אומרים ש R **סימטרי** אם $(x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \in R$. היחס נקרא **יוצא** (**טרנזיטיבי**) אם $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$. אם יש ל R כל שלש התכונות אומרים ש R הוא **יחס שקילות**. במקרה זה מסמנים גם $x \sim y$ במקום $(x,y) \in R$.

תת קבוצה A של X הִנה **מחלקת שקילות** אם היא מקַיֶמת את שני התנאים הבאים:

(א1) $x \sim y$ לכל $x, y \in A$.

(א2) אם $x \in A$, $y \in X$ ו $x \sim y$, אזי $y \in A$.

בפרט, לכל $x \in X$ הקבוצה $\bar{x} = \{y \in X \mid y \sim x\}$ היא מחלקת שקילות (ביחס ל R) **הנוצרת** על ידי x. אסף מחלקות השקילות ביחס ל R הוא אסף כל האברים של $P(X)$ המקיְמים את התנאים (א1) ו (א2). נסמן אותו ב $\bar{X}$. הוא משרה **חֲלֻקָה** (Partition) $X = \bigcup_{A \in \bar{X}} A$ של X. ואכן, $x \in \bar{x}$ לכל $x \in X$ ואם $A, B \in \bar{X}$ שונים זה מזה, אזי A ו B גם זרים זה לזה. לקבוצה $\bar{X}$ קוראים גם **קבוצת המנה** של X בּיַחס ל R. היא מקַיֶמת, $\bar{X} = \{\bar{x} \in P(X) \mid x \in X\}$.

להפך, כל חֲלֻקה $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ מגדירה יחס שקילות על X: $x \sim y$ אם קיָם $i \in I$ כך ש $x, y \in A_i$.

מערכת מיַצגים של מחלקות השקילות של X ביחס ל R היא תת קבוצה X_0 של X המכילה בדיוק אבר אחד מכל מחלקת שקילות. הקיום של מערכת מיצגים מצריך את אקסיומת הבחירה שנדבר עליה בהמשך.

דֻגמאות:

(א) יחס הזהות.

(ב) יחס החפיפה מודולו n במספרים השלמים.

(ג) מרחבי מנה של מרחב וקטורי. ∎

העְתקה (map) (או **פונקציה** (function)) מקבוצה X לקבוצה Y היא קבוצה חלקית f של $X \times Y$ המקיֶמת: לכל $x \in X$ קיָם y יחיד ב Y כך ש $(x,y) \in f$. במקרה זה נסמן גם $f(x) = y$.

הקבוצה X נקראת **תחום ההגדרה** (domain) של הפונקציה f ואלו Y הנה **הטוָח** (range) של f. את כל העֻבדות האלו מסכמים בסמון $f\colon X \to Y$. אנו אומרים ש f **חד חד ערכית** (injective) אם $f(x) = f(x')$ גורר ש $x = x'$ לכל $x, x' \in X$. אנו אומרים ש f **על** (surjective) אם לכל $y \in Y$ קיָם $x \in X$ כך ש $f(x) = y$. לבסוף אומרים ש f חד חד ערכית על (bijective) אם היא גם חד חד ערכית וגם על.

דֻגמאות:

(א) **פונקציה קבועה** $f(x)=y_0$ לכל $x\in X$.

(ב) **העתקת הזהות** $\mathrm{id}\colon X\to X$ הנִרשמת גם כ id_X מֻגדרת על ידי $\mathrm{id}_X(x)=x$ לכל $x\in X$.

(ג) הפונקציה $f(n)=2n$ היא חד חד ערכית מ $\mathbb{N}$ לתוך עצמו. זוהי פונקציה חד חד ערכית מ $\mathbb{N}$ על $2\mathbb{N}$ (קבוצת המספרים הזוגיים).

(ד) אם R הוא יחס שקילות על קבוצה X אזי ההעתקה $x\mapsto\bar{x}$ היא פונקציה מ X על $\bar{X}$. אם X_0 היא מערכת מיצגים למחלקות השקילות של X ביחס ל R, אזי ההעתקה $x\to\bar{x}$ היא פונקציה חד חד ערכית מ X_0 על $\bar{X}$.

(ה) פונקציה בכמה משתנים: $f\colon X^n\to Y$. לדֻגמה, חבור וכפל של מספרים ממשיים. חבור במרחב וקטורי, כפל בסקלר של מרחב וקטורי. מרחב מנה של מרחב וקטורי. ∎

בהנתן העתקות $f\colon X\to Y$ ו $g\colon Y\to Z$ נוכל להגדיר את **ההרכבה** (composition) שלהן $g\circ f\colon X\to Z$ על ידי $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. נשים לב שפעֻלת ההרכבה הנה **צרופית** (associative), כלומר אם נתונה העתקה נוספת $h\colon Z\to H$, אזי $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

תהיינה $f\colon X\to Y$ ו $f'\colon Y\to X$ העתקות. נאמר ש f ו f' **הפוכות זו לזו** אם $f'\circ f=\mathrm{id}_X$ ו $f\circ f'=\mathrm{id}_Y$. במקרה זה גם f וגם f' חד חד ערכיות על.

להפך, אם $f\colon X\to Y$ חד חד ערכית על, אזי ההעתקה $g\colon Y\to X$ המֻגדרת על ידי "$g(y)$ שוה ל x היחיד ב X המקיֵם $f(x)=y$" הפוכה ל f. במקרה זה נסמן את g גם ב f^{-1}.

תרגיל: תהיינה $f\colon X\to Y$ ו $g\colon Y\to X$ העתקות. מה תוכל ללמד מהתנאי $g\circ f=\mathrm{id}_X$ על f ועל g? ∎

תרגיל: העתקה חד חד ערכית מקבוצה על עצמה נקראת **תמורה**. הוכח שמספר התמורות של קבוצה בת n אברים הוא $n!$. ∎

דֻגמאות נוספות:

(א) תהי $f\colon X\to Y$ העתקה ותהי A תת קבוצה של X. **הצמצום של f ל A** הנו ההעתקה $f|_A\colon A\to Y$ המֻגדרת על ידי התנאי $f|_A(x)=f(x)$ לכל $x\in A$. לדֻגמה, ההעתקה $x\mapsto x^2$ מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}_{\geq 0}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geq 0\}$ הנה על אולם לא חד חד ערכית. אולם צמצומה ל $\mathbb{R}_{\geq 0}$ הנו חד חד ערכי ועל.

(ב) n־יה $(x_1,\ldots,x_n)$ של אברים של קבוצה X הנה פונקציה $x\colon\{1,\ldots,n\}\to X$ כך ש $x(i)=x_i$ עבור $i=1,\ldots,n$. מההגדרה נובע שאם $(x_1,\ldots,x_n)=(x'_1,\ldots,x'_n)$, אזי $x_i=x'_i$ עבור $i=1,\ldots,n$. בפרט, עבור $n=2$, נקבל שזוג (x_1,x_2) של אברי X הנו העתקה $x\colon\{1,2\}\to X$ כך ש $x(1)=x_1$ ו $x(2)=x_2$. הגדרה זו אינה מתלכדת עם הגדרת הזוג (x_1,x_2) כקבוצה $\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}$ שנתנו בפרק 1. אולם כפילות ההגדרות מֻצדקת בזה שהן נותנות אותו מובן לזוג הסדור (x_1,x_2).

סדרה סופית של אברים של X הנה n־ית אברים של X עבור איזה שהוא n טבעי.

(ג) **סדרה (אינסופית)** $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ של אברים של X הנה פונקציה $x\colon \mathbb{N} \to X$ שבה $x(i) = x_i$ עבור כל מספר טבעי i.

(ד) הקבוצה X^Y הנה אסף כל ההעתקות מ Y ל X.

(ה) משפחה $\{A_i \mid i \in I\}$ של תת קבוצות של קבוצה X נִתן לראות כהעתקה $A\colon I \to P(X)$ שערכה ב i הוא A_i. ∎

תרגיל: נסמן ב $|X|$ את מספר האברים בקבוצה סופית X. הוכח שאם X ו Y הן קבוצות סופיות, אזי $|X^Y| = |X|^{|Y|}$. ∎

בהִנתן פונקציות $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ נסמן $f \leq g$ אם $f(x) \leq g(x)$ לכל $x \in X$.

תרגיל: תהי X קבוצה. לכל תת קבוצה A של X נגדיר את **הפונקציה האָפיינית** $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ של A באפן הבא:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכח את הטַעֲנות הבאות:

(א) $A \subseteq B \iff \chi_A \leq \chi_B$

(ב) $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B = \min(\chi_A, \chi_B)$.

(ג) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} = \max(\chi_A, \chi_B)$.

(ד) $\chi_{X \smallsetminus A} = 1 - \chi_A$.

(ה) $\chi_{A \triangle B} = |\chi_A - \chi_B|$ ∎

המכפלה הקרטזית של אסף $\{A_i \mid i \in I\}$ של קבוצות הנה

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i \mid \text{לכל } i \in I \;\; f(i) \in A_i\}$$

בפרט $\prod_{i=1}^{n} A_i$ הוא אסף כל ה n־יות $(a_1, \ldots, a_n)$ של אברי X שבהן $a_i \in A_i$ לכל i. המכפלה הקרטזית של n עתקים של A מסֻמנת כמו לעיל ב A^n. בפרט, $\mathbb{R}^n$ הנו אסף כל ה n־יות של מספרים ממשיים.

תהי $f\colon X \to Y$ העתקה. לכל $A \in X$ תת הקבוצה $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ של Y נקראת **התמונה** (image) או **הדמות** של A **תחת** f. עבור $B \subseteq Y$ נסמן $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. בכך f משרה פונקציה מ $P(A)$ לתוך $P(B)$ המסֻמנת אף היא ב f ופונקציה מ $P(B)$ לתוך $P(A)$ המסֻמנת ב f^{-1}. זו היא **התמונה ההפוכה** (inverse image) של B תחת f.

פונקציות אלו מקיְמות $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ ושויון מתקיֵם אם f חד חד ערכית. כמו כן, $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ ושויון מתקיֵם אם f על.

לדֻגמה, פונצית ההטלה $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ המֻגדרת על ידי $\pi(x,y) = x$, הנה על ולכן $\pi(\pi^{-1}(B)) = B$ לכל $B \subseteq X$.

שים לב: אם f חד חד ערכית על, אזי f^{-1} מסמן גם את ההעתקה ההפוכה ל f. יש להסביר בכל מקרה למה אנו מתכונים בסמון הזה.

תרגיל: תהי $f\colon X \to Y$ העתקה ולכל $i \in I$ תהי B_i תת קבוצה של Y. הוכח ש $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ ו $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

לכל $i \in I$ תהיה A_i תת קבוצה של X. הוכח ש $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. תן דֻגמה לכך ש $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \neq \bigcap_{i\in I} A_i$. ∎

תרגיל: תהי $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ פונציה ממשית ב x, באשר a,b,c,d קבועים ממשיים כך ש $|c| + |d| \neq 0$. מהו תחום ההגדרה של f. הראה ש f חד חד ערכית אם ורק אם $ad - bc \neq 0$. במקרה זה מצא בטוי מפֹרש עבור הפונקציה ההפוכה ל f. ∎

3. מספרים מונים

נאמר שקבוצה A **שקולה** לקבוצה B אם קיֶמת העתקה חד חד ערכית של A על B. במקרה זה נסמן $A \sim B$.

יחס השקילות בין קבוצות חוזר, סימטרי, ועובר. אם $A \sim A'$, $B \sim B'$, $A \cap B = \emptyset$ ו $A' \cap B' = \emptyset$, אזי $A \cup B \sim A' \cup B'$.

הנחה: *קיֶמת מחלקה* Card *של קבוצות כך שלכל קבוצה X קימת קבוצה אחת ויחידה a ב* Card *השקולה ל X. הקבוצה a תִקרא* **המספר המונה** *(cardinal number) של X או גם* **העָצמה** *(cardinality) של A ונסמן $|A| = a$.*

לדֻגמה, $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ הוא המספר המונה של כל הקבוצות בנות n אברים.

תהיינה A ו B שתי קבוצות. אם A שקולה לתת קבוצה של B נאמר **שעצמת** *A* **אינה עולה של עָצמת** *B או* **עָצמת** *A* **קטנה או שוה לעצמת** *B ונסמן $|A| \leq |B|$. אם בנוסף לכך, A אינה שקולה ל B נאמר* **שעצמת** *A* **קטנה מעצמת** *B ונסמן $|A| < |B|$. מההגדרות עולה שהיחס $\leq$ חוזר, כלומר $|A| \leq |A|$ ועובר, כלומר אם $|A| \leq |B|$ ו $|B| \leq |C|$, אזי $|A| \leq |C|$. אולם בשלב זה אין זה ברור שאם $|A| \leq |B|$ ו $|B| \leq |A|$, אזי $|A| = |B|$. כמו כן אין זה ברור שכל שתי עצמות נתנות להשואה. את שתי התכונות האלו של יחס אי השויון בין עצמות נוכיח בהמשך.*

דגמאות:

(א) אם $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$ ו $b \neq c$, אזי $|A| < |B|$.

(ב) $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q} \cap [0,1]|$, שכן ההעתקה $n \mapsto \frac{1}{n}$ חד חד ערכית.

(ג) $|\mathbb{N}| < |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

(ד) $|2^X| = |P(X)|$.

(ה) אם $X \sim Y$, אזי $A^X \sim A^Y$.

(ו) נגדיר $|2^X| = 2^{|X|}$. מ (ה) נובע שזוהי הגדרה טובה.

למת נקֻדת השֶבֶת: *תהי X קבוצה ותהי $\varphi: P(X) \to P(X)$ העתקה שומרת סדר, כלומר העתקה המקיֶמת $\varphi(A) \subseteq \varphi(B) \Longleftarrow A \subseteq B$. אזי יש ל φ* **נקֻדת שבת**, *כלומר קיֶמת $B \in P(X)$ כך ש $\varphi(B) = B$.*

הוכחה: נתבונן באסף $\mathcal{A} = \{A \in P(X) \mid A \subseteq \varphi(A)\}$ נסמן $B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ ונוכיח ש $\varphi(B) = B$.

ראשית נזכֹר שהקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה. בפרט $\emptyset \subseteq \varphi(\emptyset)$. לכן, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

אם $A \in \mathcal{A}$, אזי $A \subseteq B$, לכן $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ ולכן $B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$.

מזה נובע ש $\varphi(B) \subseteq \varphi(\varphi(B))$. לכן, $\varphi(B) \in \mathcal{A}$ ולכן, נקבל מהגדרת B ש $\varphi(B) \subseteq B$. יחד עם המסקנה של הפסקה הקודמת אנו מקבלים ש $\varphi(B) = B$, כפי שטענו. ∎

משפט קנטור־ברנשטיין: *אם קבוצה X שקולה לתת קבוצה של קבוצה Y ו Y שקולה לתת קבוצה של X, אזי X שקולה ל Y.*

הוכחה: תהיינה $f\colon X \to Y$ ו $g\colon Y \to X$ העתקות חד חד ערכיות. נגדיר העתקה $\varphi\colon P(X) \to P(X)$ על ידי $\varphi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$. אזי φ שומרת סדר ולכן קיֶמת תת קבוצה B של X כך ש $\varphi(B) = B$. במלים אחרות, $X \setminus g(Y \setminus f(B)) = B$. לכן $X \setminus B = g(Y \setminus f(B))$. מכאן נובע ש $g|_{Y \setminus B}$ מעתיקה את $Y \setminus f(B)$ באֹפן חד חד ערכי על $X \setminus B$. ההעתקה $h\colon X \to Y$ המֻגדרת על ידי

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in B \\ (g|_{Y-f(B)})^{-1}(x) & x \in X \setminus B \end{cases}$$

מעתיקה את X באֹפן חד חד ערכי על Y. ∎

מסקנה:

(א) *אם* $|X| \le |Y|$ ו $|Y| \le |X|$, *אזי* $|X| = |Y|$.

(ב) *אם* $|X| \le |Y|$ ו $|Y| < |Z|$, *אזי* $|X| < |Z|$.

(ג) *אם* $|X| < |Y|$ ו $|Y| \le |Z|$, *אזי* $|X| < |Z|$.

משפט קנטור: *לכל קבוצה* X *מתקיֵם* $|X| < |P(X)|$.

הוכחה: ההעתקה $x \mapsto \{x\}$ מעתיקה את X באֹפן חד חד ערכי לתוך $P(X)$. לכן, $|X| \le |P(X)|$.

נניח בשלילה שקיֶמת העתקה חד חד ערכית f של X על $P(X)$. נתבונן בתת הקבוצה $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ של X. לפי ההנחה קיָם $a \in X$ כך ש $f(a) = A$. אם $a \in A$, אזי $a \notin f(a)$ ולכן $a \notin A$. אם $a \notin A$, אזי $a \notin f(a)$ ולכן $a \in A$. בשני המקרים קבלנו סתירה. לכן, $|X| < |P(X)|$. ∎

מסקנה: *לכל עצמה* m *מתקיֵם* $m < 2^m$.

4. קבוצות סופיות

המספרים הטבעיים מֻגדרים כקבוצות באנדוקציה בעזרת העקרון הבא: כל מספר טבעי הנו קבוצת כל המספרים הקטנים ממנו: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, $3 = \{0,1,2\}$, ..., $n = \{0,1,\dots,n-1\}$. בסופו של דבר מגדירים $\omega = \{0,1,2,\dots\}$ ו $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$.

ביֶתר דיוק מַניחים קודם את המֻשׂכל הראשון הבא:

אקסיומת הקבוצה האינסופית: *קיֶמת קבוצה X המכילה את הקבוצה הריקה ומכילה יחד עם כל אבר x גם את הקבוצה $x \cup \{x\}$.*

קבוצה X המקיֶמת את התנאי המופיע באקסיומת הקבוצה האינסופית נקראת **קבוצה יוצאת** (transitive). אם X יוצאת, אזי גם חתוך כל תת הקבוצות היוצאות של X הנו יוצא. נסמן את החתוך הזה ב X_0. נוכיח ש X_0 אינה תלויה ב X.

ואכן, תהי Y קבוצה יוצאת נוספת ותהי Y_0 חתוך כל תת הקבוצות היוצאות של Y. נסמן $Z = X \cup Y$ ותהי Z_0 חתוך כל תת הקבוצות היוצאות של Z. בפרט $Z_0 \subseteq X_0$. לכן, $Z_0 \subseteq X$ יוצאת. מהגדרת X_0 נובע ש $X_0 \subseteq Z_0$. לכן, $X_0 = Z_0$. באפן דומה נובע ש $Y_0 = Z_0$. לכן, $X_0 = Z_0$.

נסמן את X_0 ב ω. מההגדרה והיחידות של ω נובע שאם X היא קבוצה המכילה את הקבוצה הריקה ומִ $x \in X$ נובע ש $x \cup \{x\} \in X$, אזי $\omega \subseteq X$. בפרט נקבל ש $\omega = \{0,1,2,3,\dots\}$ כפי שהגדרנו מלכתחילה.

עקרון ההשראה (האנדוקציה) השלמה: *תהי P תכונה אפשרית של אברי ω. אם לקבוצה הריקה יש התכונה P ומנכונותה עבור x נובעת גם נכונותה גם ל $x \cup \{x\}$, אזי לכל אבר של ω יש התכונה P.*

הוכחה: נסמן ב X את קבוצת כל אברי ω בעלי התכונה P. מהתכונה המגדירה את ω נובע ש $\omega = X$. ∎

קבוצה A תכֻנה **סופית** אם קיָם $n \in \omega$ השקול ל A.

תרגיל: *השתמש בהשראה שלמה כדי להוכיח לכל $n \in \omega$ יש התכונות הבאות:*

(א) $0 = n$ או $0 \in n$.

(ב) אם $x \in n$, אזי $x \cup \{x\} = n$ או $x \cup \{x\} \in n$.

תרגיל: *יהיו m, n אברים של ω. נאמר ש m קטן מ n אם $m \in n$.*

(א) *השתמש בהשראה שלמה כדי להוכיח שאם $m \neq n$, אזי $m < n$ או $n < m$.*

(ב) *הוכח שאם $l < m$ ו $m < n$, אזי $l < n$.*

תרגיל: *הוכח שלכל תת קבוצה לא ריקה של ω יש אבר ראשון.*

קבוצה A תכֻנה **סופית** אם קים $n \in \omega$ השקול ל A.

הערה: אם $|X| = n$ ו $x \in X$, אזי $|X \setminus \{x\}| = n-1$.

משפטון: *קבוצה סופית אינה שקולה לשום קבוצה חלקית נאותה של עצמה.*

הוכחה: נניח בשלילה שהמשפטון אינו נכון. יהי $n \geq 0$ המספר המזערי שעבורו קיֶמת קבוצה X בת n אברים השקולה לתת קבוצה נאותה A של עצמה. אזי $X \neq \emptyset$ (כי לקבוצה הריקה אין שום תת קבוצה נאותה). לכן $n = |X| \geq 1$.

לפי ההנחה קיָם $x \in X \setminus A$. לכן, $A \subseteq X \setminus \{x\}$ ו $f(x) \neq x$. נסמן $X' = X \setminus \{x\}$, $A' = A \setminus \{f(x)\}$ ו $f' = f|_{A'}$. אזי $A' \subseteq X'$ ו $f(x) \in X' \setminus A'$ ולכן $A' \subset X'$. בנוסף לזה, $f'\colon X' \to A'$ חד חד ערכית ועל ו $|X'| = n-1$, בסתירה למזעריות של n. ∎

תוצאה: *תהי X קבוצה סופית ו $f\colon X \to X$ העתקה חד חד ערכית. אזי f על.*

תהי $f\colon X \to Y$ העתקה על. לכל $y \in Y$ הקבוצה $f^{-1}(y)$ אינה ריקה. נבחר אבר $f'(y) \in f^{-1}(y)$. (האפשרות לבחור את $f'(y)$ תלויה במקרה האינסופי באקסיומת הבחירה.) אזי $f(f'(y)) = y$ כלומר $f \circ f' = \mathrm{id}_Y$. לכן $f'\colon Y \to X$ הנה העתקה חד חד ערכית הנקראת **חתך** של f.

תוצאה: *אם X הנה קבוצה סופית ו $f\colon X \to X$ על, אזי f חד חד ערכית.*

הוכחה: יהי $f'\colon X \to X$ חתך של f. אזי f' חד חד ערכי ולכן על. מכאן נובע ש f חד חד ערכית. ∎

משפטון:

(א) *אם A הנה תת קבוצה של קבוצה סופית, אזי A סופית.*

(ב) *אם A, B הן קבוצות סופיות, אזי גם $A \cap B$, $A \times B$, $A \cup B$ ו A^B קבוצות סופיות.*

(ג) *אם A סופית גם $P(A)$ סופית.*

הוכחת א: באנדוקציה על $|A|$.

הוכחת ב: הקבוצה $A \cap B$ חלקית ל A ולכן, לפי (א), סופית.

יהיו עתה $f\colon A \to m$ ו $g\colon B \to n$ העתקות חד חד ערכיות על. אזי ההעתקה $h\colon A \times B \to mn$ המֻגדרת על ידי $h(a,b) = f(a) + mg(b)$ היא חד חד ערכית על.

אם A ו B זרות זו לזו, נגדיר $h\colon A \cup B \to m + n$ על ידי $h(a) = f(a)$ ו $h(b) = m + g(b)$. במקרה הכללי נשתמש בזהות $A \cup B = A \mathbin{\dot\cup} (B \setminus A)$ ונשתמש ב (א) ובמקרה הקודם.

את ההוכחה ש $|A^B| = m^n$ נתן רק במקרה ש $m, n \geq 1$. בלי הגבלת הכלליות נניח ש $A = \{0, \ldots, m-1\}$ ו $B = \{0, \ldots, n-1\}$. נגדיר העתקה

$$h\colon \{0, \ldots, m-1\}^{\{0, \ldots, n-1\}} \to \{0, \ldots, m^n - 1\}$$

על ידי שנגדיר את הערך של h בפונקציה $\alpha\colon \{0,\ldots,n-1\} \to \{0,\ldots,m-1\}$ באפן הבא:

$$h(\alpha) = \alpha(0) + \alpha(1)m + \cdots + \alpha(n-1)m^{n-1}$$

הואיל וכל מספר טבעי נִתן לפתוח לפי בסיס m באפן יחיד, נובע ש h חד חד ערכית על.

הוכחת ג: ראינו כבר ש $P(A)$ שקול ל 2^A. לפי (ב) $|P(A)| = 2^{|A|}$. ∎

5. קבוצות בנות מְנִיה

קבוצה X שאינה שקולה לשום $n \in \omega$ מְכֻנה **אינסופית.** המספר המונה של קבוצה אינסופית נקרא **מספר מונה אינסופי.**

משפטון: *הקבוצה* $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ *הנה אינסופית.*

הוכחה: נניח בשלילה שקַיֶּמֶת העתקה חד חד ערכית על $f\colon \omega \to n$, עבור איזה שהוא $n \in \omega$. לכן $f|_n\colon n \to n$ היא חד חד ערכית ולכן, לפי סעיף 4, היא גם על. בנוסף $n < f(n)$. מכאן שקַיָּם $m \in n$ כך ש $f(m) = f(n)$, בסתירה לחד חד ערכיות של f. ∎

קבוצה השקולה ל $\mathbb{N}$ מְכֻנה **בַּת מְנִיָה** (countable). קבוצה כזו נִתן לכתֹב בצורה $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ באשר ה x_i־יים שונים זה מזה. המספר המונה המתאים לקבוצה בת מְניה מסֻמן ב $\aleph_0$.

דגמאות:

(א) הקבוצה ω בת מניה.

(ב) קבוצת המספרים הזוגיים בת מניה.

(ג) קבוצת המספרים השלמים $\mathbb{Z}$ בת מניה.

(ד) קבוצת זוגות המספרים הטבעיים, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ בת מניה.

כאן משתמשים בשיטת האלכסון הראשונה של קנטור. ∎

משפט הנסיגה: *יהיו X קבוצה, a אבר של X ו $f\colon X \to X$ העתקה. אזי קַיֶּמֶת העתקה יחידה $F\colon \mathbb{N} \to X$ המקַיֶּמֶת $f(1) = a$ ו $F(n+1) = f(F(n))$ לכל $n \in \mathbb{N}$.*

משפט הנסיגה מאפשר לנו להגדיר סדרות של אברים בקבוצה X בהשראה (=אנדוקציה). נדחה את הוכחתו לסוף הסעיף.

משפטון: *קבוצה X היא אינסופית אם ורק אם $\aleph_0 \le |X|$.*

הוכחה: מגדירים באנדוקציה העתקה חד חד ערכית $f\colon \mathbb{N} \to X$. האפשרות להגדיר את ההעתקה תלויה באקסיומת הבחירה (המופיעה בסעיף 8) ובמשפט הנסיגה. ∎

מסקנה: *$\aleph_0$ הנו המספר המונה האינסופי הקטן ביותר.*

מסקנה: *כל קבוצה אינסופית מַקִּיפה תת קבוצה בת מניה.*

משפטון: *קבוצה X היא אינסופית אם ורק אם היא שקולה לתת קבוצה נאותה של עצמה.*

הוכחה: אם X סופית, אין היא שקולה לתת קבוצה נאותה של עצמה (סעיף 4). אם X אינסופית, נתן להניח שהיא מַקיפה את $\mathbb{N}$. ההעתקה $f\colon X \to X$ המֻגדרת על ידי הכלל $f(n) = n+1$ אם $n \in \mathbb{N}$ ו $f(x) = x$ אם $x \in X \setminus \mathbb{N}$, מעתיקה את X באפן חד חד ערכי על $X \setminus \{1\}$. ∎

משפטון: *אם X בת מְניה ו $Y \subseteq X$, אזי Y סופית או ש Y בת מניה.*

הוכחה: אם Y אינסופית, אזי $\aleph_0 \leq |Y| \leq |X| = \aleph_0$. לפי קנטור־ברנשטיין, $|Y| = \aleph_0$. ∎

משפטון:

(א) *האחוד של שתי קבוצות בנות מניה הוא בן מניה.*

(ב) *האחוד של מספר סופי של קבוצות בנות מניה הוא בן מניה.*

(ג) *אם $|X_i| = \aleph_0$, עבור $i = 1, 2, 3, \ldots$, אזי $|\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i| = \aleph_0$.*

(ד) *אם $|X_i| \leq \aleph_0$, עבור $i = 1, 2, 3 \ldots$, אזי $|\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i| \leq \aleph_0$.*

הוכחה: הטענות (א), (ב) ו (ג) נובעות מ (ד) וממשפט קנטור־ברנשטיין. כדי להוכיח את (ד) נסמן $X'_n = X_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. אזי הקבוצות $X'_1, X'_2, X'_3, \ldots$ זרות זו לזו ו $\bigcup_{i=1}^{\infty} X'_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. נִתן להניח אפוא בלי הגבלת הכלליות שהקבוצות $X_1, X_2, X_3, \ldots$ זרות זו לזו ולהשתמש בשיטת האלכסון הראשונה של קנטור.

לחלופין, נניח שאנו יודעים כבר על מציאות אינסוף מספרים ראשוניים. נסדרם בסדרה אינסופית, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ (למשל לפי סדר עולה). לכל n תהי $f_n\colon X_n \to \mathbb{N}$ העתקה חד חד ערכית. ההעתקה $\varphi\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \to \mathbb{N}$ המֻגדרת על ידי $\varphi(x) = p_n^{f_n(x)}$ אם $x \in X_n$ מֻגדרת היטב והיא חד חד ערכית. ∎

תוצאה: $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

משפטון:

(א) *אם $|X| = \aleph_0$ ו $|Y| = \aleph_0$, אזי $|X \times Y| = \aleph_0$.*

(ב) *אם $|X_i| = \aleph_0$ עבור $i = 1, \ldots, n$, אזי $|\prod_{i=1}^{n} X_i| = \aleph_0$.*

הוכחת (א): אפשר להשתמש בשיטת האלכסון הראשונה של קנטור או בהצגה $X \times Y = \bigcup_{y \in Y} X \times \{y\}$ ובמשפטון הקודם.

הוכחת (ב): אנדוקציה על n ושמוש ב (א). ∎

תרגיל: *הוכח שאם X בת מניה, אזי אסף כל הקבוצות החלקיות הסופיות של X בן מניה.*

תרגיל: *תהי $\pi\colon B\to A$ העתקה על. נניח ש $|A|\le\aleph_0$ וש $|\pi^{-1}(a)|\le\aleph_0$ לכל $a\in A$. הוכח ש $|B|\le\aleph_0$.*

תרגיל: *הוכח שכל משפחה $\{I_\alpha \mid \alpha\in A\}$ של קטעים פתוחים ב $\mathbb{R}$ הזרים זה לזה היא לכל היותר בת מניה. רמז: $\mathbb{Q}$ בן מניה.*

תרגיל: *הוכח שקבוצת נקֻדות אי הרציפות של פונקציה מונוטונית $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא לכל היותר בת מניה.*

בטוי מהצורה $p(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0$ שבו n טבעי ו $a_0,\dots,a_n$ מספרים שלמים ו $a_n\neq 0$ נקרא **פולינום עם מקדמים שלמים ממעלה** n.

מספר מרֻכב z נקרא **שרש** של $p(X)$ אם $p(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0=0$. מתורת השדות ידוע שלפולינום מתֻקן ממעלה n עם מקדמים שלמים יש לכל היותר n שרשים מרֻכבים שלמים.

מספר מרֻכב z מכֻנה **אלגברי** אם z הוא שרש של פולינום שונה מאפס עם מקדמים שלמים.

משפט: *קבוצת המספרים האלגבריים היא בת מנִיה.*

הוכחה: קבוצת הפולינומים השונים מאפס עם מקדמים שלמים היא בת מניה. לכל אחד מהפולינומים יש רק מספר סופי של שרשים. לכן, לפי משפט קודם, יש בדיוק $\aleph_0$ מספרים אלגבריים. ∎

תרגיל: *הוכח שקבוצה X הנה אינסופית אם ורק אם לכל העתקה $f\colon X\to X$ קיֶמת תת קבוצה $\emptyset\subset A\subset X$ כך ש $f(A)\subseteq A$.*

הוכחת משפט הנסיגה: נסמן ב $\mathcal{W}$ את אסף כל הקבוצות החלקיות A של $\mathbb{N}\times X$ המקיִמות:

(וא) $(1,a)\in A$.

(וב) אם $(n,x)\in A$, אזי $(n+1,f(x))\in A$

ונחלק את המשך ההוכחה לכמה חלקים.

חלק א: *$\mathcal{A}$ אינה ריקה.* ואכן $\mathbb{N}\times X\in\mathcal{A}$.

חלק ב: *הקבוצה $F=\bigcap_{A\in\mathcal{A}}A$ שיֶכת ל $\mathcal{A}$.*

חלק ג: *F מוכלת בכל קבוצה A השיֶכת ל $\mathcal{A}$.*

חלק ד: *נסמן ב M את קבוצת כל ה $n\in\mathbb{N}$ שעבורם קיָם x יחיד ב X כך ש $(n,x)\in F$. אזי $1\in M$.* ואכן נובע קודם כל מההגדרה ש $(1,a)\in F$. עתה נניח ש $b\in X$ מקיֵם $(1,b)\in F$ ו $b\neq a$. אזי $F\setminus\{(1,b)\}\in\mathcal{A}$, בסתירה לחלק ג.

חלק ה: *אם $n\in M$, $(n,x)\in F$, $(n+1,y)\in F$ ו $y\neq f(x)$, אזי $F\setminus\{(n+1,y)\}\in\mathcal{W}$.* ואכן קודם כל $(1,a)\in F\setminus\{(n+1,y)\}$. עתה נניח ש $(m,z)\in F\setminus\{(n+1,y)\}$. אם $m=n$, אזי $(n,z)=(n,x)$

ולכן $x = z$. הואיל ו $y \neq f(x)$ נובע מכאן ש $(m+1, f(x)) = (n+1, f(x)) \in F \setminus \{(n+1,y)\}$. אם $m \neq n$, אזי $m+1 \neq n+1$ ולכן $(m+1, f(z)) \in F \setminus \{(n+1,y)\}$. מכאן ש $F \setminus \{(n+1,y)\} \in \mathcal{A}$.

חלק ו: *הקבוצה M יוצאת.* לפי חלק ד $1 \in M$. נניח ש $n \in M$. אזי קיָם x יחיד ב X כך ש $(n,x) \in f$. לפי חלק ב, $(n+1, f(x)) \in F$. אלו היה קיָם $y \in X$ המקיֵם $y \neq f(x)$ וגם $(n+1,y) \in F$, אזי $F \setminus \{(n+1,y)\} \in \mathcal{A}$ (לפי חלק ה), בסתירה לחלק ג. לכן, $n+1 \in M$.

חלק ז: *F הנה העתקה מ $\mathbb{N}$ לתוך X המקיֶמת $F(1) = a$ ו $F(n+1) = f(F(n))$.* מהחלק ד ומחלק ו נובע לפי עקרון ההשראה ש $M = \mathbb{N}$. לכן, לכל $n \in \mathbb{N}$ קיָם x יחיד ב X כך ש $(n,x) \in F$. במִלים אחרות, $F\colon \mathbb{N} \to X$ היא העתקה ונסמן כרגיל $F(n) = x$ במקום $(n,x) \in F$. בפרט, $f(1) = a$. יתר על כן, אם $F(n) = x$, אזי $(n+1, f(F(n)) = (n+1, f(x)) \in F$ ולכן $F(n+1) = f(F(n))$.

חלק ח: את יחידות ההעתקה F מוכיחים בעזרת עקרון ההשראה. ∎

6. קבוצות השקולות לרצף

הקטע הסגור $[0,1]=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 1\}$ נקרא **הרצף**. עצמתו מסֻמנת ב $\aleph$.

משפט: *הרצף $[0,1]$ אינו נתן לִמְנִיָּה.*

הוכחה (שיטת הקטעים המתכנסים): נניח בשלילה ש $[0,1]=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\}$. נחלק את הקטע $[0,1]$ לשלשה קטעים שוים בארכם: $[0,1]=[0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$. אחד הקטעים, שנסמנו ב I_1, אינו מכיל את x_1. עתה נחלק את I_1 לשלשה קטעים שוים ונבחר אחד מהם, I_2, שאינו מכיל את x_2. באנדוקציה נבחר באפן כזה סדרת קטעים סגורים $I_1,I_2,I_3,\ldots$ כך שהארך של I_n שוה ל $\frac{1}{3^n}$ ו $x_n\notin I_n$. יתר על כן, $I_1\supseteq I_2\supseteq I_3\supseteq\cdots$. לפי הלמה של קנטור על סדרת קטעים מתאפסים (ראה עמוד 58 ב"חשבון אינפינטסימלי" של דוד מיזלר) החתוך $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$ מכיל בדיוק מספר אחד x. בפרט $x\in I_n$ ולכן $x\neq x_n$ לכל n טבעי. סתירה זו להנחתנו מוכיחה שאי אפשר למנות את הקטע $[0,1]$. ∎

הוכחנו אפוא ש $\aleph_0<\aleph$. מטרתנו הבאה הנה לקשר בין שני המספרים המונים האלו.

משפט עזר: *תהיינה X ו Y קבוצות כך ש $|Y|\le\aleph_0$.*

(א) *אם X אינסופית, אזי $X\cup Y\sim X$.*

(ב) *אם $X\cup Y$ אינה נתנת למניה, אזי $X\cup Y\sim X$.*

הוכחת א: מההצגה $X\cup Y=X\mathbin{\dot\cup}(Y\setminus X)$ נובע שעל ידי החלפת Y ב $Y\setminus X$ נוכל להניח בלי הגבלת הכלליות ש X ו Y זרות זו לזו. עתה נרשם $X=X_0\mathbin{\dot\cup}X_1$ באשר X_1 בת מניה. אזי,

$$X\cup Y=X_0\mathbin{\dot\cup}(X_1\mathbin{\dot\cup}Y)\sim X_0\mathbin{\dot\cup}X_1=X.$$

הוכחת ב: אלו הָיתה X סופית, היה $|X\cup Y|\le\aleph_0$, בסתירה להנחה. לכן X אינסופית. מ (א) נובע ש $X\cup Y\sim X$. ∎

משפט: $\aleph=2^{\aleph_0}$.

הוכחה: עלינו להוכיח ש $[0,1]\sim 2^{\mathbb{N}}$ (באשר $2=\{0,1\}$). הרעיון הכללי הוא להציג כל מספר ממשי x בין 0 ל 1 כשבר אינסופי $0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots$ באשר $\varepsilon_i\in\{0,1\}$ ולהתאים את x לסדרה $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots)$. אולם יש מספרים בעלי שתי הצגות כאלו. למשל, $\frac{1}{2}=0.01111\cdots=0.1000\cdots$. כפילות זו מחיֶבת אותנו לזהירות בהוכחה.

לצרך זה נגדיר תחילה את D כאסף כל הסדרות $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots)$ שעבורן קיָם n טבעי כך ש $\varepsilon_i=0$ עבור כל $i\ge n+1$. יהי $E=2^{\mathbb{N}}\setminus D$. אזי D בת מניה ולכן, לפי משפט העזר, $E\sim 2^{\mathbb{N}}$.

לכל $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots)\in E$ נתאים את המספר $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{2^i}$ (שים לב שהסכום מתכנס למספר בקטע $[0,1]$).

טענה: *אם* $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots)$ *ו* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots)$ *הם שתי אברים שונים של* E*, אזי* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i} \neq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$.

בלי הגבלת הכלליות נניח ש $\delta_i = \varepsilon_i$ עבור $i = 1, \ldots, n-1$, $\delta_n = 0$ ו $\varepsilon_n = 1$. אזי קַיָם $r > n$ כך ש $\varepsilon_r = 1$. לכן,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^i} = \frac{1}{2^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i - \delta_i}{2^i} > \frac{1}{2^n} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 0$$

מהטענה נובע שההעתקה $\varepsilon \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$ של E לתוך $[0,1]$ חד חד ערכית. לכן, $2^{\aleph_0} \leq \aleph$.

להפך, לכל $x \in [0,1)$ נתאים סדרה $\varepsilon \in 2^{\mathbb{N}}$ כך ש $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$. ואכן, נניח באנדוקציה שהגדרנו כבר את $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ כך ש $0 \leq x - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{2^i} < \frac{1}{2^{n-1}}$. נסמן $y = 2^{n-1}x - 2^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$. אזי $0 \leq y < 1$. נגדיר $\varepsilon_n = 0$ אם $0 \leq y < \frac{1}{2}$ ו $\varepsilon_n = 1$ אם $\frac{1}{2} \leq y < 1$. אזי $0 < x - \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i}{2^i} < \frac{1}{2^n}$. מהגדרת הסדרה נובע ש $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{2^i}$.

ההתאמה $x \mapsto \varepsilon$ חד חד ערכית. לכן, $\aleph = [0,1) \leq 2^{\aleph_0}$. ממשפט קנטור־ברנשטיין נובע ש $\aleph = 2^{\aleph_0}$.

■

משפטון הקטעים: *כל קטע וכל קרן של מספרים ממשיים שקולים לרצף. יתר על כן* $\mathbb{R}$ *עצמו שקול לרצף.*

הוכחה: יהי קודם כל $r > 0$. אזי ההעתקה $x \mapsto rx$ מעתיקה את $[0,1]$ באפן חד חד ערכי על $[0,r]$. לכן, $[0,r]$ שקול לרצף.

אם $a < b$ הם מספרים ממשיים, אזי ההעתקה $x \mapsto x + a$ מעתיקה את $[0, b-a]$ על $[a,b]$. לכן $[a,b]$ שקול לרצף.

לפי משפט העזר שקול $[a,b]$ לקטע הפתוח משמאל $(a,b]$, לקטע הפתוח מִימִין $[a,b)$ ולקטע הפתוח (a,b).

ההעתקה $x \mapsto \frac{1}{x}$ מעתיקה את הקטע $(0,1]$ באפן חד חד ערכי על הקרן $[1,\infty)$ ואלו ההעתקה $y \mapsto y - 1 + a$ מעתיקה את $[1,\infty)$ באפן חד חד ערכי על הקרן $[a,\infty)$. לפי משפט העזר, שקולה הקרן החצי סגורה $[a,\infty)$ לקרן הפתוחה (a,∞). לבסוף, ההעתקה $z \mapsto -z$ מעתיקה את הקרן $[a,\infty)$ באפן חד חד ערכי על הקרן $(-\infty,-a]$ ואת הקרן (a,∞) באפן חד חד ערכי על הקרן $(-\infty,-a)$. לכן כל הקרנַיִם שקולות לרצף.

ממה שהוכחנו עד עתה עולה ש $\mathbb{R} = (-\infty,0) \cup [0,\infty) \sim (-1,0) \cup [0,1) = (-1,1)$. לכן, גם $\mathbb{R}$ שקול לרצף. ■

מספר מְרֻכב יקֻנה **נַעֲלֶה** (transcendental) אם אינו אלגברי.

מסקנה (מספרים נעלים): *קַיָמִים מספרים מְרֻכבים נעלים. יתר על כן, קבוצת המספרים הממשיים הנעלים שקולה לרצף.*

הוכחה: השדה $\mathbb{R}$ הנו אחוד זר של קבוצת המספרים האלגבריים שלו, $\mathbb{R}_{\text{alg}}$, וקבוצת המספרים הנעלים שלו, $\mathbb{R}_{\text{trans}}$. לפי משפט המספרים האלגבריים, $\mathbb{R}_{\text{alg}}$ בת מניה. לכן, לפי משפט העזר, $|\mathbb{R}_{\text{trans}}| = \aleph$. ■

תרגיל: *הוכח שמספר מני של ישרים אינו יכול לכסות את המישור. רמז: במקרה זה הם מכסים את עִגול היחידה. כסה את הקטעים המתאימים ברבועים שסכום שטחיהם קטן מ π.*

תרגיל: *הוכח שקבוצה בת מניה של מישורים ב $\mathbb{R}^3$ אינה מכסה את $\mathbb{R}^3$.*

תרגיל:

(א) *הוכח שקיֶמת משפחה $\mathcal{A}$ מעצמת הרצף של תת קבוצות של $\mathbb{Q}$ הסדורה בשלמות ביחס להכלה. במלים אחרות, $\mathcal{A}$ הוא תת קבוצה של $P(\mathbb{Q})$, $|\mathcal{A}| = \aleph$ ולכל $A, B \in \mathcal{A}$ מתקיֵם $B \subseteq A$ או $A \subseteq B$. רמז: השתמש בכך ש $|\mathbb{R}|$ מעצמת הרצף.*

(ב) *הוכח שקיֶמת משפחה $\mathcal{B}$ מעצמת הרצף של תת קבוצות של $\mathbb{N}$ כך הסדורה בשלמות ביחס להכלה. רמז: השתמש ב (א).*

תרגיל:

(א) *מה העצמה של קבוצות הנקֻדות במישור ששני השעורים (קואורדינטות) שלהן מספרים רציונליים.*

(ב) *מהי העצמה המרבּית של קבוצה $\mathcal{D}$ של עִגולים במישור שכל שנִיק מהם זרים זה לזה.*

(ג) *מה העצמה המרבים של קבוצה $\mathcal{C}$ של מעגלים במישור שכל שנים מהם זרים זה לזה.*

(ד) *מהי העצמה המרבית של קבוצה $\mathcal{E}$ של שמיניות 8 שכל שתים מהן זרות זו לזו. רמז: לכל שמיניה 8 ב $\mathcal{E}$ בחר נקֻדה עם שעורים רציונליים בתוך כל אחד מהמעגלים המרכיבים את השמיניה. לאחר מכן השתמש ב (א).*

7. חשבון מספרים מונים

נגדיר פְּעֻלות חבור, כפל והעלאה בחזקה של מספרים מונים. כללי החשבון של פְּעֻלות אלו אינם דומים לגמרי לאלו של מספרים ממשיים.

חִבור.

יהיו a ו b מספרים מונים ויהיו A ו B קבוצות זרות כך ש $|A| = a$ ו $|B| = b$. המספר המונה של $A \cup B$ נקרא **הסכום** של a ו b. הוא מסֻמן ב $a + b$. מתקיֵם אפוא, $|A \cup B| = |A| + |B|$.

הערות:

(א) *אם A ו B קבוצות כלשהן, אזי $A \sim \{1\} \times A$ זרה ל $B \sim \{2\} \times B$. לכן החבור תמיד מֻגדר.*

(ב) *לפי ההערה בתחילת סעיף 3, הסכום $a + b$ אינו תלוי בקבוצות A ו B המיַצגות את a ו b כל עוד הן זרות.*

(ג) *פְּעֻלת החבור של מספרים מונים חִלופית וצֵרופית.*

(ד) $a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2 \Longrightarrow a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$.

(ה) *אם m ו n הנם מספרים סופיים, אזי הסכום $n + m$ כמספרים מונים מתלכד עם $m + n$ כמספרים סופיים.*

(ו) $0 + b = b$ *לכל מספר מונה* b.

דגמאות:

(א) $n + \aleph_0 = \aleph_0$ **לכל** $n \in \omega$.

(ב) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

(ג) $\aleph + \aleph = \aleph$.

(ד) לכל a אינסופי ו n סופי מתקיֵם $n + a = \aleph_0 + a = a$ (לפי משפט העזר בסעיף 5). ∎

כפל.

יהיו a ו b מספרים מונים ויהיו A ו B קבוצות כך ש $|A| = a$ ו $|B| = b$. המספר המונה של $A \times B$ נקרא **המכפלה** של a ו b ומסֻמן ב ab. מההגדרה עולה ש $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

הערה:

(א) ההגדרה של המכפלה ab אינה תלויה במיצגים של המספרים המונים a ו b.

(ב) כפל מספרים מונים חלופי וצרופי.

(ג) מתקיֵם חק הפלוג $(a + b)c = ac + bc$.

(ד) $a_1 \leq b_1 \wedge a_2 \leq b_2 \Longrightarrow a_1a_2 \leq b_1b_2$

(ה) המכפלה של מספרים סופיים כמספרים מונים מתלכדת עם מכפלתם כמספרים מונים.

(ו) $0 \cdot b = 0$ לכל מספר מונה b. ∎

דגמאות:

(א) $n\aleph_0 = \aleph_0$ לכל n טבעי $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$

(ב) $\aleph\aleph = \aleph$ (ההוכחה נדחית עד לאחר הכנסת החזקה).

(ג) $n\aleph = \aleph_0\aleph = \aleph$ לכל n טבעי. ∎

העלאה בחזקה.

יהיו a ו b מספרים מונים ויהיו A ו B קבוצות כך ש $|A| = a$ ו $|B| = b$. המספר המונה של A^B נקרא a **בחזקת** b ומסֻמן ב a^b.

טענה: *ההגדרה של a^b אינה תלויה במיַצגים A ו B של a ו b בהתאמה.*

תכונות של העלאה בחזקה:

(א) $a^{b+c} = a^b a^c$ (כי $A^{B\cup C} \sim A^B \times A^C$).

(ב) $(ab)^c = a^c b^c$ (כי $(A\times B)^C \sim A^C \times B^C$).

(ג) $(a^b)^c = a^{bc}$ (כי $(A^B)^C \sim A^{B\times C}$).

(ד) $1^a = 1$, $a^1 = a$, $a^0 = 1$.

(ה) $a \le b \Longrightarrow a^c \le b^c \wedge c^a \le c^b$.

(ו) $|P(X)| = 2^{|X|}$. ∎

הוכחה ש $\aleph\aleph = \aleph$: $\aleph\aleph = 2^{\aleph_0}2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0+\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$. ∎

תרגיל:

(א) *מהי עצמת כל היְשרים במישור הממשי*

(ב) *מהי עצמת כל המישורים במרחב הממשי.*

משפטון: $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$.

הוכחה: $\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$. ∎

תרגיל:

(א) *הוכח שקבוצת כל הפונקציות הממשיות הרציפות $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שקולה לרצף.*

(ב) *שים לב לכך ש $\aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$ היא עצמת קבוצת כל הפונקציות הממשיות וזו גדולה מ $\aleph$.*

8. אקסיומת הבחירה

אקסיומת הבחירה מאפשרת לנו לבחור למשל גרב אחד מבין אינסוף זוגות גרבים. ההבדל בינה לבין אקסיומות אחרות הוא שהתוצאות המיָדיות ממנה אינן כל כך ברורות מאליהן כמו המסקנות מהאקסיומות האחרות.

אקסיומת הבחירה: *המכפלה הקרטזית של משפחה לא ריקה של קבוצות לא ריקות אינה ריקה.*

במלים אחרות, בהנתן קבוצה לא ריקה I ולכל $i \in I$ קבוצה לא ריקה A_i, קיֶמת העתקה $f\colon I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ כך ש $f(i) \in A_i$ לכל $i \in I$.

דוגמה: נקֻדה $x \in \mathbb{R}$ נקראת **נקֻדת גבול** של קבוצה X של מספרים ממשיים אם לכל $\varepsilon > 0$ קיָם $x \in X$ כך ש $|x - x_0| < \infty$.

טענה: *תהי x_0 נקֻדת גבול של קבוצת מספרים ממשיים אינסופית X. נניח ש $x_0 \notin X$. אזי קיֶמת סדרה אינסופית של אברים שוניה זה מזה של X מ x_0 המתכנסת ל x_0.*

ואכן, לפי ההנחה, $A_n = \{x \in X \mid |x - x_0| < \frac{1}{n}\} \neq \emptyset$ ו $A_{n+1} \subseteq A_n$. נסמן, $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. אזי קיֶמת סדרה אינסופית עולה של מספרים טבעיים $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ כך ש $B_{n_i} \neq \emptyset$ לכל i. אחרת, קיָם r כך ש $B_s = \emptyset$ לכל $s \geq r$, במִלים אחרות $A_r = A_{r+1} = A_{r+2} = \cdots$. כל $x \in A_r$ מקיָם $|x - x_0| < \frac{1}{s}$ לכל $s \geq r$. לכן, $x_0 = x \in A_r \subseteq X$, בסתירה להנחה על x_0. לפי אקסיומת הבחירה קיֶמת לכל i טבעי נקֻדה $x_{n_i} \in B_{n_i}$. הסדרה $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots)$ מקיֶמת את הדרישה. ∎

משפט החתך: *לכל העתקה על $f\colon X \to Y$ קיָם חתך.*

הוכחה: תהי f העתקה על מ X על Y. אזי, כל אחת מהקבוצות $f^{-1}(y)$ שבהן $y \in Y$ אינה ריקה. לפי אקסיומת הבחירה קיֶמת $g \in \prod_{y\in Y} f^{-1}(y)$. לכל $y \in Y$ מתקיֵם אפוא $g(y) \in f^{-1}(y)$ ולכן $f(g(y)) = y$. במִלים אחרות, g הנה חתך של f. ∎

מסקנה: *תהיינה X ו Y שתי קבוצות לא ריקות. אזי קיֶמת העתקה מ X על Y אם ורק אם $|Y| \leq |X|$.*

הוכחה: אם $|Y| \leq |X|$, אזי קיֶמת העתקה חד חד ערכית $g\colon Y \to X$. נסמן $X_0 = g(Y)$ ותהי $f_0\colon X_0 \to Y$ ההעתקה ההפוכה ל $g\colon Y \to X_0$. עתה נבחר $y_0 \in Y$ ונרחיב את f_0 להעתקה $f\colon X \to Y$ על ידי שנגדיר $f(x) = y_0$ לכל $x \in X \setminus X_0$. ההעתקה f הִנה על.

להפך, אם קיֶמת העתקה על מ X על Y, אזי לפי משפט החתך, קיֶמת העתקה חד חד ערכית מ Y לתוך X ולכן $|Y| \leq |X|$. ∎

מסקנה: *תהי $\{A_i \mid i \in I\}$ משפחה של קבוצות ויהי a מספר מונה כך ש $|A_i| \leq a$ לכל $i \in I$. אזי $|\bigcup_{i\in I} A_i| \leq a|I|$.*

הוכחה: נבחר קבוצה A מעצמה a. לכל $i \in I$ נבחר העתקה על $f_i\colon A \to A_i$. עתה נגדיר העתקה על $f\colon A \times I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ על ידי $f(a, i) = f_i$. לפי משפט החתך, $a|I| = |A \times I| \geq |\bigcup_{i \in I} A_i|$. ∎

תרגיל: *הוכח באמצעות אכסיומת הבחירה שאם* $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ *ו* X_i *הן קבוצות לא ריקות הזרות זו לזו, אזי* $|I| \leq |X|$.

ההוכחה שנתנו למשפטון הבא בסעיף 5 לא היתה מבֻססת כל צָרכה. נשתמש עתה באקסיומת הבחירה ובמשפט הנסיגה כדי לתת הוכחה מדֻיקת יותר.

משפטון: *אם* X *הנה קבוצה אינסופית, אזי* $|X| \leq \aleph_0$.

הוכחה: נסמן ב $P_{\mathrm{fin}}(X)$ את משפחת כל תת הקבוצות הסופיות של X. הואיל ו X אינסופית, לכל $A \in P_{\mathrm{fin}}(X)$ הקבוצה $X \setminus A$ אינה ריקה. לפי אקסיומת הבחירה קֶימת העתקה $\varphi\colon P_{\mathrm{fin}}(X) \to X$ כך ש $\varphi(A) \in X \setminus A$ לכל $A \in P_{\mathrm{fin}}(X)$. עתה נגדיר העתקה $\psi\colon P_{\mathrm{fin}}(X) \to P_{\mathrm{fin}}(X)$ על יד הנֻסחה $\psi(A) = A \cup \{\varphi(A)\}$. משפטון הנסיגה נותן העתקה $G\colon \mathbb{N} \to P_{\mathrm{fin}}(X)$ כך ש $G(1) = \emptyset$ ו $G(n+1) = \psi(G(n)) = G(n) \cup \{\varphi(G(n))\}$. בפרט, $\varphi(G(n)) \in G(n+1) \setminus G(n)$. השראה על n מוכיחה שאם $m < n$ אזי $\varphi(G(m)) \in G(n)$. לכן, $\varphi(G(m)) \neq \varphi(G(n))$. אם נגדיר אפוא $f\colon \mathbb{N} \to X$ על ידי $f(n) = \varphi(G(n))$, נקבל ש f חד חד ערכית. ואכן, אם $m < n$, אזי $f(m) = \varphi(G(m)) \in G(n)$ ו $f(n) = \varphi(G(n)) \notin G(n)$. לכן, $f(m) \neq f(n)$. ∎

9. הלמה של צורן

הלמה של צורן מחליפה במקרים רבים את האנדוקציה השלמה עבור קבוצות שאינן בנות מניה.

תהי X קבוצה. יחס $\leq$ על X נקרא **סדר חלקי** אם הוא מקיֵם את שלש הדרישות הבאות לכל $x, y, z \in X$:

(א) $x \leq x$.

(ב) אם $x \leq y$ ו $y \leq x$, אזי $x = y$.

(ג) אם $x \leq y$ ו $y \leq z$, אזי $x = z$.

במקרה זה הזוג $(X, \leq)$ נקרא **קבוצה סדורה חלקית.** נאמר שאברים x, y של X **נתנים להשואה** אם $x \leq y$ או $y \leq x$.

דגמאות:

(א) יחס ההכלה ב $P(X)$.

(ב) יחס הסדר במספרים טבעיים, ממשיים (במקרה זה כל שני אברים נתנים להשואה ואנו אומרים ש $\leq$ הוא **יחס סדר**).

(ג) יחס החֲלֻקה במספרים טבעיים.

(ד) תהיינה X ו Y קבוצות ותהי $\mathcal{F}(X, Y)$ קבוצת כל ההעתקות f מקבוצה חלקית $D(f)$ של X לתוך Y. בהנתן $f, g \in \mathcal{F}$ נגדיר $g \leq f$ כאשר $D(f) \leq D(g)$ ו $g|_{D(f)} = f$. אזי $\leq$ הוא יחס סדר חלקי על $\mathcal{F}$.

∎

תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית. תת קבוצה C של X תקרא **שרשרת** (chain) אם כל שני אברים ב C נתנים להשואה.

דגמה: הקבוצה $\{n! \mid n \in \mathbb{N}\}$ היא שרשרת ב $\mathbb{N}$ עם יחס החלֻקה כסדר חלקי. ∎

אבר $x_0 \in X$ נקרא **אבר מרבי** של X אם אין קיָם $x \in X$ כך ש $x_0 < x$. אבר x_0 מכֻנה **מזערי** אם אין קיָם $x \in X$ כך ש $x < x_0$.

דגמה: ב $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ עם יחס החלֻקה, המספרים הראשוניים הנם מזעריים. לעומת זאת, אין קיָם בקבוצה אבר מרבי.

∎

אם $A \subseteq X$ ו $m \in X$ מקיֵם $a \leq m$ לכל $a \in A$ אזי m נקרא **חסם מלעיל** של A. אם $m \geq a$ לכל $a \in a$, אזי m נקרא **חסם מלרע** של A.

אם $A \subseteq X$ ו $m \in X$ הוא חסם מלעיל של A המקיֵם $m \leq m'$ לכל חסם מלעיל של A, אזי m נקרא **חסם עליון** של A. במקרה זה נקבע m באפן יחיד ומסמנים $m = \sup(A)$.

אם $m \in X$ הוא חסם מלרע של A המקיֵם $m' \leq m$ לכל חסם מלרע של A אזי m נקרא **חסם תחתון** של A. במקרה זה נקבע m באפן יחיד ומסמנים $m = \mathrm{Inf}(A)$.

דגמה: $1 = \sup((0,1))$. ∎

הלמה של צורן מבטיחה קיום של אברים מרביים בקבוצה סדורה חלקית תחת תנאים מסֻימים. נסיק את הלמה הזו מתוך אקסיומת הבחירה ונתחיל בשני משפטי עזר. הראשון מביניהם דומה ללמה על נקֻדת השבת שקדמה למשפט קנטור־ברנשטיין.

משפט עזר א (נקֻדת שבת): *תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית לא ריקה. נניח שלכל שרשרת לא ריקה ב X יש חסם עליון. אזי לכל פונקציה $f\colon X \to X$ המקיֶמת $f(x) \geq x$ לכל $x \in X$ קיֶמת נקֻדת שבת, כלומר אבר $x_0 \in X$ המקיֵם $f(x_0) = x_0$.*

הוכחה: יהי a_0 אבר של X. קבוצה חלקית A של X תכֻנה **סגורה** (ביחס ל a_0) אם היא מקיֶמת את התנאים הבאים:

(א1) $a_0 \in A$.

(א2) $f(A) \subseteq A$.

(א3) אם C שרשרת ב A אזי, $\sup(C) \in A$.

לדֻגמה, X היא קבוצה סגורה. נסמן ב B את חתוך כל הקבוצות הסגורות. אזי B היא קבוצה סגורה המוכלת בכל קבוצה סגורה אחרת.

טענה ב: $a_0 \in B$ ו $a_0 \leq B$. ואכן, $A_0 = \{x \in X \mid a_0 \leq x\}$ היא קבוצה סגורה ולכן $B \subseteq A_0$.

טענה ג: *נסמן* $E = \{e \in B \mid (\forall b \in B)[b < e \to f(b) \leq e]\}$. *לכל* $e \in E$ *נסמן*

$$B_e = \{b \in B \mid \ b \leq e \vee f(e) \leq b\}.$$

אזי, $B = B_e$.

ואכן, לפי ההגדרה, $B_e \subseteq B$. בנוסף לזה, B_e סגורה ולכן $B \subseteq B_e$. כדי להוכיח ש B_e סגורה נשים לב קודם לכך ש $a_0 \in B$ ו $a_0 \leq e$ (לפי טענה א) ולכן $a_0 \in B_e$. שנית, יהי $b \in B$. אם $b < e$, אזי $b \leq f(b) \leq e$ (לפי ההנחה על f ולפי הגדרת E). אם $b = e$ אזי $b \leq f(b) = f(e)$. ואם $f(e) \leq b$, אזי $f(e) \leq b \leq f(b)$. בכל מקרה $f(b) \in B_e$. בסופו של דבר, תהי C שרשרת ב B_e. יהי m חסם עליון של C. אם $b \leq e$ לכל $b \in C$, אזי $m \leq e$. אם קיָם $b \in C$ כך ש $b \not\leq e$, אזי $f(e) \leq b \leq m$. בכל מקרה $m \in B_e$.

טענה ד: *אם* $e \in E$ *ו* $b \in B$*, אזי* $b \leq e$ *או* $f(e) \leq b$.

ואכן, לפי טענה ג, $b \in B_e$.

טענה ה: E *קבוצה סגורה.* קודם כל, התנאי $b < a_0$ אינו מתקיֵם לשום $b \in B$ (לפי טענה ב). לכן, התנאי $b < a_0 \to f(b) \le a_0$ מתקיֵם לכל $b \in B$. מכאן ש $a_0 \in E$. כדי להוכיח ש $f(E) \subseteq E$ נתבונן באבר $e \in E$ ויהי $b \in B$ כך ש $b < f(e)$. לפי טענה ד, $b \le e$. אם $b = e$, אזי $f(b) = f(e)$. אם $b < e$, אזי לפי הגדרת E, $f(b) \le e \le f(e)$. הוכחנו אפוא ש $b < f(e) \to f(b) \le f(e)$. לכן, $f(e) \in E$.

לבסוף עלינו להוכיח שהחסם העליון m של כל שרשרת C ב E שיך ל E. לשם כך נתבונן באבר $b \in B$ המקיֵם $b < m$. עלינו להוכיח ש $f(b) \le m$. אִלו היה $c \le b$ לכל $c \in C$ היינו מקבלים ש b חסם מלעיל של C ולכן $m \le b$, סתירה. לכן קיָם $c \in C$ כך ש $c \not\le b$. אולם $c \in E$ ולכן $b \le c$ או $f(c) \le b$ (לפי טענה ד). האפשרות $b = c$ או $f(c) \le b$ גוררת אחריה ש $c \le b$ ולכן לא תתכן. לכן, $b < c$, ולכן, $f(b) \le c \le m$, כנדרש.

טענה ו: $E = B$. כי $E \subseteq B$ ו E סגורה (ולכן $B \subseteq E$).

טענה ז: B *היא שרשרת ב* X. ואכן, יהיו $b, e \in B$. אזי, לפי טענה ו, $b, e \in E$. נניח בשלילה ש $b \not\le e$ ו $e \not\le b$. אזי, לפי טענה ד, $f(b) \le e$ ו $f(e) \le b$. לכן, $e \le f(e) \le b$, בסתירה להנחה.

סיום ההוכחה: יהי $m = \sup(B)$. אזי, $f(m) \in B$. לכן $m \le f(m) \le m$ ומכאן ש $m = f(m)$ כנדרש. ∎

משפט עזר ב: *בכל קבוצה לא ריקה סדורה חלקית יש שרשרת מרבית.*

הוכחה: תהי $(X, \le)$ קבוצה סדורה חלקית. נניח בשלילה שאין בה שרשרת מרבית. נסמן ב $\mathcal{C}$ את קבוצת כל השרשראות. נסדר אותה לפי הכלה היא מקיֶמת את הטענות הבאות:

(ב1) האחוד של כל שרשרת שרשראות הוא שרשרת המשמשת אפוא חסם עליון לשרשרת השרשראות.

(ב2) לכל $C \in \mathcal{C}$ הקבוצה $\{D \in \mathcal{C} \mid C \subset D\}$ אינה ריקה, לפי הנחת השלילה.

לפי אקסיומת הבחירה קיֶמת פונקציה $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ המקיֶמת $C \subset f(C)$ לכל $C \in \mathcal{C}$. לפונקציה זו אין נקֻדת שבת, בסתירה למשפט עזר א. ∎

הלמה של צורן: *תהי* $(X, \le)$ *קבוצה סדורה חלקית לא ריקה. נניח שלכל שרשרת לא ריקה ב* X *יש חסם מלעיל. אזי יש ב* X *אבר מרבי.*

הוכחה: לפי משפט עזר ב יש ב X שרשרת מרבית C. יהי $\bar{x}$ חסם מלעיל של C. אזי $\bar{x}$ הוא אבר מרבי של X (אם $\bar{x} < x$ אזי $C \cup \{x\}$ היא שרשרת המקיפה ממש את C). ∎

גרסה חלופית ללמה של צורן: *תהי* $(X, \le)$ *קבוצה סדורה חלקית לא ריקה. נניח שלכל שרשרת לא ריקה ב* X *יש חסם תחתון. אזי יש ב* X *אבר מזערי.*

הוכחה: נגדיר סדר חדש $\le'$ על X כך ש $y \le' x$ אם $x \le y$. לפי הלמה של צורן קיָם ב X אבר מרבי m ביחס ל $\le'$. הוא יהיה אבר מזערי ביחס לסדר $\le$. ∎

9. יִשומים של הלמה של צורן

נתחיל בסדרת ישומים של הלמה של צורן לתורת הקבוצות עצמה.

משפט ההשואה: *תהיינה X ו Y קבוצות. אזי אחת מהן שקולה לתת קבוצה של האחרת.*

הוכחה: נסמן ב $\mathcal{F}$ את משפחת כל הזוגות (A, f) שבהן $A \subseteq X$ ו $f\colon A \to Y$ היא פונקציה חד חד ערכית. נגדיר סדר חלקי על $\mathcal{F}$ על ידי $(A, f) \le (A', f')$ אם $A \subseteq A'$ ו $f'|_A = f$. האחוד של שרשרת עולה של אברי $\mathcal{F}$ שיָך ל $\mathcal{F}$ ומהוה אפוא חסם מלעיל לשרשרת. לפי הלמה של צורן קיָם ב $\mathcal{F}$ אבר מרבי (B, g). בפרט g מעתיק את B באפן חד חד ערכי על תת קבוצה C של Y. אם $B = X$ או $C = Y$, סיַמנו. אחרת קיָמים $x' \in X \setminus B$ ו $y' \in Y \setminus C$. נסמן $B' = B \cup \{x'\}$ ונגדיר פונקציה $g'\colon B' \to Y$ על ידי $g'(x) = g(x)$ אם $x \in B$ ו $g'(x') = y'$. אזי (B', g') שיָך ל $\mathcal{F}$ וגדול ממש מ (B, g), בסתירה למרביות של הזוג (B, g). ∎

מסקנה: *כל שני מספרים מונים נתנים להשואה.*

משפט הסכום: *כל מספר מונה a אינסופי מקיֵם $a + a = a$.*

הוכחה: תהי X קבוצה כך ש $a = |X|$. נתבונן במשפחת כל הזוגות (A, f) שבהן $A \subseteq X$ ו $f\colon A \times \{0, 1\} \to A$ העתקה חד חד ערכית על. נגדיר יחס סדר חלקי על $\mathcal{F}$ על ידי "$(A, f) \le (A', f')$ אם $A \subseteq A'$ ו $f = f'|_{A \times \{0,1\}}$". הלמה של צורן מספקת לנו אבר מרבי (B, g) של $\mathcal{F}$. נניח בשלילה שהקבוצה $X \setminus B$ אינסופית. אזי קיֶמת בה סדרה אינסופית $x_0, x_1, x_2, \dots$. נסמן $B' = B \cup \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. נגדיר העתקה $g'\colon B' \times \{0, 1\} \to B'$ באפן הבא: $g'(x, \varepsilon) = g(x, \varepsilon)$ אם $(x, \varepsilon) \in B \times \{0, 1\}$, $g'(x_n, 0) = x_{2n}$ ו $g'(x_n, 1) = x_{2n+1}$. אזי g' חד חד ערכית על ו $(B, g) < (B', g')$, בסתירה למרביות של (B, g). מסתירה זו נובע ש $X \setminus B$ סופית. לכן,

$$a = |B| = |B \times \{0, 1\}| = |(B \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})| = a + a. \quad ∎$$

מסקנה: *אם Y קבוצה אינסופית, X קבוצה חלקית ו $|X| < |Y|$, אזי $|Y| = |Y \setminus X|$.*

הוכחה: נניח בשלילה ש $|Y \setminus X| < |Y|$. נגדיר לפי המסקנה ממשפט ההשואה $a = \max(|X|, |Y \setminus X|)$. אזי

$$|Y| = |Y \setminus X| + |X| \le a + a = a < |Y|,$$

סתירה. ∎

תרגיל: *יהיו a ו b מספרים מונים כך ש b אינסופי ו $a \le b$. אזי $a + b = b$.*

משפט המכפלה: *כל מספר מונה אינסופי מקַיֵם* $aa = a$.

הוכחה: תהי X קבוצה כך ש $a = |X|$. נתבונן בקבוצה $\mathcal{F}$ של כל הזוגות (A, f) שבהן $A \subseteq X$ ו $f\colon A \times A \to A$ חד חד ערכית על. נגדיר סדר חלקי על $\mathcal{F}$ על ידי "$(A, f) \le (A', f')$ אם $A \subseteq A'$ ו $f'|_{A\times A} = f$". הלמה של צורן מסַפקת אבר מרבי (B, g) ב $\mathcal{F}$. מספיק אפוא שנוכיח את הטענה הבאה:

טענה: $|X| = |B|$. ואכן, נניח בשלילה ש $|X| > |B|$. אזי לפי המסקנה האחרונה, $|X \setminus B| = |X|$. לכן, B שקולה לתת קבוצה B' של $X \setminus B$. לכן,

$$|B \times B'| = |B' \times B| = |B' \times B'| = |B \times B| = |B| = |B'|.$$

לכן, לפי משפט הסכום,

$$\begin{aligned}|(B \times B') \cup (B' \times B) \cup |B' \times B')| &= |B \times B'| + |B' \times B| + |B' \times B'| \\ &= |B'| + |B'| + |B'| = |B'|\end{aligned}$$

קיֶמת אפוא פונקציה חד חד ערכית על $h\colon (B \times B') \cup (B' \times B) \cup (B' \times B') \to B'$. הפונקציה $j = g \cup h$ מ $(B \cup B') \times (B \cup B')$ ל $B \cup B'$ היא חד חד ערכית ועל בסתירה למרביות של (B, g). ∎

תרגיל: *יהיו* a *ו* b *מספרים מונים כך ש* $a \le b$, $a \ne 0$ *ו* b *אינסופי. הוכח ש* $ab = b$.

תרגיל: *יהיו* a *ו* b *מספרים מונים כך ש* $a \le b$, $a > 1$ *ו* b *אינסופי. הוכח ש* $a^b = 2^b$.

תרגיל: *תהי* X *קבוצה אינסופית. הוכח שקים פֵּרוד של* X *לקבוצות חלקיות בנות מניה. כלומר שקיֶמת משפחה* $\{A_i \mid i \in I\}$ *של קבוצות בנות מניה חלקיות ל* X *הזרות זו לזו כך ש* $X = \dot\bigcup_{i\in I} A_i$. *רמז: השתמש בלמה של צורן.*

תרגיל: *הוכח בעזרת הלמה של צורן: אם* X *הנה קבוצה בעלת יותר מאבר אחד, אזי קיֶמת תמורה* f *של* X *כך ש* $f(x) \ne x$ *לכל* $x \in X$.

תרגיל: *הוכח בעזרת הלמה של צורן שכל סדר חלקי של קבוצה* X *נִתן להרחבה לסדר (שלם) של* X.

עתה נביא דֻגמה לשמוש של הלמה של צורן לאלגברה לינארית.

משפט הבסיס: *יהי* V *מרחב וקטורי מעל שדה* F.

(א) *קים ל* V *בסיס* B.

(ב) *אם* B_0 *היא תת קבוצה של* V *שאינה תלויה לינארית, אזי נִתן לבחור את* B *כך שיקיף את* B_0.

(ג) *אם* B' *הוא בסיס נוסף של* V, *אזי* $|B| = |B'|$.

*העצמה המשֻתפת של כל הבסיסים של V תקרא **הממד** של V.*

הוכחת (א) ו (ב): מהלמה של צורן נובע שקיֶמת קבוצה לא תלויה לינארית מרבית B המקיפה את B_0. היא תהיה בסיס של V.

הוכחת (ג): האלגברה הלינארית הבסיסית מטפלת במקרה ש B סופית. לכן, נוכל להניח ש B ו B' אינסופיות. נרשם $B = \{v_i \mid i \in I\}$ ו $B' = \{u_j \mid j \in J\}$ כך ש $v_i \neq v_{i'}$ אם $i \neq i'$ ו $u_j \neq u_{j'}$ אם $j \neq j'$. בפרט, $|B| = |I|$ ו $|B'| = |J|$.

לכל $i \in I$ קיָמים $\alpha_{ij} \in F$ אשר כמעט כֻלם אפס כך ש $v_i = \sum_{j \in J} \alpha_{ij} u_j$. הקבוצה $J_i = \{j \in J \mid \alpha_{ij} \neq 0\}$ סופית.

טענה: $J = \bigcup_{i \in I} J_i$. ואכן, יהי $j \in J$. אזי קיָמים $\beta_{ji} \in F$ שלא כֻלם אפס כך ש $u_j = \sum_{i \in I} \beta_{ji} v_i$. לכן,

$$u_j = \sum_{i \in I} \beta_{ji} \sum_{k \in J} \alpha_{ik} u_k = \sum_{k \in J} \big(\sum_{i \in I} \beta_{ji} \alpha_{ik}\big) u_k$$

השואת המקדמים של u_j בשני האגפים נותנת $\sum_{i \in I} \beta_{ji} \alpha_{ij} = 1$. מכאן שקים $i \in I$ כך ש $\alpha_{ij} \neq 0$. לכן, $j \in J_i$.

מהטענה נובע ש $|B'| = |J| = |\bigcup_{i \in I} J_i| \leq \aleph_0 \cdot |I| = |I| = |B|$. באפן סימטרי, $|B| \leq |B'|$. לפי משפט קנטור־ברנשטיין, $|B| = |B'|$. ∎

פונקציה $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ תכֻנה **חבורית** אם $f(x+y) = f(x) + f(y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$.

מסקנה: *קיֻמות פונקציות חבוריות $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שאינן רציפות.*

הוכחה: נראה את $\mathbb{R}$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$. יהי B בסיס של $\mathbb{R}$ מעל $\mathbb{Q}$ (בסיס כזה נקרא **בסיס** Hamel). נבחר $b_0 \in B$, $b_0 \neq 1$, ונגדיר $f\colon B \to \mathbb{R}$ על ידי $f(b_0) = 1$ ו $f(b) = 0$ לכל $b \in B \smallsetminus \{b_0\}$. עתה נרחיב את f לפונקציה על כל $\mathbb{R}$ באפן לינארי. במלים אחרות, נגדיר $f(\sum_{b \in B} \alpha_b b) = \sum_{b \in B} \alpha_b f(b)$, באשר ה α_b־ים רציונליים וכמעט כֻלם אפס. פונקציה זו מקיֶמת $f(x+y) = f(x) + f(y)$ לכל $x, y \in \mathbb{R}$. מכאן ש $f(0) = 0$ ו $f(-x) = -f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. אם n טבעי, אזי $f(x) = f\big(n\frac{x}{n}\big) = nf\big(\frac{x}{n}\big)$, ולכן $f\big(\frac{x}{n}\big) = \frac{1}{n} f(x)$. מכאן ש $f\big(\frac{m}{n}x\big) = mf\big(\frac{x}{n}\big) = \frac{m}{n} f(x)$ לכל m טבעי. מכל זה עולה ש $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ לכל $\alpha \in \mathbb{Q}$. אלו היתה f רציפה, היינו מקבלים שהנֻסחה האחרונה תקפה לכל $\alpha \in \mathbb{R}$. בפרט, $f(v_0) = v_0 f(1) = 1$. לכן, $f(1) \neq 0$, בסתירה להגדרת f. ∎

קבוצות סדורות היטב.

על קבוצה סדורה $(X, \leq)$ אומרים שהיא **סדורה היטב** אם כל שני אברים ב X נתנים להשוָאה ואם לכל קבוצה חלקית של X יש אבר ראשון.

לדוגמה, $\mathbb{N}$ סדורה היטב, אולם $\mathbb{Z}$ והקטע הסגור $[0,1]$ אינם סדורים היטב.

משפט הסדר הטוב: *כל קבוצה נִתנת לסדור טוב.*

הוכחה: מתבוננים במשפחת הקבוצות הסדורות היטב $(A,\leq)$ שעבורן $A\subseteq X$. מגדירים $(A,\leq)\leq(A',\leq')$ אם A הוא **רישא** של B כלומר, $A\subseteq B$, הצמצום של $\leq'$ ל A מתלכד עם $\leq$, ומתקיֵם: אם $a\in A$, $a'\in A'$ ו $a'\leq a$, אזי $a'\in A$. האחוד של שרשרת של קבוצות סדורות היטב כאלו מהוה חסם עליון לשרשרת. לפי הלמה של צורן יש במשפחה קבוצה סדורה היטב מרבית $(A,\leq)$. אם $x\in X\smallsetminus A$ נוסיף את x בסוף A ונסתֹר את המרביות של A. לכן $A=X$ ו X סדורה היטב. ∎

השערת הרצף.

הראינו ש $\aleph_0<2^{\aleph_0}$. הטענה "אין קיָם מספר מונה a בין $\aleph_0$ ל $2^{\aleph_0}$" מכֻנה **השערת הרצף.** Kurt Gödel הוכיח שקים מודל של תורת הקבוצות שבו השערת הרצף נכונה. במלים אחרות, קיֶמת קבוצה של קבוצות המקיֶמת את כל האקסיומות הרגילות שהשתמשו בהן ואין בה שום קבוצה שעצמתה גדולה מ $\aleph_0$ וקטנה מ $2^{\aleph_0}$. מצד שני בנה פול כהן מודל של תורת הקבוצות ובו קבוצה שעצמתה בין $\aleph_0$ ו $2^{\aleph_0}$. משתי הבניות עולה שלא השערת הרצף ולא שלילתה נתנות להוכחה מהאקסיומות הרגילות של תורת הקבוצות.

ספרות

א.אברון, מבוא למתמטיקה בדידה, אוניברסיטת תל אביב

ש. ברגר, תורת הקבוצות, האוניברסיטה הפתוחה, 1998.

א. שמוקלר, מבוא לתורת הקבוצות אקדמון, תשמ.

מפתח העניינים