

חזו"א 1 - תרגיל מס' 7

1. הוכיחו לפי הגדרת הגבול של היינה:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x^2-6} = -3 \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-x-1}{x-1} = 1 \quad (\text{ב})$$

2. הוכיחו לפי הגדרת הגבול של קושי:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2+x^4} = \infty \quad (\text{ב})$$

3. האם הטענות הבאות נכונות - הוכיחו או הפריכו:

(א) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם ורק אם לכל $\delta > 0$ קיים $\varepsilon > 0$ כך שהתנאי $0 < |x - a| < \delta$ גורר $0 < |f(x) - L| < \varepsilon$.

(ב) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שהתנאי $0 < |x - a| < \delta$ גורר $|f(x) - L| < 10\varepsilon$.

(ג) אם $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ ו- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ אז גם $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

4. הראו כי הגבולות הבאים אינם קיימים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin(x) \quad (\text{א})$$

(ב) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ כאשר הפונקציה $f(x)$ מוגדרת באופן הבא: עבור $x = 5$ ו- $f(x) = \frac{|x-5|}{x-5}$ עבור $x \neq 5$.

5. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ ו- $g(x) > 1$ לכל x אזי $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \infty$.

(ב) אם $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ אזי $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 0$.

6. נתון שהפונקציה f מונוטונית בקטע הסגור $[a, b]$. הוכיחו שקיימים הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ו- $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$. האם שני הגבולות בהכרח סופיים?

7. (א) תנו דוגמה לפונקציה f כך שהגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ אינו קיים, אך הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ קיים עבור $n \in \mathbb{N}$.

(ב) האם יתכן מצב הפוך, כלומר $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ קיים, אך $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$ אינו קיים?

(ג) הוכיחו ש- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. מותר להסתמך על התוצאה המקבילה שהוכחנו לסדרות.

8. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) בהנחה שידוע: $1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{24} - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$ חשבו: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$

(ב) עבור $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

(ג) הוכיחו על סמך סעיף קודם כי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1}{x} = \frac{1}{n}$ עבור $n \in \mathbb{N}$.

(ד) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$

(ה) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(ו) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

(ז) עבור $a, b > 0$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$

9. הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right)$