חדו"א 1 ־ תרגיל מס' 11

1. תהי f גזירה n פעמים בקטע (a,b). נתון כי $f(x_0)=f(x_1)=\ldots=f(x_n)$ כאשר
$$a<x_0<x_1<\ldots<x_n<b$$
הוכיחו כי קיים $c\in(a,b)$ כך ש $f^{(n)}(c)=0$.

2. נתון $f'(x)=c$ לכל $x\in(a,b)$. הוכיחו כי קיים d כך ש $f(x)=cx+d$ לכל $x\in(a,b)$.

3. הוכיחו את אי־השיוויונים הבאים:
   (א) $|\arctan x-\arctan y|\le|x-y|$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
   (ב) $1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1$ לכל $x>1$.

4. מי יותר גדול π^e או e^π ? (רמז: הביטו בפונקציה $x/e-\ln x$ עבור $x>e$).

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה המקיימת $|f(x)-f(y)|\le(x-y)^2$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי f קבועה.

6. תהי $f:[a,b]\to[a,b]$ רציפה ב־ $[a,b]$ וגזירה ב־ (a,b). נניח ש־ $|f'(x)|\le 1/2$ לכל $x\in(a,b)$. הוכיחו כי ל־ f קיימת נקודת שבת **יחידה** ב־ $[a,b]$.

7. (א) תהי f גזירה בקטע (x_0,∞) המקיימת $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$ ו־ $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(x_0,\infty)$ כך ש־ $f'(c)=0$.
   (ב) תהי f גזירה בקטע $(0,\infty)$ ומקיימת $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$. הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

8. יהי n מספר טבעי. כמה פעמים ניתן לגזור את הפונקציה
$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin(1/x) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$
בנקודה $x=0$?

9. תהי $f:(-\pi/2,\pi/2)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f(0)=0, f'(0)=1$ ו־
$$f''+f\equiv 0.$$
   (א) הכפילו את המשוואה ב־ $2f'$ והסיקו ש־ $(f')^2+f^2$ היא פונקציה קבועה ב־ $(-\pi/2,\pi/2)$. למה שווה הקבוע?
   (ב) הסיקו שערכי f שייכים תמיד לקטע $[-1,1]$. נסמן $g(x)=\arcsin f(x)$. הראו כי $g'(x)=1$ עבור כל $-\pi/2<x<\pi/2$ עם $|f(x)|\neq 1$.
   (ג) הוכיחו ש־ $g(x)=x$ ו־ $f(x)=\sin x$ בסביבה של 0.
   (ד) הוכיחו ש־ $f(x)=\sin x$ לכל $x\in(-\pi/2,\pi/2)$.

10. (א) תהי f פונקציה בעלת נגזרת חסומה ב־ $\mathbb{R}$. הוכיחו ש־ f רציפה במידה שווה ב־ $\mathbb{R}$. (למעשה, f מקיימת תנאי ליפשיץ.)
    (ב) תהי f פונקציה בעלת נגזרת חסומה ב־ (a,b). הוכיחו ש־ $\lim_{x\to a^+}f(x)$ ו־ $\lim_{x\to b^-}f(x)$ קיימים וסופיים.
    (ג) תנו דוגמא לפונקציה $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ בעלת גבולות סופיים בקצות הקטע, כך ש־ f' אינה חסומה ב־ $(0,1)$.

11. נניח ש־ f גזירה פעמיים ב־ x_0. הוכיחו כי
$$f''(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}.$$

12. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי $a_{n+1}=\cos(a_n)$ עבור $n\in N$ כאשר a_0 מספר ממשי כלשהו. הוכיחו כי $\{a_n\}$ מתכנסת.