

חדו"א 1 - תרגיל 10

1. חשבו את הנגזרת של הפונקציות הבאות בתחום הגדרתן:

- (א) $\sin(e^x)$
- (ב) $\log(x - \sqrt{1 - x^2})$
- (ג) $(\log x)^\alpha$
- (ד) x^{x^x}
- (ה) $\arctan(-\log^2 x)$

2. נניח ש- f פונקציה רציפה בנקודה x_0 . הוכיחו ש-

$$g(x) = (x - x_0)f(x)$$

גזירה בנקודה x_0 . למה שווה $g'(x_0)$?

3. (א) באילו נקודות הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

גזירה? חשבו את הנגזרת בנקודות בה היא קיימת. האם הנגזרת רציפה?

(ב) האם ייתכן שהישר המשיק יחתוך את גרף הפונקציה אינסוף פעמים?

4. (א) נסמן

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

תהי $a \neq 0$ נקודה כלשהי. הוכיחו שהמשיק ל- f בנקודה a נחתך עם גרף הפונקציה f בנקודה $(a, 1/a)$ בלבד. ציירו תרשים מתאים.

(ב) מיצאו את הזווית בין המשיקים לגרפים של הפונקציות $f(x) = 8 - x$ ו- $g(x) = 4\sqrt{x+4}$ בנקודות החיתוך שלהם. ציירו תרשים מתאים.

5. תהי f פונקציה גזירה בנקודה x . הוכיחו ש-

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

6. (א) נניח ש- f_1, \dots, f_n פונקציות גזירות בנקודה x_0 . מיצאו ביטוי לנגזרת המכפלה

$$(f_1 f_2 \dots f_n)'(x_0)$$

(ב) יהיו מספרים ממשיים, $x_1 < \dots < x_n$ ויהי $1 \leq \ell \leq n$ מספר טבעי. נסמן

$$Q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad P(x) = \frac{Q(x)}{(x - x_\ell)Q'(x_\ell)}.$$

(לכאורה P אינה מוגדרת בנקודה x_ℓ . למען הסדר הטוב והרציפות, נגדיר כמובן את $P(x_\ell)$ להיות $\lim_{x \rightarrow x_\ell} P(x)$). הוכיחו ש- P הוא פולינום ממעלה $n - 1$ המקיים

$$(1) \quad P(x_i) = \begin{cases} 1 & i = \ell \\ 0 & i \neq \ell \end{cases}$$

האם לדעתכם יש פולינומים נוספים ממעלה $n - 1$ המקיימים את תכונה (1)?