חדו"א 1 - תרגיל בית מס' 11

1. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x)=x+|\sin(2x)|$

(ב) $f(x)=e^{-x}(x-2)^2$

(ג) $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$

2. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות (ציינו את תחום ההגדרה של הפונק' ואת סוג נק' הקיצון):

(א) $f(x)=x^3\sqrt{x-1}$

(ב) $f(x)=\sin x+\cos x$

(ג) $f(x)=\left|x^2-4x+3\right|$

3. מצאו נק' מינימום/מקסימום גלובליים עבור הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

(א) $f(x)=2^x-3^x$ כאשר $x\in[-2,5]$

(ב) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ כאשר $x\in\left[\alpha,\frac{1}{\alpha}\right]$ עבור $\alpha\in(0,1)$.

(ג) $f(x)=\sin^2 x+\cos^3 x$ כאשר $x\in[0,2]$.

4. היעזרו במשפט קושי כדי להוכיח את אי-השיוויונות הבאים: (אפשר להיעזר באי-שיוויונות מהתרגול)

(א) $\cos x<1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ כאשר $x\neq 0$

(ב) $\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ כאשר $x>0$

5. הוכיחו את אי-השיוויונות הבאים:

(א) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\arctan x>1$ כאשר $x>0$

(ב) $2x\arctan x\geq\log\left(1+x^2\right)$ לכל $x\in\mathbb{R}$

(ג) $x^m(1-x)^n\leq\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ כאשר $x\in[0,1]$ ו $m,n\in\mathbb{N}$

(ד) $(e+x)^{e-x}\geq(e-x)^{e+x}$ כאשר $x\in(0,e)$

(ה) ★ $(1+x)^{\alpha}\leq 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{8}\cdot x^2$ כאשר $\alpha\in(0,1)$ ו $x\in[-1,1]$

6. נתון כי $f \in C^{(2k)}\left((a,b)\right)$. כמו כן ידוע כי בנקודה $c \in (a,b)$ מתקיים $f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(2k-1)}(c) = 0$ הוכיחו כי אם $f^{(2k)}(c) > 0$ אזי c היא נק' מינימום מקומי מוחלט ואם $f^{(2k)}(c) < 0$ אזי c היא נק' מקסימום מקומי מוחלט.

7. הוכיחו את כלל לייבניץ לנגזרות. אם f, g פונקציות גזירות n פעמים בנקודה x_0 אזי:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) \cdot g^{(n-k)}(x_0)$$

8. נתונה הסדרה $a_1 = \frac{\pi}{4}$, $a_n = \cos(a_{n-1})$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ כאשר α הוא הפתרון של המשוואה $\cos x = x$.
<u>רמז:</u> היעזרו במשפט לגרנז'.

9. הוכיחו כי למשוואות $\sin(\cos x) = x$ ו $\cos(\sin x) = x$ יש פתרון יחיד ב $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ נסמן ב x_1, x_2 את הפתרונות למשוואות בהתאמה. הראו כי $x_1 < x_2$.

10. תהי $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים המקיימת $f'(0) = 1$, $f(0) = 0$ ו $f'' + f \equiv 0$.

(א) הכפילו את המשוואה ב $2f'$ והסיקו ש $(f')^2 + f^2$ היא פונקציה קבועה בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. למה שווה הקבוע ?

(ב) הסיקו כי ערכי f שייכים לקטע $[-1,1]$. נסמן $g(x) = \arcsin f(x)$, הראו כי $g'(x) = 1$ לכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ כך שמתקיים עבורו $|f(x)| \neq 1$.

(ג) הוכיחו כי $g(x) = x$ ו $f(x) = \sin x$ בסביבה של 0.

(ד) הראו כי $f(x) = \sin x$ לכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. נתונה הפונקציה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^a & , \quad x > 0 \\ \frac{e^{bx}-1}{cx} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

בידקו עבור אילו ערכים של הפרמטרים a, b, c ניתן להגדיר את $f(0)$ כך ש $f(x)$ היא ב $C(\mathbb{R}), C^1(\mathbb{R}), C^2(\mathbb{R})$.

12. נתונה הפונקציה: $f(x) = x + (1-x)\sin^2 x$.

(א) הוכיחו כי לכל $x \in (0,1)$ מתקיים: $x \le f(x) \le 1$.

(ב) יהי $a_0 \in (0,1)$. נגדיר סדרה רקורסיבית באופן הבא: $a_n = f(a_{n-1})$ לכל $n \in \mathbb{N}$. הראו כי a_n סדרה מתכנסת.

(ג) חשבו את הגבול של הסדרה a_n.

13. ★ נתון כי הפונקציה f גזירה בקטע $[a,b]$ ומתקיים $f(a) = 0$, $|f'(x)| \le M\,|f(x)|$ לכל $x \in [a,b]$ ($M \in \mathbb{R}_+$). הוכיחו כי $f(x) = 0$ לכל $x \in [a,b]$.

14. ★ היעזרו במשפט לגרנז' כדי להוכיח את אי־השיווין:

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < \left(1 + \frac{x}{q}\right)^q$$

כאשר $x > 0$ ו $0 < p < q$.