חדו"א 1 ‑ תרגיל בית מס' 12

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xa^x}{a^x-1}$ כאשר $a>0$ ו $a\neq 1$

(ב) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(5x)}{e^{3x}-3x-1}$

(ג) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\log x}$

(ד) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^x$

(ה) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-\cos x}{4x+\sin x}$

(ו) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-(x+1)}{\tan x-\sin x}$

(ז) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}$

(ח) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right)$

(ט) $\lim\limits_{x\to 5}(6-x)^{\frac{1}{x-5}}$

(י) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(יא) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

2. האם ניתן להיעזר במשפט לופיטל לצורך חישוב הגבולות הבאים ?

(א) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin 2x+1}{(2x+\sin 2x)(\sin x+3)^2}$

(ב) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\right)^x$

3. הוכיחו את הטענה הבאה בעזרת משפט לופיטל: הפונקציה f גזירה ב $(0,\infty)$ ו $a>0$. אם $\lim\limits_{x\to\infty}\left(af(x)+2\sqrt{x}f'(x)\right)=L$ אזי $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{L}{a}$. האם הטענה נכונה גם במקרה ש $a<0$?

4. חשבו את פיתוח טיילור מסדר n של הפונקציות הבאות סביב הנק' x_0:

(א) $f(x)=2^x$, $x_0=0$, $n=3$

(ב) $f(x)=\log(\cos x)$, $x_0=0$, $n=4$

(ג) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=1$, $n=4$

(ד) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $x_0=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ($\alpha\neq 0$). חשבו מהי השארית בצורת לגרנז'.

5. הוכיחו את אי־השיוויונות הבאים (עבור $x>0$):

(א) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}<\log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

(ב) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}<\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}$

6. נתון כי f פונקציה גזירה ב $[0,1]$ ומתקיים $f(0)=f(1)=0$. בנוסף נתון כי $|f''(x)|\leq A$ ב $(0,1)$. הוכיחו כי

$$|f'(x)|\leq\frac{A}{2},\quad\forall x\in[0,1]$$

7. נתון כי f גזירה פעמיים ב $[a,b]$ ומתקיים $f'(a)=f'(b)=0$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש

$$|f''(c)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

8. תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב $\mathbb{R}$, כך ש $M_k=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|<\infty$ עבור $k=0,1,2$ (כלומר הפונקציה ושתי הנגזרות הראשונות שלה חסומות ב $\mathbb{R}$). הוכיחו כי $M_1^2\leq 2M_0M_2$.
רמז: לכל $a\in\mathbb{R}$ פתחו את $f(a\pm t)$ פיתוח טיילור מסדר ראשון סביב a והוכיחו כי $2M_1t\leq 2M_0+M_2t^2$ לכל t.

9. נתון כי f גזירה שלוש פעמים ב $[-1,1]$ ומקיימת $f(0)=f(-1)=f'(0)=0$, $f(1)=1$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(-1,1)$ כך ש $f^{(3)}(c)\geq 3$.

10. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה המקיימת את המשוואה:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ ו $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(א) נתון כי f גזירה פעמיים ב $\mathbb{R}$, הוכיחו כי f פולינום מדרגה 2.

(ב) ★★ הוכיחו כי f היא פולינום מדרגה 2 בעזרת הנתון בלבד (בלי להניח כי f גזירה פעמיים).