חדו"א 1 - תרגיל 21

21 בינואר 2009

1. הוכיחו שלמשוואה $x^{2k+1}+ax^2+b=0$ יש לכל היותר 3 פתרונות ממשיים. ($k>0$ שלם)

2. מצאו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{xa^x}{a^x-1}$ כש- $a>0$ ו- $a\neq 1$.

(ב) $\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(5x)}{e^{3x}-3x-1}$

(ג) $\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{ln(x)}$

(ד) $\lim_{x\to\infty}\frac{ln(x)}{x^k}$ כש- $k>0$ שלם.

(ה) $\lim_{x\to 0+}(sin(x))^x$

(ו) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x-cos(x)}{4x+sin(x)}$

(ז) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^{ln(x)}}{x}$

(ח) $\lim_{x\to 0+}xln(e^x-1)$

(ט) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x cos(x)-(x+1)}{tan(x)-sin(x)}$

(י) $\lim_{x\to 0+}\frac{ln(sin(ax))}{ln(sin(bx))}$ עבור $a,b>0$.

3. הוכיחו או הפריכו: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה כך ש- $\exists\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}<\infty$ והוא שווה ל-L אז $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{2x}=L$.

4. מצאו פולינום טיילור סביב 0 מכל סדר עבור הפונקציות:

(א) $sin^2(x)$

(ב) xe^x

(ג) $e^{x^{10}}$

(ד) $xsin(x^3)$

והעריכו את השגיאה עבור שתי הפונקציות הראשונות.

5. מצאו:

(א) $sin(0.1)$ עם דיוק 10^{-8}

(ב) $\sqrt{5}$ עם דיוק 10^{-3}

6. העריכו את השגיאה בקירוב $sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$ עבור $|x| \leq 0.01$.

7. הוכחה אחת לאי-שיוויון $Young$:

(א) נקבע $0 < \lambda < 1$. הוכיחו כי $a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$ לכל $a, b \geq 0$. מתי מתקיים שיוויון? (רמז: חקרו פונקציה מתאימה)

(ב) הסיקו ש- $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ לכל $a, b \geq 0$, $p, q \in (1, \infty)$ כך ש- $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. קבעו מהם תנאי השיוויון.

8. תהי f גזירה פעמיים בקטע $[0,1]$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ ו- $min_{[0,1]} f = -1$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c \in (0,1)$ כך ש- $f''(c) \geq 8$. רמז: היעזרו בפיתוח טיילור בנקודה שבה f מקבלת מינימום.